MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

S. 804. D.18.

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE,

ET IMPRIMÉS PAR SON ORDRE.

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

TOME CINQUIÈME.

PARIS.

IMPRIMÉ PAR AUTORISATION DU ROI

A L'IMPRIMERIE ROYALE.

M DCCC XXXVIII.

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE DES NOMBRES,

PAR GUILLAUME LIBRI;

LU À L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, LE 15 JUIN 1825.

INTRODUCTION.

Tous les géomètres qui se sont occupés de la théorie des nombres ont dû remarquer que cette branche des mathématiques est entièrement séparée des autres, et qu'il n'y a point de méthode générale pour résoudre les problèmes qu'elle présente : de manière que, même pour les équations indéterminées qui ont été résolues jusqu'à ce jour, il faut toujours connaître la valeur numérique des coefficiens, afin d'avoir les racines : ce qui montre combien cette théorie est imparfaite. D'ailleurs il n'existe point, pour l'analyse indéterminée, des méthodes d'approximation comme pour les autres parties de l'algèbre. Elles seraient ici d'autant plus utiles, que, si l'on connaissait une valeur approchée des inconnues, on en aurait de suite la valeur exacte. L'importance de la matière nous ayant engagé à faire des recherches sur ce sujet, nous avons cru pouvoir déduire d'un principe général toute la théorie des nombres, en la

réduisant à l'analyse ordinaire; et la bonté avec laquelle cette illustre Académie a daigné accueillir nos travaux précédens nous a engagé à lui présenter un essai sur cette matière, pour lequel nous réclamons son indulgence.

Nous reproduisons au commencement de ce mémoire des formules que nous avions trouvées précédemment, à l'aide desquelles on peut exprimer le nombre des solutions d'une équation indéterminée, et la somme des racines de cette équation, en fonctions de ses coefficiens. Ces fonctions peuvent être développées en séries convergentes par les puissances de la variable, de manière à avoir toujours une valeur approchée; et nous donnons ici une formule très-simple pour effectuer ce développement. Ensuite nous exposons notre théorie générale des équations indéterminées.

En cherchant à mettre en équation les problèmes numériques, nous avons observé qu'étant proposée une équation à plusieurs inconnues à résoudre en nombres entiers ou rationnels, le problème n'était indéterminé que parce que l'on négligeait d'en traduire toutes les conditions en analyse. En le déterminant complétement, on trouve toujours un nombre d'équations qui surpasse de l'unité celui des inconnues; de sorte qu'on arrive à ce résultat assez remarquable, que toutes les équations appelées jusqu'ici indéterminées sont plus que déterminées, et qu'il existe pour chacune d'elles une équation de condition qui doit être satisfaite, afin que la résolution en soit possible. On explique de cette manière la contradiction que l'on observe, entre le nom d'équations indéterminées, et le fait qui montre que le plus souvent elles sont insolubles. Ce résultat, auquel on parvient avec la plus grande facilité, et que nous avons annoncé pour la première fois dans les Mémoires de l'Académie de Turin, avait cependant échappé à Euler, qui croyait que les équations indéterminées devenaient plus que déterminées seulement lorsque le nombre des formes, auxquelles des fonctions données des variables devaient pouvoir se réduire, surpassait celui des inconnues. Nous déduisons de la nature même du problème les équations qui en expriment toutes les conditions;

et nous montrons de quelle manière, en diminuant successivement toutes les inconnues, on obtient une équation de condition, qui doit être satisfaite, afin que l'équation proposée soit résoluble. De sorte que la théorie des nombres rentre de cette manière tout à fait dans le domaine de l'algèbre ordinaire.

L'équation de condition que l'on trouve est toujours une fonction des coefficiens de l'équation que l'on veut résoudre, et de la limite qu'on attribue aux inconnues; de telle manière que lorsque cette limite est l'infini, on obtient une suite infinie dont il s'agit d'avoir la somme, et que l'on peut représenter par une intégrale définie à l'aide des formules de M. Fourier; mais la valeur de cette intégrale est difficile à calculer : pour faciliter cette recherche, il faut recourir à des artifices particuliers, et considérer des intégrales définies dont la valeur soit indépendante des constantes qu'elles renferment. Mais comme le but de ce mémoire est seulement de montrer le principe général de notre théorie, nous n'avons pas cru devoir exposer à présent ces développemens. C'est par la même raison que nous n'avons fait qu'indiquer ici les autres formules qui étaient nécessaires pour compléter ces recherches. De ce nombre sont une formule générale d'élimination, et des expressions qui servent à développer un polynome élevé à une puissance quelconque, et à obtenir les fonctions symétriques d'une équation algébrique. Ces formules, d'une forme très-simple, ont l'avantage qu'il n'est pas nécessaire, pour les appliquer aux cas particuliers, d'effectuer aucune opération analytique; et il suffit d'y substituer les valeurs des coefficiens des équations proposées. Nous les avons trouvées en considérant une classe particulière d'équations aux différences dont l'ordre augmente avec la variable; et elles ont quelque ressemblance, dans la forme, avec l'intégrale, trouvée par Lagrange, de l'équation linéaire aux différences du premier ordre. Cependant, pour qu'on ne puisse pas croire que la méthode que nous proposons n'est pas susceptible d'application, et pour montrer de quelle manière nos formules se simplifient dans les cas particuliers, nous avons considéré les équations qui sont du

premier degré par rapport à l'une des inconnues, et que M. Gauss a appelées *congruences*.

En partant de notre principe général, nous démontrons les théorèmes de Fermat et de Wilson, et beaucoup d'autres; puis nous établissons une formule qui renferme toute la théorie des congruences, et qui la ramène aux fonctions circulaires.

En considérant les congruences du premier degré, nous trouvons l'expression générale des racines de l'équation indéterminée du premier degré en fonction des coefficiens (ce qui n'avait jamais été fait); et nous montrons qu'elles en sont une fonction trigonométrique. Ensuite, en passant aux congruences du second degré, nous retrouvons directement tous les théorèmes connus sur les résidus quadratiques.

Notre formule fondamentale, en établissant un rapport singulier entre les solutions des congruences et les fonctions circulaires, fournit le moyen de résoudre directement les équations à deux termes. M. Gauss, qui a découvert le premier cette résolution par une méthode très-ingénieuse, et Lagrange, qui l'a ensuite ramenée à sa théorie générale des équations, ont supposé que l'on connaissait toujours les racines primitives des nombres premiers. La méthode que nous exposons dans ce mémoire est indépendante de cette recherche, et d'ailleurs elle est beaucoup plus simple que celles qui ont été trouvées par ces deux grands géomètres, et qui exigent de très-longs calculs pour être mises en pratique.

On applique les mêmes principes aux congruences des ordres supérieurs, à la résolution des équations d'où dépend la division de la lemniscate en parties égales, et à beaucoup d'autres recherches : les exemples que nous avons choisis suffisent pour montrer de quelle manière notre méthode doit être modifiée dans les cas particuliers.

En partant des formules que nous donnons ici, nous avions trouvé précédemment une expression numérique de la somme des diviseurs d'un nombre quelconque : nous indiquons à présent une équation d'où l'on peut déduire la manière de trouver directe-

ment un nombre premier plus grand qu'une limite donnée. Mais comme cette recherche exigerait la connaissance de plusieurs formules que nous ne donnons pas à présent, nous nous réservons de résoudre complétement, dans une autre occasion, ce problème, qui a été considéré jusqu'ici comme très-difficile.

L'examen des formules que nous exposons dans cet essai montre qu'en général les fonctions numériques s'expriment par des séries, dont le nombre des termes et l'exposant de la variable augmentent avec la valeur de la variable elle-même, et qu'elles forment en conséquence un nouveau genre de transcendantes, qui ont des propriétés tout à fait différentes de celles déjà connues. Pour perfectionner notre théorie, il faut comparer ces transcendantes entre elles, et les réduire au plus petit nombre possible; mais cette recherche importante ne pouvait pas trouver place ici, et formera le sujet d'un travail particulier. Nous montrerons alors de quelle manière on peut abréger les calculs que notre méthode exige, en faisant usage des intégrales définies, et quelles sont les formes à choisir, afin d'en pouvoir calculer la valeur avec facilité. Le mémoire que nous avons l'honneur de présenter à l'Académie n'a pour but que de montrer de quelle manière on peut réduire la théorie des nombres à l'analyse ordinaire.

ANALYSE.

Nous avons avancé ailleurs pour la première fois que lorsqu'on avait une équation à plusieurs inconnues à résoudre en nombres entiers, le problème n'était indéterminé que parce qu'on négligeait d'en traduire en analyse toutes les conditions; et nous avons fait voir que, au contraire, on obtenait toujours un nombre d'équations qui surpassait de l'unité le nombre des inconnues; puisque étant proposée l'équation

$$\Phi(x, y, z, \ldots \text{ etc}) = 0;$$

pour exprimer que $x, y, z, \ldots$ etc., doivent être des nombres entiers, on avait les équations

$$\sin x\pi = 0, \quad \sin y\pi = 0, \quad \sin z\pi = 0, \ldots \text{ etc.}$$

dont le nombre est égal à celui des inconnues.

Nous avons vu encore qu'étant proposée l'équation

$$\varphi(x, y, z, \ldots \text{etc.}) = 0,$$

le nombre de ses solutions entières et positives différentes de zero était exprimé, à très-peu près, par la formule

$$\Sigma e^{-a(x+y+z\ldots\text{etc.})\overline{\varphi(x,y,z,\ldots\text{etc})}^2}$$

où il fallait intégrer entre les limites

$$x = y = z \ldots = 1.$$
$$x = y = z \ldots = \infty;$$

et nous avons donné des formules semblables pour d'autres fonctions numériques.

Lorsqu'on cherche seulement le nombre des solutions comprises dans la série

$$1, 2, 3, \ldots\ldots A - 1.$$

il suffit de considérer la formule

$$(1) \qquad \Sigma e^{-a\overline{\psi(x,y,z\ldots\text{etc.})}^2}$$

où il faut intégrer entre les limites

$$x = y = z \ldots = 1,$$
$$x = y = z \ldots = A;$$

pourvu que a soit un nombre assez grand.

L'intégrale (1) ne peut pas s'obtenir en général; mais en developpant en série par les puissances de a, comme la suite qui en

résulte est toujours convergente, on pourra la calculer directement, et l'on aura

$$\Sigma e^{-a\,\overline{\varphi(x,y,z,\ldots\text{etc.})}^2} = \Sigma 1 - a\,\Sigma\overline{\varphi(x,y,z,\ldots\text{etc.})}^2 + \frac{a^2}{1.2}\,\Sigma\overline{\varphi(x,y,z,\ldots\text{etc.})}^4 - \text{etc.},$$

en intégrant par rapport à toutes les variables depuis l'unité jusqu'à la limite A.

On obtiendra de cette manière le nombre des solutions de l'équation

$$\varphi(x,y,z,\ldots\ldots\text{etc.}) = 0,$$

comprises dans la série des nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ \text{A} - 1,$$

en calculant un nombre fini de termes; car comme on a toujours, pour des valeurs réelles de la variable

$$\Sigma X^{2n} < \Sigma\,(X^2)^n,$$

la série que nous considérons aura au numérateur un rapport d'un terme à l'autre plus petit que

$$1 : -a\,\Sigma\overline{\varphi(x,y,z,\ldots\text{etc.})}^2,$$

tandis que le dénominateur aura à chaque terme un facteur de plus, qui ira toujours en croissant; ce qui rendra la suite convergente.

L'intégrale (1) peut se développer assez simplement de la manière suivante.

Étant donnée l'équation

$$\varphi(z) = e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \ldots\ldots\ldots + e_n z^n + \text{etc.},$$

laquelle se réduit à

$$e^{uz} = 1 + uz + \frac{u^2z^2}{1.2} + \frac{u^3z^3}{1.2.3} \ldots\ldots + \frac{u^n z^n}{1.2.3\ldots n} + \text{etc.}$$

lorsque $\Phi(z) = e^{uz}$, on aura dans ce cas

$$e_0 = 1, \quad e_1 = u, \quad e_2 = \frac{u^2}{1.2}, \ldots\ldots \quad e_n = \frac{u^n}{1.2.3..n}.$$

Si l'on fait à présent

$$(2) \qquad \begin{aligned} \Sigma\Phi(z) &= a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \ \ldots\ldots + a_n z^n + \text{etc.} \\ \Sigma e^{uz} &= b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 \ \ldots\ldots + b_n z^n + \text{etc.}; \end{aligned}$$

a_n sera une fonction du premier degré des coefficiens

$$e_{n-1}, \quad e_n, \quad e_{n+1}, \text{ etc.},$$

et b_n sera une fonction semblable des coefficiens

$$\frac{u^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}, \quad \frac{u^n}{1.2.3....n}, \quad \frac{u^{n+1}}{1.2.3..(n+1)}, \text{ etc.};$$

de sorte que les diverses puissances de $u, u^2, \ldots\ldots u^n$, etc., resteront indépendantes entre elles, de même que les coefficiens $e_0, e_1, e_2, \ldots e_n$, et il ne pourra pas y avoir de réduction; de telle manière que si l'on a la valeur de b_n, on trouvera celle de a_n, en substituant partout dans la première

$$1.2.3....n\,e_n = \frac{d^n\varphi(z)}{dz^n},$$

(où il faut faire $z = 0$ après les différenciations), au lieu de u^n.

A présent l'on a

$$\Sigma e^{uz} = \frac{e^{uz} - 1}{e^u - 1},$$

et comme par les formules de M. Laplace, ou par celles que nous avons données dans les Mémoires de l'Académie de Turin (voyez la I^re^ note à la fin de ce mémoire), on peut trouver le développement de

$$\frac{1}{e^u - 1} = \frac{1}{u} + A_1 + A_2 u \ \ldots\ldots + A_n u^{n-1} + \text{etc.}$$

on aura

$$\Sigma e^{uz} = \left(\frac{1}{u} + A_1 + A_2 u + A_3 u^2 + \ldots + A_n u^{n-1} + \text{etc.}\right) \times$$

$$\times \left(uz + \frac{u^2 z^2}{1.2} + \frac{u^3 z^3}{1.2.3} \ldots + \frac{u^n z^n}{1.2.3..n} + \text{etc.}\right)$$

$$= b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 \ldots + b_n z^n + \text{etc.},$$

et par suite

$$b_n = \frac{u^{n-1}}{1.2.3..n} + \frac{A_1 u^n}{1.2.3..n} + \frac{A_2 u^{n+1}}{1.2.3..n} + \text{etc.}$$

Si l'on substitue dans cette équation $\frac{d^n \varphi(z)}{dz^n}$ au lieu de u^n, on aura en général

$$a_n = \frac{1}{1.2.3..n}\left(\frac{d^{n-1}\varphi(z)}{dz^{n-1}} + \frac{A_1 d^n \varphi(z)}{dz^n} + \frac{A_2\, d^{n+1}\varphi(z)}{dz^{n+1}} + \text{etc.}\right)$$

On peut exprimer ce coefficient en termes finis de cette manière

$$a_n = \frac{1}{1.2.3..n}\left(\frac{\left(\frac{d\varphi(z)}{dz}\right)}{e^{\frac{d\varphi(z)}{dz}} - 1}\right),$$

pourvu qu'en développant on change $\frac{\overline{d\varphi(z)}^p}{dz^p}$ en $\frac{d^p \varphi(z)}{dz^p}$, comme on le fait pour d'autres formules de la même espèce, et que l'on fasse $z = 0$ après les différenciations. En substituant les valeurs de

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n,$$

exprimées de cette manière dans l'équation (2), on aura la formule

$$\Sigma\Phi(z) = \frac{z\frac{d\varphi(z)}{dz}}{e^{\frac{d\varphi(z)}{dz}}-1} + \frac{z^2}{1.2}\frac{\frac{d\varphi(z)^2}{dz^2}}{e^{\frac{d\varphi(z)}{dz}}-1} \cdots$$

$$+ \frac{z^n}{1.2.3..n}\frac{\left(\frac{d\varphi(z)}{dz}\right)^n}{e^{\frac{d\varphi(z)}{dz}}-1} + \text{etc.} = \frac{e^{z\frac{d\varphi(z)}{dz}}-1}{e^{\frac{d\varphi(z)}{dz}}-1},$$

qui est assez simple.

Il faut observer ici que si l'on fait $\Phi(z) = e^{uz}$, on aura toujours

$$\frac{d\varphi(z)^n}{dz^n} = \frac{d^n\varphi(z)}{dz^n},$$

pourvu que l'on fasse $z = 0$ après les différenciations; c'est par cette raison que dans ce cas la formule

$$\frac{e^{z\frac{d\varphi(z)}{dz}}-1}{e^{\frac{d\varphi(z)}{dz}}-1} = \frac{e^{uz}-1}{e^u-1},$$

représente exactement la valeur de l'intégrale Σe^{uz}. On pourrait de la même manière développer $\Sigma^n\Phi(z)$, $\Delta^n\Phi(z)$, et en général

$$\Sigma^n\,\Sigma^p\,\Sigma^q \ldots \Phi(z, y, u, \ldots \text{etc.}),$$

les intégrations étant effectuées par rapport aux variables z, y, u, etc.

Les séries que l'on obtient de cette manière sont de peu d'utilité dans les applications numériques; car pour avoir une valeur approchée de l'intégrale (1), il faut calculer un nombre de termes qui croît avec la limite A de l'intégration, de telle manière qu'on obtient toujours une équation de degré indéfini, et qui est une fonction des coefficiens de l'équation $\Phi(x, y, z, \ldots \text{etc.}) = 0$, et de la limite A. Mais il est à remarquer que les coefficiens des variables x, y, z, etc., dans le développement de la fonction (1), sont

tels, qu'après un certain nombre de termes il s'opère une compensation, de manière qu'il ne reste à peu près que le nombre des solutions cherché. Cette considération, et l'examen attentif de la nature de ces coefficiens, peuvent fournir une théorie complète des équations indéterminées; et déjà l'aperçu que nous avons indiqué suffirait pour montrer de quelle manière on pourrait réduire la théorie des nombres à l'analyse ordinaire, mais nous allons reprendre plus généralement ce sujet.

Étant proposée une équation à plusieurs inconnues à résoudre en nombres rationnels (entiers ou fractionnaires), on pourra toujours la préparer de manière que tous les nombres qu'on cherche soient entiers et positifs, puisque, en général, si l'équation à résoudre était de la forme

$$\Phi(x, y, z, \ldots \text{ etc.}) = 0,$$

et qu'on cherchât pour $x, y, z,$ etc., des valeurs fractionnaires en faisant

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad y = \frac{y_1}{y_2}, \quad z = \frac{z_1}{z_2}, \text{ etc.},$$

on aurait l'équation

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{y_1}{y_2}, \frac{z_1}{z_2}, \text{etc.}\right) = 0,$$

dans laquelle il ne faudrait chercher, pour $x_1, x_2, y_1, y_2,$ etc., que des valeurs entières; et d'ailleurs s'il y avait des solutions négatives, on les obtiendrait en changeant les signes des variables.

Soit donc proposée l'équation

$$\Phi(x, y, z, \ldots \text{ etc.}) = 0,$$

que nous représenterons pour abréger par $\Phi = 0$, à résoudre en nombres entiers et positifs : avec les méthodes connues on cherche à s'aider de la forme particulière des coefficiens pour obtenir toutes les solutions. Mais l'équation $\Phi = 0$ exprime seulement les rela-

tions qui doivent exister entre les inconnues, et n'indique d'aucune manière qu'elles ne puissent recevoir que des valeurs entières. Cet oubli des conditions auxiliaires du problème a été la cause qu'il n'a pas été soumis à une analyse générale, parce qu'on ne le mettait pas en équation; et d'ailleurs c'est pour cela que l'on a appelé indéterminée l'équation $\Phi \equiv 0$, quoique souvent on trouvât qu'elle n'était pas résoluble; ce qui aurait dû faire soupçonner qu'il existait une équation de condition, laquelle n'étant pas satisfaite, le problème ne pouvait pas être résolu. Au reste la forme des racines des équations à une seule inconnue, et l'observation qui montrait que, dans celles à plusieurs inconnues, le nombre des racines était tout à fait indépendant du degré de l'équation proposée, auraient dû faire prévoir que cette équation de condition renfermait les coefficiens de l'équation proposée, et les limites que l'on attribuait aux variables.

Nous allons considérer le problème *à priori*, et nous montrerons de quelle manière on peut trouver l'équation de condition, qui doit être satisfaite pour une équation quelconque; de manière que lorsque la limite des variables n'est pas l'infini, on pourra toujours trouver directement toutes les solutions de l'équation proposée.

Étant proposée l'équation à plusieurs inconnues

$$\Phi(x, y, z, \ldots \text{ etc.}) = 0,$$

à résoudre en nombres entiers et positifs, supposons d'abord que l'on demande toutes les solutions qui s'obtiennent en donnant à x des valeurs moindres qu'une limite a; à y des valeurs plus petites que b; à z des valeurs plus petites que c, et ainsi de suite; a, b, c, etc., étant des nombres entiers et positifs, on devra donc donner à x, y, z, etc., toutes les valeurs comprises dans les séries

$$\begin{aligned} x &= 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots (a-1), \\ y &= 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots (b-1), \\ z &= 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots (c-1), \\ &\text{etc.;} \end{aligned}$$

et faire toutes les combinaisons possibles avec l'équation $\varphi = 0$. Ces valeurs seront comprises aussi dans les équations

$$X = x(x-1)(x-2) \ldots\ldots (x-[a-1]) = 0,$$
$$Y = y(y-1)(y-2) \ldots\ldots (y-(b-1]) = 0,$$
$$Z = z(z-1)(z-2) \ldots\ldots (z-[c-1]) = 0,$$
etc. ;

lesquelles expriment les conditions que, x soit un nombre entier positif et moindre que a, que y soit un nombre entier positif moindre que b, et ainsi de suite ; de manière que les équations

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \text{etc.}, \quad \varphi(x, y, z, \ldots\ldots \text{etc}) = 0,$$

doivent exister ensemble, et déterminent entièrement le problème. Mais puisque le nombre de ces équations surpasse de l'unité celui des inconnues, en éliminant successivement x, y, z, etc., on parviendra à une équation de condition

$$F = 0,$$

qui comprendra seulement les limites a, b, c, etc., et les coefficiens de l'équation $\varphi(x, y, z, \ldots\ldots \text{etc.}) = 0$, et qui devra être satisfaite, afin que l'équation proposée soit résoluble.

Lorsque l'équation de condition sera satisfaite, et qu'on sera certain par conséquent que l'équation

$$\varphi(x, y, z, \ldots\ldots) = 0$$

est résoluble, on reprendra l'une des équations à une seule inconnue, que nous avons obtenues par l'élimination avant de parvenir à l'équation $F = 0$: par exemple, une équation en x seule de la forme $X_1 = 0$, et en cherchant le plus grand diviseur commun entre $X = 0$ et $X_1 = 0$, on aura une équation en x de la forme $X_2 = 0$, dont toutes les solutions seront entières, et dont le degré exprimera le nombre des valeurs de x, qui satisfont à l'équation

$$\varphi(x, y, z, \ldots\ldots \text{etc.}) = 0 ;$$

et en résolvant l'équation $X_2 = 0$, on aura toutes les valeurs de x qui satisfont à l'équation $\varphi(x, y, z, \ldots \text{ etc.}) = 0$. De même, si après l'élimination des autres $(n-1)$ inconnues, on parvient à une équation en y de la forme $Y_1 = 0$; en cherchant le plus grand commun diviseur entre $Y = 0$ et $Y_1 = 0$, et en l'égalant à zéro, on obtiendrait toutes les valeurs de y qui résolvent l'équation proposée; et l'on voit que la même chose aurait lieu relativement aux autres inconnues.

Il est clair que la même méthode pourrait s'appliquer à trouver directement toutes les solutions rationnelles de l'équation à une seule inconnue

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \ldots + px + q = 0;$$

mais dans tous les cas cette méthode ne fournit que les racines inégales : cependant les racines égales peuvent être déterminées de la manière suivante.

Nous supposerons, pour simplifier le problème, qu'il s'agisse d'une équation à deux inconnues seulement, puisque la méthode est absolument la même lorsqu'il y en a un plus grand nombre.

Étant donnée l'équation

$$\varphi(x, y) = 0,$$

à résoudre en nombres rationnels; si à une valeur rationnelle de $y = b$, il en correspond n également rationnelles de $x = a$ (n étant plus grand que l'unité); en différenciant l'équation proposée par rapport à x, et cherchant le plus grand diviseur commun Δ entre

$$\frac{d.\varphi(x,y)}{dx}, \text{ et } \varphi(x, y),$$

on obtiendra $\Delta = F(x, y)$, et il y aura un reste $R = f(y)$, qui ne contiendra plus x, et qui par supposition devra se réduire à zéro. Si l'on fait donc $f(y) = 0$, on en déduira la valeur rationnelle de $y = b$, lorsque cette valeur existe : et substituant b pour y, on aura

$$\Delta = F(x, b) = (x - a)^{n-1},$$

et on obtiendra les valeurs multiples de x que l'on cherchait.

Ce que nous avons dit dans l'hypothèse que n valeurs de $x = a$ correspondent à une valeur de $y = b$, s'applique aussi lorsqu'à une valeur de $x = \mathrm{A}$, il en correspond m de $y = \mathrm{B}$; pourvu que l'on change x en y, et que l'on effectue les opérations dans un ordre inverse.

Si R était zéro identiquement, nous aurions l'équation

$$\Delta = \mathrm{F}(x, y) = 0 = (x - \downarrow[y])^{n-1},$$

qui devrait exister en même temps que l'autre $\Phi(x, y) = 0$, et qui en serait un facteur : l'on ne pourrait donc pas déterminer la valeur de $y = b$; mais en divisant le polynome $\Phi(x, y)$ par Δ, le quotient Q contiendrait une seule des n racines de $x = \downarrow(y)$, et en cherchant le plus grand commun diviseur entre Δ et Q, on aurait l'équation $x - \downarrow(y) = 0$.

Nous avons supposé qu'il y avait seulement n valeurs de $x = a$, qui correspondaient à la valeur de $y = b$, mais si outre celle-là il y avait m valeurs de $x = c$, r valeurs de $x = e$, etc., il serait facile d'appliquer à ce cas la méthode déjà indiquée.

Soit proposée, par exemple, l'équation

$$x^2 - 2xy + 2y^3 - 1 = 0,$$

dans laquelle on veuille savoir si, parmi toutes les valeurs de y qui la résolvent, il y en a une égale à b, et telle qu'il lui en corresponde $n > 1$ de $x = a$: à cet effet on différenciera l'équation proposée par rapport à x, et l'on aura $x - y = 0$: puis en cherchant le plus grand commun diviseur entre ces deux équations, on aura $x - y$ pour quotient, et $2y^3 - y^2 - 1 = 0$ pour reste : et comme cette dernière équation est satisfaite en faisant $y = 1$; si l'on substitue cette valeur dans l'équation

$$x^2 - 2xy + 2y^3 - 1 = 0,$$

on aura

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0 :$$

et par conséquent l'équation

$$x^2 - 2xy + 2y^3 - 1 = 0$$

est telle que deux valeurs de $x = 1$ correspondent à la valeur $y = 1$.

On voit que si l'équation proposée avait n inconnues, en cherchant les racines égales, on la réduirait toujours à une équation à $n - 1$ inconnues, qui pourrait être traitée par la méthode générale.

Il résulte de ce qui précède que toute la théorie des nombres se réduit à un problème d'élimination, puisqu'il est clair qu'il suffirait de pouvoir éliminer toutes les inconnues entre les équations

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \ldots . \text{etc.}, \quad \Phi(x, y, z, \ldots . \text{etc.}) = 0,$$

que nous avons trouvées précédemment, pour avoir l'équation de condition

$$F = 0,$$

d'où dérive tout le reste. L'élimination générale entre ces équations n'est pas encore connue; cependant elle peut s'effectuer au moyen des intégrales définies, comme nous espérons le montrer dans une autre occasion : nous traiterons alors des équations indéterminées en général, et nous montrerons de quelle manière il faut opérer dans tous les cas (voyez la note II à la fin de ce mémoire). Quant à présent, nous nous bornerons à considérer les équations dans lesquelles l'une des inconnues est élevée seulement au premier degré, et que M. Gauss a appelées *congruences*, et nous déduirons d'une seule formule tout ce qu'on savait sur ce genre d'équations, et beaucoup d'autres choses nouvelles. Cela nous fournira l'occasion de montrer un exemple des simplifications remarquables dont notre méthode est susceptible, lorsqu'on l'applique aux cas particuliers, et des artifices d'analyse dont il faut faire usage pour résoudre ce genre de problèmes.

Étant proposée l'équation

$$(3) \qquad \Phi(x, y, z \ldots \text{etc.}) - pu = 0,$$

(dans laquelle, Φ est une fonction quelconque des nombres entiers et positifs

$$x, y, z, \ldots \text{etc.},$$

p est un nombre entier quelconque, et u est un nombre entier positif ou négatif) il est clair d'abord que s'il existe des valeurs de $x, y, z, \ldots$ etc., qui résolvent l'équation proposée, et qui soient plus grandes que p, il y en aura aussi qui seront comprises entre zéro et p; ce seront ces dernières valeurs que nous considérerons toujours dans ce qui suit, à moins que nous n'indiquions spécialement le contraire.

A présent l'on sait que l'équation (3) équivaut à la congruence

$$\Phi(x, y, z, \ldots \text{etc.}) \equiv 0, \qquad [\text{mod.}\, p];$$

en supposant, pour simplifier le problème, que p soit un nombre premier, que cette congruence ne contienne que l'inconnue x, et qu'elle soit de la forme

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + Px + Q \equiv 0 \qquad [\text{mod.}\, p],$$

si elle a une racine $x = a$, on pourra toujours la mettre sous la forme

$$(x - a)X_1 \equiv 0, \qquad [\text{mod.}\, p]$$

X_1 étant un polynome entier en x du degré $m - 1$: il résulte de là que la congruence $X \equiv 0$ [mod. p.] ne peut avoir que m racines, et que si elle a les m racines entières

$$a, b, c, d, e, f, \text{etc.},$$

on pourra la mettre sous la forme

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + Px + Q \equiv (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)(x-f)\ldots\text{etc.} \quad [\text{mod.}\, p];$$

on aura alors les congruences (4)

$$a + b + c + d + e + f \ldots\ldots \text{etc.} \equiv -\mathrm{A}, \qquad [\text{mod. } p]$$

$$\left\{\begin{array}{r} ab + ac + ad \ldots\ldots + \text{etc.} \\ + bc + bd + be + \text{etc.} \\ + cd + ce + cf + \text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{etc.} \end{array}\right\} \equiv + \mathrm{B}, \qquad [\text{mod. } p]$$

$$\left\{\begin{array}{r} abc + abd + abe + \text{etc.} \\ + bcd + bce + bcf + \text{etc.} \\ + cde + cdf + \text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc.} \end{array}\right\} \equiv - \mathrm{C}, \qquad [\text{mod. } p]$$

$$abcdef\ldots\ldots \equiv \pm \mathrm{Q}, \qquad [\text{mod. } p]$$

dans la dernière desquelles il faut prendre le signe + si m est pair, et le signe — si m est impair.

Pour trouver la somme des puissances r^{mes} des racines de cette congruence, on aura des formules semblables à celles que l'on obtient pour les équations, car en appelant

$$\mathrm{P}_r, \quad \mathrm{P}_{r-1}, \quad \mathrm{P}_{r-2}, \quad \text{etc.},$$

la somme des puissances r^{mes}, $(r-1)^{mes}$, etc., de ces racines, on aura

$$\mathrm{P}_{r-1} + \mathrm{AP}_{r-1} + \mathrm{BP}_{r-2} \ldots\ldots + r\mathrm{R} \equiv 0, \quad [\text{mod. } p].$$

On peut de la même manière transformer les congruences, et en avoir les fonctions symétriques; en général quand on a trouvé une formule propre à représenter une fonction quelconque des racines de l'équation $\mathrm{X} = 0$, si l'on suppose que la congruence de la même forme $\mathrm{X} \equiv 0 \quad [\text{mod. } p]$ ait toutes ses racines entières, on pourra trouver la même fonction des racines de la congruence exprimée par une formule semblable à celle que l'on a obtenue pour l'équation; de sorte que si $\Phi = \mathrm{B}$ représente la fonction cher-

chée dans l'équation $X = 0$, l'on aura $\varphi \equiv B \pmod{p}$ pour représenter la même fonction dans la congruence

$$X \equiv 0, \pmod{p}.$$

Soit maintenant proposée la congruence

$$x^p - x \equiv 0, \pmod{p}$$

dans laquelle p est un nombre premier; si l'on cherche une transformée dont les racines surpassent de l'unité celles de la proposée, on aura $y = x + 1$, $x = y - 1$, et partant

$$(y-1)^p - (y-1) \equiv 0, \pmod{p}$$

congruence qui se réduit à

$$y^p - y \equiv 0, \pmod{p}$$

lorsque p est un nombre premier.

Puisque la transformée est identique avec la congruence proposée, celle-ci ayant la racine $x = a$, aura aussi la racine $x = a + 1$, et par conséquent l'autre $x = a + 2$; et en général elle sera résolue par toutes les valeurs $x = a + z$, z étant un nombre entier positif quelconque. Mais puisque la valeur $x = 0$ résout la congruence proposée, elle aura pour racines la série des nombres naturels, et par conséquent celle-ci

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0, \pmod{p}$$

aura pour racines tous les nombres

$$1, 2, 3, \ldots\ldots p - 1:$$

ce qui forme le théorème de Fermat

La congruence

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0, \pmod{p}$$

étant comparée à l'autre

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots\ldots + Pr + Q \equiv 0, \pmod{p}$$

que nous avons considérée précédemment, donne

$$A = 0,\ B = 0,\ \ldots\ P = 0,\ Q = -1,$$
$$a = 1,\ b = 2,\ c = 3,\ d = 4,\ e = 5,\ f = 6, \text{ etc.}$$

$m = p - 1$ égal à un nombre pair: en substituant par conséquent les valeurs des racines a, b, c, d, e, f, etc., dans les congruences (4) on aura

$$1 + 2 + 3 \ldots\ldots + (p-1) \equiv 0, \qquad [\text{mod. } p]$$

$$\left\{\begin{array}{c} 1.2 + 1.3 \ldots + 1(p-1) \\ + 2.3 + 2.4 \ldots + 2(p-1) \\ \ldots\ \text{etc.} \end{array}\right\} \equiv 0, \qquad [\text{mod. } p]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{etc.},$$

$$\left\{\begin{array}{c} 1.2.3 + 1.2.4 + 1.2.5 + \text{etc.} \\ + 2,3.4 + 2.3.5 + 2.3.6 + \text{etc.} \\ + 3.4.5 + 3.4.6 + 3.4.7 + \text{etc.} \\ \ldots\ \text{etc.} \end{array}\right\} \equiv 0, \qquad [\text{mod. } p]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{etc.},$$

et enfin

$$1.2.3.4 \ldots\ (p-1) + 1 \equiv 0, \qquad [\text{mod. } p]$$

Cette dernière congruence renferme le théorème de Wilson.

On démontrerait de la même manière tous les théorèmes que M. Gauss a insérés dans la troisième partie de ses Recherches arithmétiques, et beaucoup d'autres; par exemple, on obtient la congruence

$$1.2.3 \ldots (g-1)(g+1) \ldots (p-1) + g^{p-1} \equiv 0, \ [\text{mod. } p.]$$

qui est toujours vérifiée lorsque p est un nombre premier. De même on trouve que si p est un nombre premier, et que n ne soit pas divisible par $p - 1$, on aura

$$1^n + 2^n + 3^n \ldots\ldots + (p-1)^n \equiv 0, \qquad [\text{mod. } p]$$

tandis que si n est un multiple de $(p-1)$ on obtiendra

$$1^n + 2^n + 3^n \ldots + (p-1)^n + 1 \equiv 0, \quad [\text{mod. } p]$$

Nous ne pouvons pas nous arrêter à développer les nombreuses conséquences qui dérivent de ce principe : cependant nous montrerons comment on peut retrouver et généraliser un théorème donné par M. Poinsot dans le Journal de l'école royale Polytechnique.

M. Poinsot a démontré que les racines de la congruence

$$x^n - 1 \equiv 0, \quad [\text{mod. } p]$$

dans laquelle $np+1$ est un nombre premier, se déduisent des racines de l'équation $x^n - 1 \equiv 0$, en ajoutant sous les radicaux compris dans l'expression de ces dernières, des multiples de $np+1$. Ce théorème est évident dans tous les cas.

En effet la congruence

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots P x + Q \equiv 0, \quad [\text{mod. } a]$$

(dans laquelle a est un nombre quelconque) équivaut à l'équation

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots + Px + (Q - ay) \equiv 0,$$

dont les racines sont exprimées en général par la formule

$$x = \varphi(A, B, \ldots P, Q - ay),$$

qui se réduit à l'expression des racines de l'équation

$$x + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots + Q = 0,$$

lorsqu'on y fait $y = 0$. Donc, *vice versâ*, si l'on ajoute des multiples de a sous les radicaux compris dans l'expression des racines de cette équation, on aura les racines de la congruence proposée.

En appliquant aux congruences ce que nous avons dit en général des équations indéterminées, on trouve que toutes les solutions de la congruence

$$\varphi(x, y, z, \ldots \text{etc.}) \equiv 0, \quad [\text{mod. } p]$$

sont comprises parmi celles des congruences

$$\begin{aligned} X &\equiv x(x-1)(x-2) \ldots\ldots (x-[p-1]) \equiv 0, \quad [\text{mod. } p] \\ Y &\equiv y(y-1)(y-2) \ldots\ldots (y-[p-1]) \equiv 0, \quad [\text{mod. } p] \\ Z &\equiv z(z-1)(z-2) \ldots\ldots (z-[p-1]) \equiv 0, \quad [\text{mod. } p] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ etc.,} \end{aligned}$$

et qu'en éliminant toutes les variables entre

$$\Phi \equiv 0, \quad X \equiv 0, \quad Y \equiv 0, \quad Z \equiv 0, \quad \text{etc.} \ldots\ldots [\text{mod. } p]$$

on obtiendra une congruence de condition entre les coefficients de $\Phi \equiv 0$; c'est-à-dire qu'au lieu d'avoir une équation de condition de la forme $F = 0$ comme pour les équations, on aura la congruence $F \equiv 0 \ [\text{mod. } p]$; et la fonction des coefficients, qui aurait dû être zéro dans le premier cas, devra être divisible par p dans le second.

Lorsque p est un nombre premier, le problème se simplifie beaucoup ; car, par le théorème de Fermat que nous avons démontré, on a

$$\begin{aligned} x(x-1)(x-2) \ldots\ldots (x-[p-1]) &\equiv x^p - x \equiv 0, [\text{mod } p] \\ y(y-1)(y-2) \ldots\ldots (y-[p-1]) &\equiv y^p - y \equiv 0, [\text{mod. } p] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ etc.} \end{aligned}$$

et il faudra seulement éliminer les inconnues entre les congruences

$$\Phi \equiv 0, \ x^p - x \equiv 0, \ y^p - y \equiv 0, \ z^p - z \equiv 0, \text{ etc.} \ldots\ldots [\text{mod. } p].$$

Soit proposée, par exemple, la congruence

$$ax - b \equiv 0, \qquad [\text{mod. } p] \tag{5}$$

dans laquelle $a, b, p,$ sont des nombres entiers quelconques, et a et p sont premiers entre eux ; si l'on fait $x = bz,$ on aura la congruence

$$az - 1 \equiv 0, \qquad [\text{mod. } p]$$

qui étant résolue, l'autre (5) le sera aussi. Supposons

$$p \equiv p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots\ldots p_n,$$

en indiquant par p_1, p_2, p_3, ... p_n, tous les facteurs premiers de p, égaux ou inégaux: si l'on représente par p_r l'un quelconque de ces nombres premiers, pour résoudre la congruence

$$az - 1 \equiv 0, \qquad [\text{mod.}\, p]$$

il faudra éliminer z entre celle-ci et la suivante

$$z^{p_r} - z \equiv 0, \qquad [\text{mod.}\, p]$$

qui équivaut à

$$a^{p_r} z^{p_r} - az \equiv az(a^{p_r-1} z^{p_r-1} - 1) \equiv 0, \ [\text{mod.}\, p],$$

puisque, par supposition, a n'est pas divisible par p_r: à présent comme en divisant $a^{p_r} z^{p_r} - az$ par $az-1$, on a un quotient exact, la congruence de condition $F \equiv 0 \ [\text{mod.}\, p_r]$ sera identiquement zéro dans ce cas, et la congruence $az - 1 \equiv 0 \ [\text{mod.}\, p_r]$ pourra toujours être résolue par une valeur de z, que nous indiquerons par z_r. Il est clair que cette démonstration est indépendante de la valeur de p_r, et que par conséquent l'on aura

$$\begin{aligned}
az_1 - 1 &\equiv 0, && [\text{mod.}\, p_1] \\
az_2 - 1 &\equiv 0, && [\text{mod.}\, p_2] \\
az_3 - 1 &\equiv 0, && [\text{mod.}\, p_3] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
az_n - 1 &\equiv 0, && [\text{mod.}\, p_n]
\end{aligned}$$

et partant (en faisant les produits des premiers membres et des modules)

$$Z \equiv (az_1 - 1)(az_2 - 1)(az_3 - 1) \ldots (az_n - 1) \equiv 0, \quad [\text{mod.}\, p_1 . p_2 . p_3 \ldots p_n].$$

Si le nombre des facteurs est impair, on pourra toujours supposer

$$Z \equiv az - 1 \equiv 0, \qquad [\text{mod.}\, p]$$

et si ces facteurs sont en nombre pair, on pourra multiplier z par le facteur indéterminé $az_{n+1}-1$, et l'on aura encore

$$Z(az_{n+1}-1) \equiv aZ_1 - 1 \equiv 0, \qquad [\text{mod.}p].$$

D'où il résulte que la congruence

$$az - 1 \equiv 0, \qquad [\text{mod.}p]$$

et par suite celle-ci

$$ax - b \equiv 0, \qquad [\text{mod.}p.]$$

est toujours résoluble, si a et p sont premiers entre eux.

L'on voit aisément que dans tous les cas une solution de la congruence proposée

$$ax - b \equiv 0, \qquad [\text{mod.}p_1.p_2.p_3 \ldots p_n]$$

sera donnée par la formule

$$\frac{x}{b} = \frac{(a-1)(a^{p_1-1}-1)^2(a^{p_2-1}-1)^2 \ldots (a^{p_n-1}-1)^2 + 1}{a},$$

qui exprimera l'une des racines de l'équation indéterminée

$$ax - b - py = 0.$$

Étant proposée la congruence

$$x^2 + 1 \equiv 0, \qquad [\text{mod. } 2p+1]$$

dans laquelle $2p+1$ est un nombre premier; pour savoir si elle est résoluble, on devra éliminer x entre celle-ci et l'autre

$$x^{2p} - 1 \equiv 0, \qquad [\text{mod. } 2p+1]$$

et l'on obtiendra la congruence de condition

$$(-1)^p - 1 \equiv 0, \qquad [\text{mod. } 2p+1]$$

qui sera toujours satisfaite lorsque p est pair, et qui sera im-

possible dans le cas contraire. On déduit de là ces deux théorèmes connus : 1° que la congruence

$$x^2 + 1 \equiv 0, \qquad [\text{mod. } 4p + 1]$$

est toujours résoluble ; 2° que l'autre

$$x^2 + 1 \equiv 0, \qquad [\text{mod. } 4p + 3]$$

ne l'est pas : $4p + 1$ et $4p + 3$ étant deux nombres premiers.

De même pour la congruence

$$x^a - b \equiv 0, \qquad [\text{mod. } ap + 1]$$

dans laquelle $ap + 1$ est un nombre premier, on aurait la congruence de condition $b^p - 1 \equiv 0$, [mod $ap + 1$], comme on le savait déjà.

On voit de là comment il faudrait opérer dans tous les cas; mais il faut observer que puisque l'élimination entre les congruences se fait absolument de la même manière que pour les équations, étant proposées les congruences

$$\Phi(x, y, z \ldots \text{etc.}) \equiv 0, \qquad [\text{mod. } p]$$

$$x^p - x \equiv 0, \quad y^p - y \equiv 0, \quad z^p - z \equiv 0, \text{ etc. } [\text{mod. } p]$$

la congruence de condition s'obtiendra en éliminant toutes les inconnues entre les équations

$$\Phi(x, y, z, \ldots \text{etc.}) = 0, \tag{6}$$

$$x^p - x = 0, \quad y^p - y = 0, \quad z^p - z = 0, \text{etc.}$$

pourvu qu'au lieu de prendre l'équation de condition

$$F = 0,$$

qui en résulterait, on écrive

$$F \equiv 0, \qquad [\text{mod. } p.].$$

L'élimination entre les équations (6) peut s'effectuer avec les

méthodes connues, mais il faut observer qu'on obtiendra le même résultat si dans l'équation $\Phi(x, y, z, \ldots \text{ etc.}) = 0$, on substitue pour x, y, z, etc., leurs valeurs déduites des équations

$$(7) \qquad x^p - x = 0, \quad y^p - y = 0, \quad z^p - z = 0, \text{ etc.}$$

en faisant le produit de tous les polynomes de la même forme dans lesquels on a substitué successivement pour x, y, z, etc., les racines des équations (7), et puisque ces racines sont connues, et que l'on a

$$x = 0, \quad 1, \quad \cos\frac{2\pi}{p-1} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2\pi}{p-1}, \quad \text{etc.}$$

$$y = 0, \quad 1, \quad \cos\frac{2\pi}{p-1} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2\pi}{p-1}, \quad \text{etc.}$$

la congruence de condition sera (voyez la note III[e] à la fin de ce mémoire) :

$$\Sigma \log\{\Phi(e^{\frac{2x\pi\sqrt{-1}}{p-1}}, e^{\frac{2y\pi\sqrt{-1}}{p-1}}, e^{\frac{2z\pi\sqrt{-1}}{p-1}}, \ldots \text{etc.})$$
$$e$$
$$\times \Phi(0, e^{\frac{2y\pi\sqrt{-1}}{p-1}}, e^{\frac{2z\pi\sqrt{-1}}{p-1}} \ldots \text{etc.})\,\Phi(0, 0, e^{\frac{2z\pi\sqrt{-1}}{p-1}} \ldots \text{etc.})\text{etc.}\}$$
$$\equiv 0, \qquad [\text{mod. } p]$$

en intégrant entre les limites

$$x = y = z, \ldots \text{ etc.} = 0,$$
$$x = y = z, \ldots \text{ etc.} = p-1,$$

Cette formule montre déjà de quelle manière, en appliquant notre théorie générale des équations indéterminées aux congruences, on les réduit à dépendre des fonctions circulaires.

On en pourrait déduire quelques-uns des théorèmes connus sur les congruences; mais il serait très-difficile de donner une théorie complète de ce genre d'équations, en partant de cette congruence

de condition, parce que sa forme ne permet pas d'effectuer les intégrations qu'elle exigerait pour être appliquée. Nous allons exposer une autre formule plus générale, qui nous fournira directement tous les théorèmes connus sur les congruences des différents degrés, et plusieurs propositions nouvelles.

Étant donnée l'équation à une seule inconnue

$$x^m - 1 = 0, \tag{8}$$

si l'on représente par

$$P_n, \quad P_{n-m}, \quad P_{n-2m}, \text{ etc.}$$

la somme des puissances

$$n^{mes}, \quad (n-m)^{mes}, \quad (n-2m)^{mes}, \text{ etc.}$$

on aura

$$P_n = P_{n-m} = P_{n-2m}, \ldots = P_{n-am} \ldots \text{ etc.}$$

de sorte que si n est un multiple de m on obtiendra $P_n = m$, et dans le cas contraire on trouvera $P_n = 0$.

En exprimant les racines de l'équation (5) en fonctions circulaires, on aura

$$P_n = \left(\cos\frac{0\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{0\pi}{m}\right)^n + \left(\cos\frac{2\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m}\right)^n \ldots$$
$$+ \left(\cos 2\frac{(m-1)}{m} + \sqrt{-1}\sin 2\frac{(m-1)}{m}\pi\right)^n,$$

et en réduisant les exposants à des multiples de l'arc, et négligeant les imaginaires, on obtiendra

$$P_n = \cos\frac{0n\pi}{m} + \cos\frac{2n\pi}{m} + \cos\frac{4n\pi}{m} \ldots + \cos 2\frac{(m-1)}{m}n\pi$$
$$= \sum_{x=0}^{x=m} \cos 2\frac{nx\pi}{m} = \frac{\sin 2\left(n - \frac{n}{2m}\right)\pi + \sin\frac{n\pi}{m}}{2\sin\frac{n\pi}{m}}$$

Il est clair, d'après ce que nous venons de dire, que si l'on prend

successivement la somme des puissances n^{mes}, des racines des équations

$$x - 1 = 0,\ x^2 - 1 = 0,\ x^3 - 1 = 0,\ \ldots\ x^m - 1 = 0 :$$

on aura la somme des diviseurs de n compris dans la série des nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots\ldots\ m,$$

et que pour avoir cette somme il faudra prendre l'intégrale

$$\Sigma\ \frac{\sin 2\left(n - \frac{n}{2\pi}\right)\pi\ +\ \sin\frac{n\pi}{x}}{2\ \sin\frac{nx}{x}}$$

entre les limites $x = 1$, $x = m + 1$; ou bien celle-ci $\Sigma \cos 2\frac{ny\pi}{x}$ entre les limites

$$y = 0,\quad y = x,\quad x = 1,\quad x = m + 1.$$

On trouverait de même que pour avoir le nombre des diviseurs de n compris dans la série des nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \ldots\ m;$$

il faut intégrer la formule $\Sigma\frac{1}{\iota}\cos 2\frac{ny\pi}{\iota}$ entre les limites

$$y = 0,\quad y = x,$$

$$x = 1,\quad x = m + 1.$$

Si l'on voulait la somme ou le nombre de tous les diviseurs de n; en représentant par $f(n)$ la première, et par $\delta(n)$ la seconde de ces fonctions, on aurait

$$\Sigma \cos 2\frac{ny\pi}{x} = f(n),$$

$$\Sigma \frac{1}{x} \cos 2\frac{ny\pi}{x} = \delta(n),$$

où il faut intégrer entre les limites

$$y = 0,\ y = x,\ x = 1;\ x = n + 1.$$

On sait que lorsque n est un nombre premier, on a

$$f(n) = n + 1, \quad \delta(n) = 2:$$

on aura par conséquent, en changeant les limites des intégrales, les deux équations

$$\Sigma \cos 2\frac{ny\pi}{x} = 1, \quad \Sigma \frac{1}{x} \cos 2\frac{ny\pi}{x} = 1,$$

(en intégrant entre les limites $y = 0$, $y = x$, $x = 1$, $x = n$) qui renferment deux propriétés spéciales des nombres premiers.

On a vu que n et m étant deux nombres entiers, la formule

$$(9) \qquad \frac{\sin 2\left(n - \frac{n}{2m}\right)\pi + \sin\frac{n\pi}{m}}{2\sin\frac{n\pi}{m}}$$

a pour valeur m, si n est divisible par m, et qu'elle se réduit à zéro si cette condition n'est pas remplie. Nous avons démontré de plus que p étant un nombre entier, l'expression

$$\frac{1.2.3.\ldots\ldots(p-1)+1}{p}$$

ne peut se réduire à un nombre entier que lorsque p est un nombre premier : en faisant donc

$$p = m; \quad 1.2.3.\ldots\ldots(p-1)+1 = n,$$

dans la formule (9) elle se transformera en celle-ci

$$\frac{\sin 2\left(1.2.3\ldots(p-1)+1-\frac{1.2.3\ldots(p-1)+1}{2p}\right)\pi+\sin\frac{(1.2.3\ldots(p-1)+1)\pi}{2p}}{2\sin\frac{(1.2.3\ldots(p-1)+1)\pi}{2p}}$$

qui devient p lorsque p est un nombre premier, et qui se réduit à zéro quand p est un nombre composé. Ainsi cette formule représente exclusivement tous les nombres premiers.

On pourrait varier beaucoup ces formules et les appliquer aux séries et à d'autres recherches, mais ce n'est pas ici le lieu de nous arrêter sur ce sujet.

Puisque la formule

$$\frac{1}{m}\left\{\left(\cos\frac{0\pi}{m}+\sqrt{-1}\,\frac{0\pi}{m}\right)^n+\left(\cos\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m}\right)^n\ldots.\right.$$
$$\left.+\left(\cos\frac{2(m-1)}{m}\pi+\sqrt{-1}\,\sin\,\frac{2(m-1)\pi}{m}\right)^n\right\}$$

a pour valeur l'unité ou zéro, selon que $\frac{n}{m}$ est un nombre entier ou fractionnaire, il s'ensuit que si l'on veut connaître le nombre des racines inégales de la congruence

$$\Phi(x, y, z, \ldots. \text{ etc.}) \equiv 0, \qquad [\text{mod. } m]$$

dans laquelle on considère pour x, y, z, etc., les valeurs

$$\begin{aligned} x &= 0, 1, 2, 3\ldots.. && (a-1),\\ y &= 0, 1, 2, 3\ldots.. && (b-1),\\ z &= 0, 1, 2, 3\ldots.. && (c-1),\\ &\ldots.. && \text{etc.} \end{aligned}$$

il faudra intégrer la formule

$$\frac{1}{m}\Sigma\left\{\left(\cos\frac{0\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{0\pi}{m}\right)^{\varphi(x,y,z\ldots\ldots\text{etc.})}\right.$$
$$+\left(\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m}\right)^{\varphi(x,y,z\ldots\ldots\text{etc.})}\quad\ldots\ldots$$
$$\left.+\left(\cos\frac{2(m-1)}{m}\pi+\sqrt{-1}\sin\frac{2(m-1)}{m}\pi\right)^{\varphi(x,y,z\ldots\ldots\text{etc.})}\right\}$$

entre les limites

$$x=0,\ x=a;\ y=0,\ y=b;\ z=0,\ z=c;\ \text{etc.}$$

Cette formule est très-générale et peut servir, dans plusieurs cas, à déterminer sous forme finie la valeur de l'intégrale

$$\Sigma\, e^{a\varphi(x,y,z.\,\text{etc.})\pi\sqrt{-1}}$$

comme nous le montrerons dans une autre occasion.

De même, la somme des racines de la congruence proposée sera exprimée par l'intégrale

$$\frac{1}{m}\Sigma\,(x,y,z\ldots\ldots\text{etc.})\left\{\left(\cos\frac{0\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{0\pi}{m}\right)^{\varphi(x,y,z\ldots\text{etc.})}\right.$$
$$+\left(\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m}\right)^{\varphi(x,y,z\ldots\ldots\text{etc.})}\quad\ldots\ldots$$
$$\left.\left(\cos\frac{2(m-1)}{m}\pi+\sqrt{-1}\sin\frac{2(m-1)}{m}\pi\right)^{\varphi(x,y,z\ldots\ldots\text{etc.})}\right\}$$

où il faudra intégrer entre les mêmes limites qu'auparavant.

On pourrait trouver beaucoup d'autres formules semblables, mais celles-ci sont suffisantes pour notre but : elles sont même trop générales, et il faudra les particulariser pour les appliquer avec facilité.

Nous observerons d'abord que, pour avoir toutes les solutions de la congruence

$$\Phi\,(x,y,z\ldots\ldots\text{etc.})\equiv 0,\qquad[\text{mod. }m]$$

il suffira de considérer celles qui sont comprises entre les limites

$$x = y = z \ldots\ldots = 0,$$
$$x = y = z \ldots\ldots = m,$$

puisque les autres s'en déduiront avec facilité ; et ensuite que les imaginaires devant se détruire entre elles, on pourra considérer l'intégrale

$$(10) \qquad N = \frac{1}{m} \Sigma \left\{ \cos \frac{0\pi}{m} + \cos \frac{2\varphi(x, y, z \ldots\ldots \text{etc.})}{m} \pi \ldots\ldots + \cos 2 \frac{(m-1)\varphi(x, y, z \ldots\ldots \text{etc.})\pi}{m} \right\}$$

prise entre les limites

$$x = y = z \ldots\ldots = 0,$$
$$x = y = z \ldots\ldots = m.$$

Si l'on veut, par exemple, le nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$ax + b - cy = 0,$$

qui est équivalente à la congruence

$$ax + b \equiv 0 \qquad [\text{mod. } c],$$

il faudra prendre l'intégrale

$$(11) \qquad \frac{1}{c} \Sigma \left\{ \cos \frac{0\pi}{c} + \cos \frac{2(ax-b)\pi}{c} + \cos \frac{4(ax+b)\pi}{c} \ldots\ldots + \cos \frac{A(ax+b)\pi}{c} \ldots\ldots + \cos \frac{2(c-1)(ax+b)\pi}{c} \right\}$$

entre les limites

$$x = 0, \quad x = c.$$

En considérant le terme général, on aura l'équation

$$\frac{1}{c}\Sigma \cos \frac{A(ax+b)\pi}{c}$$
$$= \frac{\sin \frac{A}{c}\left(b+ac-\frac{1}{2}a\right)\pi \quad - \sin \frac{A}{c}\left(b-\frac{1}{2}a\right)\pi}{2\,c \sin \frac{A}{2c}\pi}$$

dans le premier membre de laquelle le numérateur est toujours zéro, mais dont le dénominateur ne peut se réduire à zéro que lorsque a et c ont un diviseur commun plus grand que l'unité, puisque A est toujours plus petit que $2\,c$.

Il résulte de là que si a et c sont premiers entre eux, tous les termes de la formule (11) se détruiront, moins le premier dont la valeur se réduira à

$$\frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c} \cos\, 0\, x\pi = \frac{c}{c} = 1.$$

Mais lorsque $a = mg$, $c = ng$,
on fera $A = 2n$, et on obtiendra

$$\frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c} \cos \frac{2n(ax+b)\pi}{c}$$
$$= \frac{\sin \frac{2n}{c}\left(b+ac-\frac{1}{2}a\right)\pi - \sin \frac{2n}{c}\left(b-\frac{1}{2}a\right)\pi}{2c \sin \frac{na\pi}{c}}$$
$$= \frac{\sin \frac{ba+ng-\frac{1}{2}a)\pi}{g} - \sin \frac{2(b-\frac{1}{2}a)\pi}{g}}{2\,c \sin \frac{a\pi}{g}}$$

Cette formule se réduit à $\frac{0}{0}$, lorsque $a = mg$; on devra donc différencier par rapport à a, pour en avoir la valeur déterminée, et on trouvera

$$\frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c}\cos\frac{2n(b+ax)\pi}{c}$$

$$=\frac{2\left(ng-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{g}\cos 2\left(b+ng a-\frac{1}{2}a\right)\frac{\pi}{g}+\frac{\pi}{g}\cos\frac{2\left(b-\frac{1}{2}a\right)\pi}{g}}{\frac{2c\pi}{g}\cos\frac{a\pi}{g}}$$

$$=\frac{2\,ng\pi\cos\frac{2\left(b-\frac{1}{2}a\right)\pi}{g}}{2c\pi\cos a\,\frac{\pi}{g}}$$

$$=\frac{2\,c\pi\cos\frac{2b\pi}{g}.\cos m\pi+2c\pi\sin\frac{2b\pi}{g}\sin m\pi}{2c\pi\cos\frac{a\pi}{g}}=\cos\frac{2b\pi}{g}.$$

Mais puisque le nombre n est compris, $g-1$ fait dans $c-1$, la valeur de l'intégrale (11) sera (dans le cas que a et c aient un plus grand commun diviseur g) exprimée par la série

$$1+\cos\frac{2b\pi}{g}\cos\frac{4b\pi}{g}.....+\cos 2b\,\frac{(g-1)\pi}{g}$$

$$=\frac{\sin 2\left(b-\frac{1}{2}\,\frac{b}{g}\right)\pi+\sin\frac{b\pi}{g}}{2\sin\frac{b\pi}{g}}$$

dont la somme est égale à zéro, lorsque b n'est pas divisible par g, et qui a pour valeur g, lorsque $\frac{b}{g}$ est un nombre entier.

On tire de là

1° que la congruence

$$ax+b\equiv 0 \qquad [\text{mod. } c]$$

a toujours une solution positive, entière et plus petite que c, lorsque a et c n'ont d'autre commun diviseur que l'unité.

2° Que si a et c ont un commun diviseur g, qui ne divise point b, cette congruence ne pourra pas être résolue.

3° Que si $\frac{b}{g}$ est un nombre entier, on trouvera un nombre g de valeurs de x entières, positives, et plus petites que c, qui satisferont à la congruence proposée.

Il est clair que ces mêmes conditions s'appliquent à l'équation indéterminée

$$ax + b - cy = 0. \tag{12}$$

On a déjà vu que l'intégrale indéfinie

$$\frac{1}{c}\Sigma x \left\{\cos\frac{0\pi}{c} + \cos 2\frac{(ax+b)\pi}{c} + \cos 4\frac{(ax+b)\pi}{c} \ldots\ldots \right.$$
$$\left. + \cos 2A\frac{(ax+b)\pi}{c} \ldots\ldots + \cos 2\frac{(c-1)(ax+b)\pi}{c}\right\}$$

exprime la somme de toutes les valeurs entières et positives de x qui satisfont à la congruence

$$ax + b \equiv 0, \qquad [\bmod c], \tag{13}$$

lorsqu'elle est résoluble, et que la valeur de l'intégrale (12) se réduit à zéro, si la congruence (13) n'est pas résoluble. En considérant le terme général

$$\frac{1}{c}\Sigma x \cos 2A\frac{(ax+b)\varpi}{c}$$

on aura pour les formules connues d'intégration

$$\Sigma x \cos 2A\frac{(ax+b)\pi}{c} \tag{14}$$
$$= \frac{(x-1)\sin 2A\frac{(ax+b-\frac{1}{2}a)\pi}{c} + \sin 2A\frac{(b-\frac{1}{2}a)}{c}\pi}{2c\sin 2A\frac{a\pi}{2c}}$$
$$+ \frac{\cos 2A\frac{(ax+b-a)\pi}{c} - \cos 2A\frac{(b-a)\pi}{c}}{c\left(2\sin 2\frac{Aa\pi}{2c}\right)^2}$$

et, pour avoir la somme des racines, il faudra intégrer cette formule depuis $A = 0$, jusqu'à $A = c$.

A présent nous savons d'avance que si a et c ont un facteur commun qui ne divise point b, la congruence (13) n'est pas résoluble; et comme si ce facteur commun divise b aussi, on pourra toujours l'ôter, on supposera que a, b et c n'ont point de commun diviseur: alors, en donnant à A successivement toutes les valeurs

$$A = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots c - 1,$$

le premier terme se présenterait sous la forme $\frac{0}{0}$, et les autres auraient tous une valeur déterminée; mais pour éviter l'indétermination du premier terme, on l'intégrera séparément, et l'on aura

$$\frac{1}{c}\Sigma x \cos 0 \frac{(ax+b)\pi}{c} = \frac{1}{c}\Sigma x = \frac{c(c-1)}{2c}$$

et l'on intégrera entre les limites

$$A = 1, \quad A = c;$$

cela peut se faire d'abord par les tables des sinus et cosinus, en calculant successivement les fonctions qui se rapportent aux valeurs

$$A = 1, \quad A = 2, \quad A = 3, \ldots\ldots \quad A = c - 1;$$

et l'on aura, de cette manière, résolu complétement le problème: mais, pour obtenir plus de généralité, on pourra, au moyen des expressions connues, transformer les cosinus et les sinus des multiples de l'arc en puissances des fonctions semblables de l'arc simple, et l'on aura une formule générale qui exprimera la somme cherchée.

Si l'on voulait la plus petite des solutions entières et positives de la congruence

$$ax + b \equiv 0, \qquad [\text{mod. } c]$$

il faudrait faire dans la formule (14) $x = c$, et elle deviendrait après les réductions

$$\frac{\sin \frac{2A}{c}\left(b - \frac{1}{2}a\right)\pi}{2 \sin \frac{Aa\pi}{c}}$$

et partant, la plus petite valeur de $x = \delta$, qui satisfait à la congruence proposée, sera donnée par la formule

$$\delta = \frac{c-1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{u=c} \frac{\sin 2\left(b - \frac{1}{2}a\right)\frac{u\pi}{c}}{\sin \frac{au\pi}{c}},$$

et toutes les autres valeurs seront exprimées par la formule

$$x = \delta + cz,$$

dans laquelle z est un nombre entier quelconque.

Nous nous sommes arrêté sur ce problème, parce que les formules que nous avons trouvées offrent le premier exemple de l'expression analytique de la racine d'une équation indéterminée en fonction de ses coefficients. On sait qu'avec les méthodes connues on ne peut trouver les racines, même dans les cas les plus simples, que lorsque les coefficients sont donnés en nombre.

On pourrait multiplier beaucoup ces formules et en déduire la valeur finie de plusieurs intégrales définies aux différences et aux différentielles, assez difficiles à obtenir par d'autres voies; mais ce que nous avons dit ici suffit pour montrer l'esprit de notre méthode, et nous allons passer à des questions d'un ordre plus élevé. — Cependant, avant de traiter des congruences du second degré, nous indiquerons quelques propriétés élémentaires, déjà connues, des résidus quadratiques, que nous pourrions déduire de nos formules, mais dont, pour abréger, nous omettons la démonstration.

1° Si n est un nombre premier, en élevant successivement au carré tous les nombres

$$1,\ 2,\ 3 \ldots\ldots (n-1),$$

et divisant par n, on aura $\frac{n-1}{2}$ résidus quadratiques différents, répétés chacun deux fois, et il restera, dans la série des nombres naturels, $\frac{n-1}{2}$ nombres qui seront non-résidus.

2° Si l'on fait $n=2p+1$, et que l'on représente par

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ a_u,\ \ldots\ldots\ a_p,$$

les p résidus, et par

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ldots\ b_u,\ \ldots\ldots\ b_p,$$

les p non-résidus, on aura

$$\Sigma \cos \frac{2a_u\pi}{n} + \Sigma \cos \frac{2b_u\pi}{n} = \Sigma \cos \frac{2y\pi}{n},$$
$$\Sigma \cos \frac{2x^2\pi}{n} = 2\ \Sigma \cos \frac{2a_u\pi}{n},$$

en intégrant entre les limites

$$u=1,\ u=p+1;\ y=1,\ y=n;\ x=1,\ x=n.$$

En multipliant un résidu quelconque a_r par tous les autres, on aura la série

$$a_r\,a_1,\ a_r\,a_2,\ a_r\,a_3,\ \ldots\ldots\ a_r\,a_p,$$

qui donnera de nouveau tous les résidus disposés dans un autre ordre, et par conséquent l'on aura

$$\Sigma \cos \frac{2a_r x^2\pi}{n} = 2\Sigma \cos \frac{a_r a_u \pi}{n} = 2\Sigma \cos \frac{2a_u\pi}{n}.$$

En multipliant un résidu quelconque a_r par tous les non-résidus

$$b_1,\ b_2,\ b_n,\ \ldots\ldots\ b_p,$$

on aura de nouveau tous les non-résidus, d'où l'on déduira

$$\Sigma \cos \frac{2a_r b_u \pi}{n} = \Sigma \cos 2 \frac{b_u \pi}{n}.$$

En multipliant le non-résidu b_r par tous les autres, on aura tous les résidus, ce qui donnera

$$\Sigma \cos 2 \frac{b_r b_u \pi}{n} = \Sigma \cos 2 \frac{a_u \pi}{n}.$$

En multipliant enfin le non-résidu b_r par tous les résidus, on aura tous les non-résidus; ce qui fournira l'équation

$$\Sigma \cos 2 \frac{b_r a_u \pi}{n} = \Sigma \cos 2 \frac{b_u \pi}{n}.$$

Si on élève au carré tous les nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ (n-1),$$

et qu'on les multiplie par un résidu quelconque a_r, on aura (en rejetant les multiples de n) la série des résidus

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ a_p$$

répétée deux fois, et par suite

$$\Sigma \cos 2 \frac{a_r\ x^2 \pi}{n} = 2 \Sigma \cos \frac{2a_u \pi}{n};$$

et si l'on multiplie ces $n-1$ carrés par un non-résidu quelconque b_p, on aura la série des non-résidus

$$b_1,\ b_2,\ b_n,\ \ldots\ldots\ b_p$$

répétée deux fois, d'où l'on tirera

$$\Sigma \cos \frac{2b_r x^2 \pi}{n} = 2 \Sigma \cos \frac{2b_u \pi}{n}$$

Dans toutes ces équations il faut intégrer entre les limites

$$u = 1, \quad u = p + 1, \quad x = 1, x = n,$$

et il est clair qu'elles subsisteraient de même si l'on changeait les cosinus en sinus.

Si l'on représente par N le nombre des solutions de la congruence

$$x^2 + c \equiv 0, \qquad [\text{mod. } n]$$

(et ce nombre par ce que nous avons dit ailleurs ne peut qu'être zéro ou deux), n étant toujours un nombre premier, on aura l'équation

$$n\,\mathrm{N} = \Sigma \cos 0 \left(\frac{x^2+c}{n}\right)\pi + \Sigma \cos 2\left(\frac{x^2+c}{n}\right)\pi + \Sigma \cos 4\left(\frac{x^2+c}{n}\right)\pi$$
$$\ldots + \Sigma \cos 2\left(\frac{n-1}{n}\right)(x^2+c)\,\pi = \Sigma \cos 2y\left(\frac{x^2+c}{n}\right)\pi$$

en intégrant entre les limites

$$x = 0, \quad x = n, \quad y = 0, \quad y = n,$$

ou bien celle-ci

$$n\,\mathrm{N} = n + \Sigma \cos 2 \frac{cy\pi}{n} + \Sigma \cos 2y \left(\frac{x^2 + c}{n}\right)\pi$$

où il faut intégrer entre les limites

$$y = 1, \quad y = n, \quad x = 1, \quad x = n.$$

En développant les cosinus par les formules connues, on aura

$$n\,\mathrm{N} = n + \Sigma \cos 2 \frac{cy\pi}{n}$$
$$+ \Sigma \left(\cos \frac{2yx^2}{n} \cos 2 \frac{cy\pi}{n} - \sin 2 \frac{yx^2\pi}{n} \sin \frac{2cy\pi}{n} \right).$$

A présent, il est clair, par ce que nous avons dit, que dans la valeur de cette intégrale on peut mettre au lieu de la série

$$1, 2, 3, \ldots\ldots n-1,$$

représentée par y, les deux autres

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_p; \quad b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots b_p;$$

et l'on aura après la substitution

$$n\,\mathrm{N} = \Sigma\left(\cos 2a_u x^2\pi \cdot \cos 2\frac{cu_u\pi}{n} + \cos 2\frac{b_u x^2\pi}{n} + \cos 2\frac{cb_u\pi}{n} - \sin 2\frac{a_u x^2\pi}{n}\sin 2\frac{cu_u\pi}{n} - \sin\frac{2b_u x^2\pi}{n}\sin\frac{2c_u\pi}{n}\right) + n + \Sigma\cos\frac{2cy\pi}{n}$$

où il faudra intégrer entre les limites

$$x = 1,\ x = n,\ u = 1,\ u = p+1,\ y = 1,\ y = n.$$

En observant que

$$\sum_{y=1}^{y=n}\cos\frac{2y\pi}{n} = -1,$$

et en séparant les intégrales on obtiendra

$$n\,\mathrm{N} = \Sigma\left(\cos 2\frac{ca_u\pi}{n}\cdot\Sigma\cos 2\frac{a_u x^2\pi}{n}\right) + \Sigma\left(\cos 2\frac{cb_u\pi}{n}\cdot\Sigma\cos 2b_u\frac{x^2\pi}{n}\right) - \Sigma\left(\sin 2\frac{cu_u\pi}{n}\cdot\Sigma\sin 2\frac{a_u x^2\pi}{n}\right) - \Sigma\left(\sin 2\frac{cb_u\pi}{n}\cdot\Sigma\sin 2\frac{b_u x^2\pi}{n}\right) + n - 1,$$

ou il faudra intégrer d'abord entre les limites $x = 1$, $x = n$, et puis entre les limites $u = 1$, $u = p+1$.

A présent comme l'on a en général les équations

$$\Sigma \cos 2\frac{a_u x^2\pi}{n} = 2\,\Sigma \cos 2\frac{a_u\pi}{n},$$

$$\Sigma \cos 2\frac{b_u x^2\pi}{n} = 2\,\Sigma \cos 2\frac{b_u\pi}{n},$$

dans le premier membre desquelles il faut intégrer entre les limites

$$x = 1,\ x = n,$$

tandis que dans le second membre il faut intégrer entre les limites

$$u = 1,\ u = p + 1,$$

et que ces intégrales sont définies, elles deviendront égales à des constantes : la variable n disparaîtra, et on pourra les transporter en dehors du premier Σ. On aura alors, en répétant le même raisonnement pour les sinus,

$$\begin{aligned}(15)\quad N\,n = {} & 2\,\Sigma \cos 2\frac{ca_u\pi}{n}\,.\,\Sigma \cos 2\frac{a_u\pi}{n} \\ & + 2\,\Sigma \cos 2\frac{cb_u\pi}{n}\,.\,\Sigma \cos 2\frac{cbu\pi}{n} \\ & - 2\,\Sigma \sin 2\frac{a_u\pi}{n}\,.\,\Sigma \sin 2\frac{ca_u\pi}{n} \\ & - 2\,\Sigma \sin\frac{2b_u\pi}{n}\,.\,\Sigma \sin 2\frac{ca_u\pi}{n} + n - 1,\end{aligned}$$

et cette équation devra exister en même temps que les suivantes

$$(16)\quad \Sigma \cos 2\frac{a_u\pi}{n} + \Sigma \cos 2\frac{b_u\pi}{n} = \Sigma \cos\frac{2y\pi}{n} = -1,$$

$$\Sigma \sin 2\frac{a_u\pi}{n} + \Sigma \sin 2\frac{b_u\pi}{n} = \Sigma \sin\frac{2y\pi}{n} = 0,$$

en intégrant entre les limites

$$u = 1,\ u = p + 1,\ y = 1,\ y = n.$$

A présent supposons $c \equiv \pm 1$, $n \equiv 4m + 1$, et nous aurons deux solutions pour chacune des deux congruences

$$x^2 + 1 \equiv 0, \quad x^2 - 1 \equiv 0, \qquad [\text{mod. } n]$$

N sera égal à 2, et l'équation (15) se transformera en celle-ci

$$(17)\quad 2n = 2\left(\Sigma \cos 2\frac{a_u\pi}{n}\right)^2 + 2\left(\Sigma \cos 2\frac{b_u\pi}{n}\right)^2 \pm\left[\left(\Sigma \sin 2\frac{a_u\pi}{n}\right)^2 + 2\left(\Sigma \sin 2\frac{b_u\pi}{n}\right)^2\right] + n - 1,$$

d'où l'on tire, à cause du double signe,

$$\left(\Sigma \sin 2\frac{a_u\pi}{n}\right)^2 + \left(\Sigma \sin 2\frac{b_u\pi}{n}\right)^2 = 0,$$

$$n + 1 = 2\left(\Sigma \cos 2\frac{a_u\pi}{n}\right)^2 + 2\left(\Sigma \cos 2\frac{b_u\pi}{n}\right)^2,$$

et puisque l'on a

$$\left(\Sigma \cos 2\frac{b_u\pi}{n}\right)^2 = \left(\Sigma \cos 2\frac{a_u\pi}{n} + 1\right)^2,$$

l'équation (17) deviendra

$$n + 1 = 4\left(\Sigma \cos 2\frac{a_u\pi}{n}\right)^2 + 4\Sigma \cos 2\frac{a_u\pi}{n} + 2,$$

$$n = \left(2\Sigma \cos 2\frac{a_u\pi}{n} + 1\right)^2.$$

On tirera des équations précédentes

$$(18)\quad \Sigma \cos 2\frac{a_u\pi}{n} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{n},$$

$$\Sigma \cos 2\frac{b_u\pi}{n} = -\tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{n},$$

$$\Sigma \sin \frac{a_u\pi}{n} = 0, \quad \Sigma \sin \frac{b_u\pi}{n} = 0.$$

Lorsque n est de la forme $4m + 3$, si l'on fait $c \equiv \pm 1$, la

congruence $x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ a deux solutions; mais l'autre $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ n'est pas résoluble, alors on aura les deux équations

$$0 = n - 1 + 2\left(\Sigma \cos \frac{2a_u\pi}{n}\right)^2 + 2\left(\Sigma \cos 2\frac{b_u\pi}{n}\right)^2$$
$$- 2\left(\Sigma \sin 2\frac{a_u\pi}{n}\right)^2 - 2\left(\Sigma \sin 2\frac{b_u\pi}{n}\right)^2$$
$$2n = n - 1 + 2\left(\Sigma \cos 2\frac{a_u\pi}{n}\right)^2 + 2\left(\Sigma \cos 2\frac{b_u\pi}{n}\right)^2$$
$$+ 2\left(\Sigma \sin \frac{2a_u\pi}{n}\right)^2 + 2\left(\Sigma \sin 2\frac{d_u\pi}{n}\right)^2,$$

d'où l'on déduira en les combinant avec les deux équations (16

$$(18\ bis)\quad \Sigma \cos 2\frac{a_u\pi}{n} = -\tfrac{1}{2};\ \Sigma \sin \frac{2a_u\pi}{n} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{n},$$
$$\Sigma \cos 2\frac{b_u\pi}{n} = -\tfrac{1}{2};\ \Sigma \sin \frac{2b_u\pi}{n} = \mp\tfrac{1}{2}\sqrt{n},$$

en intégrant partout entre les limites

$$u = 1,\ u = p + 1 = \frac{n-1}{2} + 1.$$

Ces sommations remarquables ont été données pour la première fois par M. Gauss dans ses Recherches arithmétiques, où il les a déduites de sa théorie de la division du cercle, et cet illustre auteur les a trouvées si intéressantes, qu'il a repris ce sujet dans un mémoire particulier pour les démontrer de nouveau. Mais les deux démonstrations que M. Gauss a données (les seules qui soient connues jusqu'à présent) sont très-longues et sont la conséquence des artifices particuliers dont cet illustre auteur s'est servi, sans dériver d'une méthode directe; au lieu que la manière dont nous y sommes parvenu est directe et très-générale, puisqu'elle peut conduire à beaucoup d'autres formules semblables. Cependant comme ces expressions renferment tout ce qu'on sait sur les congruences du second degré; nous allons reprendre, pour la simplifier, la démonstration que nous venons d'exposer.

Lorsque n est un nombre premier de la forme $4m + 1$, les deux congruences

$$x^2 + 1 \equiv 0, \quad x^2 - 1 \equiv 0, \qquad [\text{mod. } n]$$

seront résolubles et auront chacune deux solutions; alors on obtiendra l'équation

$$\begin{aligned}
2n = \Sigma \Big\{ &\Big(\cos\tfrac{0\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\tfrac{0\pi}{n}\Big)^{x^2\pm 1} \\
&+\Big(\cos\tfrac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\tfrac{2\pi}{n}\Big)^{x^2\pm 1} \ldots . \\
&\quad +\Big(\cos\tfrac{2t\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\tfrac{2t\pi}{n}\Big)^{x^2\pm 1} \ldots . \\
&\quad\quad +\Big(\cos\tfrac{2(n-1)}{n}\pi + \sqrt{-1}\sin\tfrac{2(n-1)}{n}\pi\Big)^{x^2\pm 1}\Big\} \\
= &\Big(\cos\tfrac{0\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\tfrac{0\pi}{n}\Big)\ \Sigma\Big(\cos\tfrac{0x^2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\tfrac{0x^2\pi}{n}\Big) \\
&+\Big(\cos\tfrac{2\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\tfrac{2\pi}{n}\Big)\ \Sigma\Big(\cos 2\tfrac{x^2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin 2\tfrac{x^2\pi}{n}\Big) \ldots . \\
+&\Big(\cos 2\tfrac{t\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin 2\tfrac{t\pi}{n}\Big)\ \Sigma\Big(\cos 2\tfrac{tx^2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin 2\tfrac{tx^2\pi}{n}\Big) \ldots . \\
&+\Big(\cos 2\tfrac{(n-1)}{n}\pi + \sqrt{-1}\sin 2\tfrac{(n-1)}{n}\pi\Big)\times \\
&\times\ \Sigma\Big(\cos 2\tfrac{(n-1)}{n}(x^2\pm 1)\pi + \sqrt{-1}\sin 2\tfrac{(n-1)}{n}(x^2\pm 1)\pi\Big)
\end{aligned}$$

dans laquelle il faudra intégrer entre les limites $x = 0$, $x = n$.

A présent, si l'on effectue les multiplications indiquées et que l'on observe que les quantités imaginaires doivent se détruire entre elles, on trouvera

$$\begin{aligned}
2n = &\cos\tfrac{0\pi}{n}\,\Sigma\cos\tfrac{0x^2\pi}{n} + \cos\tfrac{2\pi}{n}\,\Sigma\cos 2\tfrac{x^2\pi}{n} \ldots . \\
&+\cos 2\tfrac{t\pi}{n}\,\Sigma\cos 2\tfrac{tx^2\pi}{n} \ldots . + \cos 2\tfrac{(n-1)}{n}\pi\ \Sigma\cos 2\tfrac{(n-1)}{n}x^2\pi \\
&\mp\Big(\sin\tfrac{0\pi}{n}\ \Sigma\ \sin\tfrac{0x^2\pi}{n} + \sin\tfrac{2\pi}{n}\,\Sigma\sin 2\tfrac{x^2\pi}{n} \ldots . \\
&\quad + \sin 2\tfrac{t\pi}{n}\,\Sigma\sin 2\tfrac{tx^2\pi}{n} \ldots . + \sin 2\tfrac{(n-1)}{n}\,\Sigma\sin 2\tfrac{(n-1)}{n}x^2\pi\Big)
\end{aligned}$$

et par conséquent cette équation se décomposera dans les deux autres

$$2n = \cos\frac{0\pi}{n} \Sigma \cos\frac{0x^2\pi}{n} \ldots + \cos 2\frac{t\pi}{n} \Sigma \cos 2\frac{tx^2\pi}{n} \ldots$$

$$0 = \sin\frac{0\pi}{n} \Sigma \sin\frac{0x^2\pi}{n} \ldots + \sin 2\frac{t\pi}{n} \Sigma \sin 2\frac{tx^2\pi}{n} \ldots$$

Il faut observer ici qu'en laissant de côté le premier terme de chaque série, t doit prendre toutes les valeurs

$$1, 2, 3, \ldots\ldots n-1,$$

dont la moitié seront des résidus, et l'autre moitié des non-residus: si l'on suppose $t = a_r =$ à un résidu quelconque, on aura

$$\cos 2\frac{t\pi}{n} \Sigma \cos 2\frac{tx^2\pi}{n} = \cos 2\frac{a_r\pi}{n} \Sigma \cos 2\frac{a_r x^2\pi}{n}$$

$$= \cos 2\frac{a_r\pi}{n} \Sigma \cos 2\frac{x^2\pi}{n};$$

et l'on aura de même, si t est un non-résidu b_r,

$$\cos 2\frac{b_r\pi}{n} \Sigma \cos 2\frac{b_r x^2\pi}{n} = \cos 2\frac{b_r\pi}{n}\left(1 + 2\Sigma \cos 2\frac{b_u\pi}{n}\right)$$

en intégrant entre les limites

$$x = 0, \quad x = n, \quad u = 1, \quad u = 2m+1 = p+1;$$

on voit donc que la valeur de

$$\cos 2\frac{t\pi}{n} \Sigma \cos 2\frac{tx^2\pi}{n}$$

ne saurait être que l'une de celles-ci

$$\cos 2\frac{t\pi}{n}\left(1 + 2\Sigma \cos 2\frac{a_u\pi}{n}\right); \quad \left(1 + 2\Sigma \cos 2\frac{b_u\pi}{n}\right)\cos 2\frac{t\pi}{n};$$

et qu'elle dépendra du nombre t; à présent comme parmi les nombres

$$1, 2, 3, \ldots\ldots n-1,$$

représentés par t, il y en a $\frac{n-1}{2}$ qui sont résidus et autant qui ne le sont pas, on pourra les réunir en deux groupes, et on obtiendra

$$2n = n + \left(1 + 2\Sigma\cos 2\frac{a_u\pi}{n}\right)\left(\cos 2\frac{a_1\pi}{n} + \cos 2\frac{a_2\pi}{n} \ldots + \cos 2\frac{a_p\pi}{n}\right)$$
$$+ \left(1 + 2\Sigma\cos 2\frac{b_u\pi}{n}\right)\left(\cos 2\frac{b_1\pi}{n} \ldots + \cos 2\frac{b_p\pi}{n}\right)$$

$$0 = 2\Sigma\cos 2\frac{a_u\pi}{n}\left(\sin 2\frac{a_1\pi}{n} + \sin 2\frac{a_2\pi}{n} \ldots + \sin 2\frac{a_p\pi}{n}\right)$$
$$+ 2\Sigma\sin 2\frac{b_u\pi}{n}\left(\sin 2\frac{a_1\pi}{n} \ldots + \sin 2\frac{a_u\pi}{n} + \text{etc.}\right),$$

et comme on a

$$\cos 2\frac{a_1\pi}{n} + \cos 2\frac{a_2\pi}{n} + \cos 2\frac{a_3\pi}{n} \ldots + \text{etc.} = \Sigma\cos 2\frac{a_u\pi}{n},$$
$$\cos 2\frac{b_1\pi}{n} + \cos 2\frac{b_2\pi}{n} + \cos 2\frac{b_3\pi}{n} \ldots + \text{etc.} = \Sigma\cos 2\frac{b_u\pi}{n},$$

on trouvera

$$2n = n + \left(\Sigma\cos 2\frac{a_u\pi}{n}\right)\left(1 + 2\Sigma\cos 2\frac{a_u\pi}{n}\right)$$
$$+ \left(\Sigma\sin 2\frac{b_u\pi}{n}\right)\left(1 + 2\Sigma\sin 2\frac{b_u\pi}{n}\right)$$

$$0 = 2\left(\Sigma\sin 2\frac{a_u\pi}{n}\right)^2 + 2\left(\Sigma\sin 2\frac{b_u\pi}{n}\right)^2$$

et si pour abréger on pose

$$\Sigma\cos 2\frac{a_u\pi}{n} = \mathrm{C},\ \Sigma\cos 2\frac{b_u\pi}{n} = \mathrm{C}_n,$$
$$\Sigma\sin 2\frac{a_u\pi}{n} = \mathrm{S},\ \Sigma\sin 2\frac{b_u\pi}{n} = \mathrm{S}_n,$$

on obtiendra

$$2n = n + \mathrm{C}(2\mathrm{C} + 1) + \mathrm{C}_n(2\mathrm{C}_n + 1)$$
$$0 = 2\mathrm{S}^2 + 2\mathrm{S}_n^2;$$

et puisque l'on a aussi

$$S + S_n = 0, \quad C + C_n = -1;$$

on déduira de ces quatre équations

$$C = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{n}, \quad C_n = -\tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{n},$$
$$S = 0, \quad S_n = 0.$$

Si n était de la forme $4m + 3$, on aurait les deux équations

$$2n = (1 + 2C)C + (1 + 2C_n)C_n + 2S^2 + 2S_n^2 + n,$$
$$0 = (1 + 2C)C + (1 + 2C_n)C_n - 2S^2 - 2S_n^2,$$

qui étant combinées avec les deux autres

$$C + C_n = -1, \quad S + S_n = 0,$$

donneraient

$$C = -\tfrac{1}{2}, \quad C_n = -\tfrac{1}{2}$$
$$S = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{n}, \quad S_n = \mp\tfrac{1}{2}\sqrt{n},$$

comme on l'avait déjà trouvé.

On voit de cette manière qu'étant proposée une congruence quelconque

$$x^2 + e \equiv 0, \qquad [\text{mod. } n]$$

le nombre n de ses solutions sera donné par la formule

$$(19)\quad N = \frac{1}{n}\left\{\begin{array}{c}(1+2C)\Sigma\cos 2\dfrac{ea_u\pi}{n} + (1+2C_n)\Sigma\cos 2\dfrac{eb_u\pi}{n} + n \\ -2S\Sigma\sin 2\dfrac{ea_u\pi}{n} - 2S_n\Sigma\sin 2\dfrac{eb_u\pi}{n}\end{array}\right\}$$

et comme $S = S_n = 0$ (lorsque n est un nombre premier de la forme $4m + 1$), on aura dans ce cas

$$N = \frac{1}{n}\left((1+2C)\Sigma\cos 2\frac{ea_u\pi}{n} + (1+2C_n)\Sigma\cos 2\frac{eb_u\pi}{n} + n\right)$$

et la valeur de N restera la même quand on changera $+e$ en $-e$, parce que dans cette expression, il n'y a que des cosinus : donc si la congruence

$$x^2 + e \equiv 0 \qquad [\text{mod. } n]$$

est résoluble, celle-ci

$$x^2 - e \equiv 0 \qquad [\text{mod. } n]$$

le sera de même; et si la congruence

$$x^2 + e \equiv 0 \qquad [\text{mod. } n]$$

n'est pas résoluble, l'autre,

$$x^2 - e \equiv 0 \qquad [\text{mod. } n]$$

ne le sera pas non plus.

On voit que si n était de la forme $4m + 3$, la formule précédente (19) se réduirait à

$$n\,\mathrm{N} = -\left(2\mathrm{S}\,\Sigma \sin\frac{ea_u\pi}{n} + 2\mathrm{S}_n\Sigma\sin\frac{eb_u\pi}{n}\right) + n,$$

parce que dans ce cas on aurait

$$1 + 2\,\mathrm{C} = 0;\quad 1 + 2\,\mathrm{C}_n = 0;$$

et on tirerait de là, si e était un résidu,

$$n - \left(2\mathrm{S}^2 + 2\mathrm{S}_n^{\,2}\right) = n\,\mathrm{N} = n - \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2}n = 0;$$

et par suite $\mathrm{N} = 0$.

En supposant toujours que e est un résidu, et en changeant dans nos formules $+e$ en $-e$, on aurait

$$n\,\mathrm{N} = \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2}n + n = 2n,$$
$$\mathrm{N} = 2;$$

On déduit de là que si la congruence

$$x^2 + e \equiv 0 \qquad [\text{mod. } 4m+3]$$

est résoluble, l'autre,

$$x^2 - c \equiv 0 \qquad [\text{mod. } 4m+3],$$

ne le sera pas, *et vice versâ.*

Si l'on voulait connaître le nombre des racines de la congruence

$$x^2 + Ay^2 + B \equiv 0 \qquad [\text{mod. } n],$$

n étant un nombre premier, et A et B étant deux nombres non divisibles par n, on aurait, en indiquant par N le nombre de ces solutions,

(20

$$nN \equiv \Sigma \begin{cases} 1 + \left(\cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{x^2+Ay^2+B} \\ \dots + \left(\cos\frac{2(n-1)}{n}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{2(n-1)}{n}\pi\right)^{x^2+Ay^2+B} \end{cases}$$

et la valeur de N dépendra des valeurs de A et de B. A présent, l'on peut supposer 1° que A et B sont deux résidus; 2° qu'ils sont tous les deux non résidus; 3° que A est résidu et B non résidu; 4° que A est non résidu, et B résidu : alors, en substituant dans l'équation (20) les valeurs trouvées précédemment, on aura les quatre équations qui correspondront aux quatre cas que nous avons considérés :

$$nN \equiv n^2 + (1-1\pm\sqrt{\pm n})(1-1\pm\sqrt{\pm n})(-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\pm n})$$
$$+(1-1\mp\sqrt{\pm n})(1-1\mp\sqrt{\pm n})(-\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{\pm n}) \equiv n^2 \pm n$$

$$nN \equiv n^2 + (\pm\sqrt{\pm n})(\mp\sqrt{\pm n})(-\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{\pm n})$$
$$+(\mp\sqrt{\pm n})(\pm\sqrt{\pm n})(-\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{\pm n}) \equiv n^2 \pm n$$

$$nN = n^2 + (\pm\sqrt{\pm n})\,(\pm\sqrt{\pm n})\,(\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{\pm n})$$
$$+(\mp\sqrt{\pm n})\,(\mp\sqrt{+n})\,(-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\pm n}) = n^2 \pm n$$
$$n\,N = n^2 + (\pm\sqrt{\pm n})\,(\mp\sqrt{\pm n})\,(-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{+n}$$
$$+(\mp\sqrt{\pm n})\,(\pm\sqrt{\pm n}) + (-\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{\pm n}) = n^2 \pm n.$$

On voit ici que N ne peut avoir que deux valeurs

$$N = n+1; \quad N = n-1:$$

et que par conséquent la congruence

$$x^2 + Ay^2 + B \equiv 0 \qquad [\text{mod. } n]$$

est toujours résoluble, lorsque n est un nombre premier. Lagrange, qui a démontré le premier ce théorème, n'a pas cependant déterminé le nombre des solutions comme nous l'avons fait. Cette proposition sert de base à la décomposition d'un nombre quelconque en quatre carrés, et l'on pourrait en déduire d'autres conséquences que nous sommes forcé de laisser de côté.

Nous avons vu que lorsque $n = 2p+1$ est un nombre premier de la forme $4m+1$, on a:

$$\Sigma\left(\cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{a_u}$$
$$= \Sigma\cos 2\frac{a_u\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\Sigma\sin 2\frac{a_u\pi}{n} = -\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{n};$$
$$\Sigma\left(\cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{b_u}$$
$$= \Sigma\cos 2\frac{b_u\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\Sigma\sin 2\frac{b_u\pi}{n} = -\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{n};$$

en intégrant entre les limites

$$u = 1, \quad u = 2m+1:$$

il résulte de là que si t est un nombre entier quelconque plus petit que n, on aura toujours

$$\Sigma\left(\cos 2\frac{t^2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin 2\frac{t^2\pi}{n}\right)^{a_u}=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{n},$$

$$\Sigma\left(\cos 2\frac{t^2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin 2\frac{t^2\pi}{n}\right)^{b_u}=-\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Si l'on fait

$$\cos 2\frac{t^2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin 2\frac{t^2\pi}{n}=r^{t^2},$$

r exprimant la racine

$$x=\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}$$

de l'équation

$$X=x^{n-1}+x^{n-2}\ldots\ldots+x^2+x+1=0,$$

on aura

$$X=x^{a_1}+x^{a_2}+x^{a_3}\ldots\ldots+x^{a_p}+\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{n}=0,$$

et cette équation, qui sera satisfaite par la valeur $x=r$, le sera aussi par toutes les valeurs

$$x=r^1,\ r^{2^2},\ r^{3^2},\ r^{4^2},\ \ldots\ldots\ r^{(n-1)^2},$$

qui se réduiront à la moitié, en négligeant les racines égales; et puisque ces mêmes racines résolvent l'équation $X=0$, elles seront communes aux deux équations

$$X=0,\ X_1=0.$$

Les autres racines qui résolvent l'équation $X=0$, outre celles que nous avons considérées, sont de la forme

$$r^{b_1},\ r^{b_2},\ r^{b_3}\ldots\ldots r^{b_p},$$

et ne peuvent pas résoudre l'équation $X_1=0$; car en y substituant l'une quelconque d'entre elles, comme l'on a en général $r^{ba_u}=r^{b_t}$, on trouvera

$$r^{b_1}+r^{b_2}\ldots\ldots+r^{b_p}+\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{n}=0,$$

équation absurde, puisque l'on a déjà eu

$$r^{b_1}+r^{b_2}\ldots\ldots+r^{b_p}+\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{n}=0;$$

donc les deux équations $X = 0$, $X_{,} = 0$, auront seulement les p racines communes,

$$r^{a_1},\ r^{a_2},\ r^{a_3},\ \ldots\ldots\ r^{a_p};$$

et en cherchant le plus grand diviseur commun Δ entre X et $X_{,}$, on aura une équation du degré $p = \frac{n-1}{2}$ qui contiendra toutes les racines de la forme $x = r^{a_u}$, a_u étant un résidu quelconque, tandis que l'équation $\frac{X_{,}}{\Delta} = \Delta_1 = 0$, comprendra toutes les racines de la forme $x = r^{b_u}$, b_u étant un non résidu quelconque.

Cette manière d'opérer la décomposition de l'équation $\frac{x^n-1}{n-1} = 0$, est directe et beaucoup plus simple que celle proposée par M. Gauss : on verra dans la suite qu'elle peut s'étendre à tous les cas en général.

Il faut observer ici que lorsque $n = 4m + 1$, les coefficients des diverses puissances de x dans l'équation $\Delta = 0$, seront fonctions en général de $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{n}$; tandis que les coefficients des mêmes puissances dans l'équation $\Delta_1 = 0$, seront des fonctions semblables de $-\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{n}$. Cela est évident, car si l'on fait

$$\Delta = x^p + A_1 x^{p-1} + A_2 x^{p-2} \ldots\ldots = A_p + 0,$$
$$\Delta_{,} = x^p + B_1 x^{p-1} + B_2 x^{p-2} \ldots\ldots = B_p + 0,$$

et que l'on appelle P_r la somme des puissances r^{mes} des racines de l'équation $\Delta = 0$, et P'_r la somme des puissances r^{mes} des racines de l'équation $\Delta_1 = 0$, on aura toujours, lorsque r n'est pas un multiple de n,

$$P_r = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{n},$$
$$P_r + P'_r = -1 :$$

et il n'y aura par conséquent entre P_r et P'_r d'autre différence que dans le signe de $\sqrt{n}$; toutes les autres choses étant les mêmes : donc si l'on suppose

$$\Delta = X_2 + Y_2\sqrt{n}$$

on aura

$$\Delta_1 = X_2 - Y_2 \sqrt{n},$$

et par conséquent,

$$X = \Delta\Delta_1 = X_2^2 - n\,Y_2^2.$$

On trouvera de la même manière que, si n est de la forme $4m + 3$, on obtient

$$X = X_2^2 + n\,Y_2^2$$

et on aura en général, lorsque n est un nombre premier,

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = X_2^2 \pm n\,Y_2^2,$$

X_2 et Y_2 étant des fonctions rationnelles de x.

En égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans l'équation

$$\left(x^p + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\pm n}\right)x^{p-1} + \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\sqrt{\pm n}\right)x^{p-2} + \text{etc.}\right)$$
$$\left(x^p + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\pm n}\right)x^{p-1} + \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\sqrt{\pm n}\right)x^{p-2} + \text{etc.}\right)$$
$$= x^{n-1} + x^{n-2} \ldots\ldots + x^2 + x + 1 = 0,$$

on trouvera aisément que les coefficients numériques des deux facteurs

$$X_2 + Y_2\sqrt{+n}, \quad X_2 - Y_2\sqrt{\pm n},$$

ne peuvent admettre d'autre dénominateur que le nombre 2, d'où l'on déduira l'équation

$$4\left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right) = X_2^2 \pm n\,Y_2^2 = 0,$$

qui aura toujours lieu lorsque n est un nombre premier, et dans laquelle X_2 et Y_2 seront des polynomes entiers en x, à coefficients entiers. Ce théorème a été découvert par M. Gauss, qui l'a déduit de sa théorie des équations à deux termes; il sert à prou-

ver que l'équation $\frac{x^n-1}{x-1}=0$ peut toujours se décomposer en deux autres du degré $\frac{n-1}{2}$, lorsque n est au nombre premier.

Pour appliquer ce théorème à la théorie des congruences, nous observerons que, d'après ce que nous avons démontré, si n est un nombre premier de la forme $ar+1$, la congruence

$$x^a - 1 \equiv 0 \qquad [\text{mod. } n]$$

aura toujours a solutions; et comme si a est un nombre premier impair, on a aussi

$$4(x^a-1) = (x-1)(\mathrm{Z}^2 \pm a\mathrm{U}^2),$$

il s'ensuit que $\pm a$ est résidu quadratique de $ar-1$, où il faut prendre le signe $+$, si a est de la forme $4m+1$, et le signe $-$, si a est de la forme $4m+3$.

Nous avons trouvé

$$\sum_{x=1}^{x=n} r^{x^2} = -1 \pm \sqrt{n} \text{ lorsque } n = 4m+1,$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} r^{x^2} = -1 \pm \sqrt{-n} \text{ lorsque } n = 4m+3;$$

on pourrait déterminer le signe du radical, et l'on trouverait que l'on doit toujours prendre le signe positif, comme M. Gauss l'a fait dans les mémoires de Gottingue; mais cette démonstration nous écarterait trop de notre but, et nous la supprimerons.

Puisqu'on a

$$\mathrm{Y}^2 \pm n\,\mathrm{Z}^2 = 4\,\mathrm{X},$$

Si l'on rejette les multiples de n, on trouvera

$$\mathrm{Y} \equiv 2\sqrt{x} \equiv 2\sqrt{\frac{x^n-1}{x-1}} \qquad [\text{mod. } n]$$

et puisque $n = 2p+1$, on aura

$$Y \equiv 2\sqrt{\frac{x^{2p+1}-1}{x-1}} \equiv 2\sqrt{x^{2p}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{x^{2p+1}}\right)}$$

$$\equiv 2x^p\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{x^{2p+1}}\right)}, \quad [\text{mod. } p]$$

Mais comme on n'a besoin que des puissances positives de x, et plus petites que p, on pourra négliger le facteur

$$\left(1-\frac{1}{x^{2p+1}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et on obtiendra

$$(21) \qquad Y \equiv 2x^p\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \equiv 2x^p + x^{p-1} + \frac{3}{4}x^{p-2}$$

$$+\frac{3.5}{4.6}x^{p-3} + \frac{3.5.7}{4.6.8}x^{p-4} + \text{etc.}, \qquad [\text{mod. } p]$$

où il faudra rétablir au numérateur des multiples de n, qui rendent entiers tous les coefficients. On déduira aisément de là la valeur de Z, puisque l'on a

$$nZ^2 = Y^2 - 4X.$$

A présent il faut observer que dans les deux facteurs

$$(Y + Z\sqrt{+n})\ (Y - Z\sqrt{+n})$$

il y en a toujours un qui a pour racines tous les termes de la forme

$$x = \cos 2\frac{a_u\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin 2\frac{a_u\pi}{n},$$

tandis que dans l'autre on a

$$x = \cos 2\frac{b_u\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin 2\frac{b_u\pi}{n},$$

et que l'on aura toujours

$$\Sigma\left(\cos 2\frac{a_u\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin 2\frac{a_u\pi}{n}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\pm n},$$

$$\Sigma\left(\cos 2\frac{b_u\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin 2\frac{b_u\pi}{n}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\pm n},$$

où il faudra prendre le signe supérieur, si $n=4m+1$, et l'inférieur, si $n=4m+3$.

La méthode que nous avons exposée pour trouver les coefficients numériques de l'équation

$$\tfrac{1}{2}\,Y\pm\tfrac{1}{2}\,Z\sqrt{\pm n}=0,$$

est indépendante de toute considération sur le nombre n, en tant qu'il est ou n'est pas diviseur de $t^2\pm a$; si l'on ordonne donc l'équation

$$\tfrac{1}{2}\,Y\pm\tfrac{1}{2}\,Z\sqrt{\pm n}=0$$

par les puissances descendantes de x, on pourra, par les formules connues, trouver la somme des puissances de ses racines, les coefficients étant donnés : alors il faudra observer que si l'on appelle P_a la somme des puissances a^{mes} des racines de cette équation, on aura en général $P_a=P_1$, si a est un résidu quadratique de n, et $P_a=1-P_1$, si a est non résidu. On pourra donc reconnaître directement de cette manière si a est ou n'est pas résidu de n.

L'équation (10) dont nous sommes partis, qui établit un rapport si remarquable entre les intégrales aux différences des fonctions circulaires et le nombre des solutions d'une congruence, peut donner directement la résolution des équations à deux termes, que M. Gauss a trouvée le premier, en partant de considérations particulières, et en s'appuyant sur la connaissance des racines primitives.

Lagrange, qui depuis a repris cette matière, en partant des formules générales qu'il avait données précédemment, suppose aussi que l'on connaisse ces racines primitives. Nous avons simplifié cette résolution en la rendant indépendante de la recherche de ces racines, et en la déduisant d'une seule formule.

Nous allons ici énoncer quelques propositions qui nous seront

nécessaires à cet effet; mais nous en supprimerons les démonstrations, parce qu'elles nous écarteraient trop de notre but, et que d'ailleurs il est facile d'y suppléer.

Supposons que $an + 1$ soit un nombre premier quelconque, et que l'on élève successivement à la puissance a tous les nombres

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots an;$$

Si l'on divise toutes ces puissances par $an + 1$, on obtiendra n résidus divers entre eux, et plus petits que $an + 1$, qui seront chacun répétés a fois.

Si l'on appelle

$$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n,$$

les résidus trouvés de cette manière, en multipliant l'un quelconque A_p d'entre eux, par la suite des puissances a^{mes} :

$$1^a, 2^a, 3^a, \ldots\ldots (an)^a,$$

on obtiendra de nouveau la série des nombres

$$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n,$$

situés dans un ordre quelconque, et répétés chacun a fois : l'on aura par conséquent

$$\Sigma \cos 2\frac{x^a\pi}{an+1} = 1 + a\Sigma \cos 2\frac{A_u\pi}{an+1},$$

où, dans le premier membre, il faut intégrer entre les limites

$$x = 0, \quad x = an + 1,$$

et dans le second, entre les limites

$$u = 1; \quad u = n + 1;$$

on aura semblablement, en intégrant entre les mêmes limites.

$$\Sigma \cos 2\frac{A_p x^a\pi}{an+1} = 1 + a\Sigma \cos 2\frac{A_u\pi}{an+1}.$$

Si à présent on ôte de la série

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ \ an,$$

les n nombres

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ldots\ \ A_n,$$

et que l'on prenne un nombre quelconque B_1 parmi les $(a-1)n$, nombres qui restent, on aura, en multipliant B_1 par

$$1^a,\ 2^a,\ 3^a,\ \ldots\ldots\ \ (na)^a,$$

une série de n nombres divers entre eux, et tous différents des nombres

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ldots\ \ A_n,$$

qui se répéteront a fois. Si l'on appelle

$$B_1,\ B_2,\ B_3,\ \ldots\ldots\ \ B_p,$$

ces nombres, en multipliant l'un quelconque B_p d'entre eux, par toutes les puissances a^{mes}

$$1^a,\ 2^a,\ 3^a,\ \ldots\ldots\ \ (na)^a,$$

on aura de nouveau les nombres

$$B_1,\ B_2,\ B_3,\ \ldots\ldots\ \ B_n,$$

disposés dans un ordre quelconque, et répétés chacun a fois, de manière que l'on aura

$$\Sigma\left(\cos 2\frac{B_p x^a \pi}{an+1} + \sqrt{-1}\sin 2\frac{B_p x^a \pi}{an+1}\right)$$
$$= 1 + n\,\Sigma\left(\cos 2\frac{B_u \pi}{an+1} + \sqrt{-1}\sin 2\frac{B_u \pi}{an+1}\right),$$

en intégrant entre les limites

$$x = 0,\ x = an+1;\ u = 1,\ u = n+1.$$

On pourrait de même obtenir les séries

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ \ldots\ldots\ \ C_n,$$
$$D_1,\ D_2,\ D_3,\ \ldots\ldots\ \ D_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$R_1,\ R_2,\ R_3,\ \ldots\ldots\ \ R_n,$$

toutes composées de n termes divers. Le nombre de toutes les séries que nous avons considérées serait a, de manière qu'en réunissant tous les termes qu'elles contiennent, et en les rangeant d'après leur ordre de grandeur, on aurait la série des nombres naturels

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots\ldots\qquad an.$$

Il serait aisé de démontrer que, parmi les a séries que nous avons trouvées, il en existe un nombre b (qui est égal au nombre des entiers plus petits que a, et qui n'ont pas de commun diviseur avec a) de la forme

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_1,\ \mathrm{E}_2,\ \mathrm{E}_3,\ldots\ldots\qquad \mathrm{E}_n,\\ &\mathrm{F}_1,\ \mathrm{F}_2,\ \mathrm{F}_3,\ldots\ldots\qquad \mathrm{F}_n; \end{aligned}$$

et telles que si l'on multiplie un terme quelconque E_p de l'une d'entre elles, par tous les termes de la même série

$$(23)\qquad \mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3,\ldots\ldots\qquad \mathrm{A}_n,$$

on aura de nouveau la série

$$\mathrm{E}_1,\ \mathrm{E}_2,\ \mathrm{E}_3,\ldots\ldots\qquad \mathrm{E}_n;$$

Si l'on multiplie la suite (23) par $\mathrm{E}_p^{\,2}$, ou aura une autre des séries trouvées, et à chaque puissance de E_p on aura une nouvelle série; mais cela est étranger à notre but.

A présent nous supposerons, pour abréger, que l'on fasse

$$\begin{aligned} &\Sigma\left(\cos 2\frac{\mathrm{A}_p\pi}{an+1}+\sqrt{-1}\sin 2\frac{\mathrm{A}_p\pi}{an+1}\right)^{x^a}\\ &=1+n\,\Sigma\left(\cos 2\frac{\mathrm{A}_u\pi}{an+1}+\sqrt{-1}\sin 2\frac{\mathrm{A}_u\pi}{an+1}\right)=1+n\mathrm{A};\\ &\Sigma\left(\cos 2\frac{\mathrm{B}_p\pi}{an+1}+\sqrt{-1}\,1\sin 2\frac{\mathrm{B}p\pi}{an+1}\right)^{x^a}\\ &=1+n\,\Sigma\left(\cos 2\frac{\mathrm{B}_u\pi}{an-1}+\sqrt{-1}\sin 2\frac{\mathrm{B}_u\pi}{an+1}\right)=1+n\,\mathrm{B};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

et en général

$$\begin{aligned} &\Sigma\left(\cos 2\frac{\mathrm{R}_p\pi}{ad+1}+\sqrt{-1}\sin 2\frac{\mathrm{R}_p\pi}{an+1}\right)^{x^a}\\ &=1+n\,\Sigma\left(\cos 2\frac{\mathrm{R}_u\pi}{an+1}+\sqrt{-1}\sin 2\frac{\mathrm{R}_u\pi}{an+1}\right)=1+n\,\mathrm{R};\end{aligned}$$

en intégrant entre les limites

$$x = 0, \quad x = an + 1,$$
$$u = 1, \quad u = n + 1.$$

Si l'on avait à résoudre la congruence

$$x^a + 1 \equiv 0 \qquad [\text{mod. } an + 1],$$

on sait, d'après ce que nous avons dit, que le nombre N_1 de ses solutions sera exprimé par la formule

$$(an+1)\,N_1 = \begin{cases} \Sigma\left(\cos\frac{0\pi}{an+1} + \sqrt{-1}\sin\frac{0\pi}{an+1}\right)^{x^a+1} \\ + \Sigma\left(\cos\frac{2\pi}{an+1} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{an+1}\right)^{x^a+1} \quad \ldots. \\ + \Sigma\left(\cos 2\frac{an\pi}{an+1} + \sqrt{-1}\sin 2\frac{an\pi}{an+1}\right)^{x^a+1} \end{cases}$$

$$= an + 1 +$$
$$\left(\cos\frac{2\pi}{an+1} + \sqrt{-1}\sin 2\frac{\pi}{an+1}\right)\Sigma\left(\cos 2\frac{x^a\pi}{an+1} + \sqrt{-1}\sin 2\frac{x^a\pi}{an+1}\right) + \text{etc.},$$

où il faut intégrer entre les limites

$$x = 0, \quad x = an + 1.$$

En distribuant par groupes les multiples de l'arc

$$1, \ 2, \ 3, \ldots\ldots \ an,$$

comme nous l'avons indiqué, et en représentant ces groupes par des lettres, comme nous l'avons déjà fait, on aura

$$(an+1)\,N_1 = 1 + an + A(1 + nA)$$
$$+ B(1 + nB) \ldots\ldots\ldots + R(1 + nR).$$

De même le nombre N_2 des solutions de la congruence

$$x^a + y^a + 1 \equiv 0 \qquad [\text{mod. } an + 1]$$

serait donné par l'équation

$$(1+an)\,N_2 = \Sigma\left(\cos\frac{0\pi}{an+1} + \sqrt{-1}\sin\frac{0\pi}{an-1}\right)^{x^a+y^a+1} + \Sigma\left(\cos\frac{2\pi}{an+1} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{an+1}\right)^{x^a+y^a+1} + \text{etc.},$$
$$= (an+1)^2 + A(1+nA)^2 + B(1+nB)^2 \ldots\ldots + R(1+nR)^2,$$

en intégrant entre les limites

$$x = y = 0, \quad x = y = an+1,$$

et on pourrait avoir de même le nombre des solutions des congruences

$$\left.\begin{array}{l} x^a + y^a + z^a + 1 \equiv 0 \\ x^a + y^a + z^a + u^a + 1 \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ etc.} \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad [\text{mod. } an+1]$$

jusqu'à la congruence à $a-1$ inconnues, qui donnerait

$$(1+an)\,N_{a-1} = (1+an)^{a-1} + A(1+nA)^{a-1} + B(1+nB)^{a-1} \ldots\ldots + R(1+nR)^{a-1}.$$

En ajoutant à ces $a-1$ équations, l'équation connue

$$1 + A + B + C \ldots\ldots + R = 0,$$

on aura a équations et a inconnues, et on pourra, par l'élimination, déterminer toutes les quantités

$$A,\ B,\ C, \ldots\ldots\ R.$$

Au lieu de faire cette élimination, il sera plus aisé de chercher une équation

$$(24)\ldots\ldots \quad z^a + q_1 z^{a-1} + q_2 z^{a-2} \ldots\ldots + q_a = 0,$$

dont les a racines soient les quantités

$$A,\ B,\ C, \ldots\ldots\ R:$$

les coefficients de cette équation se détermineront avec la plus grande facilité, puisqu'on déduit des équations que nous avons trouvées précédemment

$$A + B + C \ldots\ldots + R = -1,$$

$$A^2 + B^2 + C^2 \ldots\ldots + R^2 = \frac{(N_1-1)(an+1)+1}{n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ etc.}$$

équations qui fournissent en général la somme des puissances r^{mes} des quantités

$$A,\ B,\ C,\ldots\ldots\ R.$$

On voit donc que, pour trouver les quantités

$$A,\ B,\ C,\ldots\ldots\ R,$$

on a une équation de l'a^{me} degré; et si $Z = Q$ est l'expression générale des racines de l'équation (24), on trouvera toujours, en appelant r l'une des racines de

$$\frac{x^{an+1}-1}{x-1} = 0,$$

l'équation

$$r^{A_1} + r^{A_2} + r^{A_3} \ldots\ldots + r^{A_n} = Q,$$

et par suite l'équation

$$X_1 = x^{A_1} + x^{A_2} + x^{A_3} \ldots\ldots + x^{A_n} - Q = 0,$$

aura n racines communes avec l'autre

$$X = \frac{x^{an+1}-1}{x-1} = 0.$$

Donc en cherchant le plus grand diviseur commun entre X et X_1, on aura une équation du degré n, qui aura pour racines les quantités

$$r^{A_1};\ r^{A_2},\ r^{A_3} \ldots\ldots\ r^{A_n},$$

et qui sera de la forme

$$X_2 = x^n + \alpha\, x^{n-1} + \beta\, x^{n-2} + \gamma\, x^{n-3} \ldots\ldots + \varepsilon = 0 :$$

et comme il y a a valeurs de Q, on aura a équations semblables à l'équation $X_2 = 0$, toutes du degré a, et telles que leur produit formera l'équation

$$\frac{x^{an+1}-1}{x-1} = 0.$$

Donc enfin:

«Étant proposée l'équation

$$\frac{x^{an+1}-1}{x-1} = 0,$$

«dans laquelle $an+1$ est un nombre premier, on pourra toujours «la décomposer en a équations du degré n, au moyen d'une équa«tion du degré a.»

On voit que ce théorème renferme toute la théorie de M. Gauss sur la résolution des équations à deux termes. Nous ne nous arrêterons pas à démontrer le complément de cette théorie, c'est-à-dire que toute équation (24) peut se réduire à une autre équation du même degré, de la forme

$$Z_1^a - b = 0.$$

Cela nous mènerait trop loin, et d'ailleurs il n'est pas difficile d'y suppléer de soi-même.

En traitant de nouveau l'équation $X_2 = 0$, avec une méthode semblable à celle que nous venons d'exposer, on pourrait la décomposer encore en d'autres équations, et réduire enfin l'équation proposée

$$x^{an+1} - 1 = 0,$$

à plusieurs équations dont les degrés fussent tous les nombres premiers qui divisent an.

En partant du même principe, on peut résoudre d'autres équations algébriques, et notamment celles d'où dépend la division de la lemniscate en parties égales (voyez la note IV^e), et trouver les valeurs de

$$\sum_{x=0}^{x=n} \cos 2\frac{ax^m\pi}{n}, \qquad \sum_{x=0}^{x=n} \cos 2\frac{a(x^m+\delta)\pi}{n}, \text{ etc.},$$

qu'il serait bien difficile d'avoir en faisant usage des méthodes connues pour calculer les intégrales définies. Notre méthode s'applique aussi à la résolution d'une congruence quelconque

$$x^m - a \equiv 0 \qquad [\text{mod. } n];$$

mais il nous paraît que les applications que nous avons exposées de l'équation (10) trouvée au commencement, suffisent pour démontrer qu'elle renferme la théorie des congruences dans toute sa généralité.

Dans un mémoire que nous avons eu l'honneur de présenter précédemment à l'Académie, nous avons exposé une formule qui donne toujours, en nombres et en termes finis, la somme des diviseurs d'un nombre quelconque. Cette formule a été trouvée en considérant la somme des puissances n^{mes} des racines de l'équation

$$(x-1)\ (x^2-1)\ (x^3-1)\ldots\ldots \qquad (x^n-1)=0;$$

si l'on cherchait la somme des puissances n^{mes} des racines de l'équation

$$(x-y)\ (x^2-y)\ (x^3-y)\ldots\ldots \quad (x^m-y)\ldots\ldots \text{ etc.}=0,$$

on pourrait trouver un nombre premier plus grand qu'une limite donnée, directement et sans tâtonnement. Mais nous ne pouvons pas exposer à présent le résultat de nos recherches sur ce sujet,

et nous réservons cela pour une autre occasion. Le but que nous nous étions proposé dans ce mémoire était de montrer de quelle manière on pouvait déduire directement de notre théorie, et d'une seule formule, tous les résultats qu'on avait trouvés avec beaucoup de difficultés, et par des méthodes très-différentes, sur les congruences; et nous osons nous flatter que l'Académie voudra accueillir avec indulgence l'essai que nous avons l'honneur de lui présenter.

NOTES.

NOTE I.

La formule de M. de Laplace pour exprimer les coefficients A_1, A_2, A_3 et A_n dans le développement de

$$\frac{1}{e^u-1} = \frac{1}{u} + A_1u + A_2u + A_3u^2 + \text{etc.} \ldots + A_nu^{n-1}.$$

est d'une application infiniment pénible lorsque n est un nombre un peu grand; et d'ailleurs elle donne $A_1 = \infty$, au lieu de $A_1 = -\frac{1}{2}$ comme on doit avoir. La formule que nous avons donnée dans les mémoires de Turin pour développer les polynomes est beaucoup plus simple et s'applique avec facilité.

En effet, nous avons trouvé pour le polynome

$$(1 + a_1u + a_2u^2 \ldots + a_nu^n + \text{etc.})^m = 1 + A_1u + A_2u^2 \ldots + A_nu^n + \text{etc.}$$

l'expression

$$A_n = \begin{cases} \dfrac{nma_u}{n} + \dfrac{((n-1)m-1)}{n}\dfrac{a_{n-1}}{}(ma_1) \\ + \dfrac{((n-2)m-2)}{n}\dfrac{a_{n-2}}{}\left(\dfrac{2ma_2 + (m-1)a_1(ma_1)}{2}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \dfrac{((n-t)m-t)}{n}\dfrac{a_{n-t}}{}\left(\dfrac{tma_t + ((t-1)m-1)a_{t-1}(ma_1) + \text{etc.}}{t}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc.} \end{cases}$$

et puisque l'on a

$$\frac{1}{e^u-1} = \frac{1}{u + \dfrac{u^2}{1.2} + \dfrac{u^3}{1.2.3} \ldots + \dfrac{u^n}{1.2.3\ldots n} + \text{etc.}}$$

$$= \frac{1}{u}\left(\frac{1}{1 + \dfrac{u}{1.2} + \dfrac{u^2}{1.2.3} \ldots + \dfrac{u^{n-1}}{1.2.3\ldots n} + \text{etc.}}\right)$$

en comparant le polynome

$$\frac{1}{1+\frac{u}{1.2}+\frac{u^2}{1.2.3}\ldots\ldots+\frac{u^{n-1}}{1.2.3\ldots n}+\text{etc.}}$$

à l'autre

$$(1+a_1 u+a_2 u^2 \ldots\ldots+a_n u^n+\text{etc.})^m,$$

on aura

$$m=-1,\ a_1=\frac{1}{1.2},\ a_2=\frac{1}{1.2.3},\ \ldots\ a_n=\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)},$$

et par conséquent, en substituant ces valeurs dans celles de A_n, on obtiendra

$$A_n=\frac{-1}{1.2.3\ldots(n+1)}-\frac{1}{1.2.3\ldots.n}\left(\frac{-1}{1.2}\right)$$
$$-\frac{1}{1.2.3\ldots.(n-1)}\left(\frac{-1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2}\left(\frac{-1}{1.2}\right)\right)$$
$$-\frac{1}{1.2.3\ldots(n-t)}\left(\frac{-1}{1.2.3\ldots(t+2)}-\frac{1}{1.2.3\ldots(t+1)}\left(\frac{-1}{1.2}\right)-\text{etc.}\right)-\text{etc.}$$

En faisant dans cette formule successivement $n=1, 2, 3, \ldots$ etc., on aura

$$A_1=\frac{-1}{2},\ A_2=\frac{-1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12},$$
$$A_3=\frac{-1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-\frac{1}{8}=0,\ \text{etc.}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ \text{etc.}$$

NOTE II.

Étant données deux équations en y, l'une du degré n, et l'autre du degré m, si on élimine y on aura l'équation

$$1+\Sigma\left(\frac{P_t A_{t-1}}{2}+\Sigma\frac{P_{t_x} A_{t_x-1}}{t_x}\left[\frac{P_{t_{x-1}}-t_x A_{t_{x-1}}-t_x-1}{t_{x-1}}\right]^x\right)=0,$$

(en intégrant entre les limites

$$t = 1,\ t = mn + 1,$$

$$x = 1,\ x = t,\ t_u = x - u + 1,\ z_u = t_{u-1},$$

et en faisant $t_0 = t$), dans laquelle P_r exprime en général la somme des puissances r^{mes} des racines d'une équation donnée, et A_v représente le coefficient de la puissance v^{mes} du développement connu du polynome.

On obtiendra de même dans l'équation

$$(1 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n + \text{etc.})^m = 1 + A_1 x + A_2 x^2 \ldots + A_n x_u + \text{etc.},$$

$$A_n = ma_n + m \sum a_{n_u} e^{\sum log\,((n_v - n_{v+1})m - n_{v+1})\,\frac{a_{n_v - n_{v+1}}}{n_v}};$$

e étant la base des logarithmes hyperboliques, et les intégrations étant effectuées entre les limites

$$v = 0,\quad v = u,$$

$$u = 1,\quad u = n,$$

$$u_p = u - p + 1,\quad n_p = n_{p-1}.$$

La somme des puissances n^{mes} des racines de l'équation

$$x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} \ldots\ldots - a_n = 0,$$

est donnée par la formule

$$P_m = ma_m + \sum (m - m_1)\, a_{m_u} e^{\sum log\, a_{m_z - m_{z+1}}}$$

où il faut intégrer entre les limites

$$z = 0,\ z = u;\ m_p = u + 1 - p,\ m_p = m_{p-1};$$

$$u = 1,\ u = m;$$

et faire $m_0 = m$, comme auparavant.

Il y a deux ans que nous avons trouvé ces formules, dont nous avons donné une application dans un mémoire présenté à l'Académie royale des sciences de Paris, en janvier 1824, en cherchant la somme des diviseurs d'un nombre quelconque. Elles ont l'avantage de n'exiger aucune opération analytique pour être appliquées, car il suffit d'y substituer les coefficients connus

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ a_n,\ \text{etc.}$$

pour en avoir la valeur pour chaque cas particulier; de plus, lorsque le coefficient général a_n est une fonction donnée de n, on peut les transformer en intégrales définies et en obtenir la valeur directement en nombres; ce qui est d'un grand avantage dans la théorie des nombres. M. Cauchy nous a montré un mémoire inédit dans lequel il expose des formules propres à exprimer les

fonctions symétriques; mais ses formules sont tout à fait différentes des nôtres, et d'ailleurs elles exigent des différentiations successives, tandis que nos expressions ne demandent aucune opération préliminaire.

NOTE III.

Soit proposé, par exemple, de résoudre en nombres entiers et positifs l'équation

$$3x + 1 = 4y,$$

si on la compare avec l'autre

$$ax + b = cy,$$

qui donne

$$(a) \qquad x = \frac{c-1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{y=1}^{y=c} \frac{\sin (2b-a)\frac{y\pi}{c}}{\sin \frac{ay\pi}{c}}$$

on aura $a = 3$, $b = 1$, $c = 4$, et par conséquent

$$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{3\pi}{4}} - \frac{\sin\frac{2\pi}{4}}{\sin\frac{6\pi}{4}} - \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{9\pi}{4}} \right)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1+1-1) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1,$$

et la valeur $x = 1$ résoudra l'équation proposée, comme il est facile de voir.

Il est clair que l'on aura aussi

$$x = \frac{c}{2} + \frac{1}{2} \sum_{y=1}^{y=c} \sin \frac{2by\pi}{c} \cot \frac{ay\pi}{c}$$

en développant le second membre de l'équation (a).

Ces formules pourraient être généralisées, et il serait aisé de les étendre aux degrés supérieurs des congruences; mais on aurait alors des expressions plus compliquées.

En général, les valeurs de x de l'équation (a) peuvent être calculées au moyen des tables des sinus, car de cette manière on aura une valeur très-approchée de

x, et comme x doit être un nombre entier, on prendra pour sa valeur exacte le nombre entier le plus approché.

NOTE IV.

Soit proposée l'équation $x^n - 1 = 0$, et soit s une racine primitive du nombre premier n: si l'on exprime par $r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$, les $n-1$ racines de l'équation $\frac{x^n-1}{x-1} = 0$, il est clair qu'on aura

$$r_2 = r_1^s,\ r_3 = r_2^s,\ r_4 = r_3^s,\ \ldots \text{ etc.};$$

maintenant si l'on suppose que l'équation $x^m + a_1 x^{m-1} r^m \ldots + a_m = 0$, ait les m racines $r_1, r_2, \ldots$ telles qu'en exprimant par $\varphi(y)$ une fonction rationnelle quelconque de y, on ait toujours $r_2 = \varphi(r_1)$, $r_3 = \varphi(r_2) \ldots\ldots$ etc., on pourra encore résoudre complétement l'équation $x^m + a_1 x^{m-1} \ldots\ldots + a_m = 0$, (lorsqu'elle n'a pas de facteurs rationnels) en employant la même méthode dont Lagrange s'est servi dans les notes de la 2e édition de la Résolution des équations numériques, pour résoudre l'équation à deux termes.

ADDITION.

Dans un mémoire présenté précédemment à l'Académie, nous avons énoncé ce théorème:

« Qu'un nombre quelconque positif est la somme de quatre cubes rationnels et « positifs. »

En voici la démonstration.

Soit M un nombre positif, et q un nombre rationnel, on aura toujours l'identité

$$(b) \qquad \mathrm{M} = \left(\frac{\mathrm{M} + 48q^3}{24q^2}\right)^3 + \left(\frac{\mathrm{M} - 48q^3}{24q^2}\right)^3 - \left(\frac{\mathrm{M}}{24q^2}\right)^3 - \left(\frac{\mathrm{M}}{24q^2}\right)^3,$$

(comme il est facile de s'en assurer en développant) qui prouve qu'un nombre quelconque est la somme de quatre cubes rationnels; mais d'après l'énoncé du théorème, ces cubes doivent être positifs, et ils ne le sont pas dans l'équation (b): voyons comment on peut les réduire tels.

Puisque q est un nombre quelconque, nous supposerons q positif, et $\mathrm{M} > 48q^3$, ce qui rendra positif les deux premiers cubes du second membre de l'équation (b), tandis que les deux autres seront toujours négatifs. A présent il faut observer que dans l'identité

$$(c) \qquad a^5 - b^5 = a^5\left(\frac{a^5 - 2b^5}{a^5 + b^5}\right)^5 + b^5\left(\frac{2a^5 - b^5}{a^5 + b^5}\right)^5$$

si l'on a $a^5 > 2\,b^5$, on aura encore $2a^5 > b^5$, et par conséquent le second membre sera composé de deux cubes positifs dont la somme sera égale à la différence des deux cubes donnés a^5 et b^5. Si nous faisons

$$a^5 = \left(\frac{\mathrm{M} + 48q^5}{24q^2}\right)^5, \qquad b^5 = \left(\frac{\mathrm{M}}{24q^2}\right)^5,$$

l'équation (c) se transformera en celle-ci

$$\left(\frac{\mathrm{M} + 48q^5}{24q^2}\right)^5 - \left(\frac{\mathrm{M}}{24q^2}\right)^5$$

$$= \left(\frac{\mathrm{M} + 48q^5}{24q^2}\right)^5 \left(\frac{\left(\frac{\mathrm{M} + 48q^5}{24q^2}\right)^5 - 2\left(\frac{\mathrm{M}}{24q^2}\right)^5}{\left(\frac{\mathrm{M} + 48q^5}{24q^2}\right)^5 + \left(\frac{\mathrm{M}}{24q^2}\right)^5}\right)^3$$

$$+ \left(\frac{\mathrm{M}}{24q^2}\right)^5 \left(\frac{2\left(\frac{\mathrm{M} + 48q^5}{24q^2}\right)^5 - \left(\frac{\mathrm{M}}{24q^2}\right)^5}{\left(\frac{\mathrm{M} + 48q^5}{24q^2}\right)^5 + \left(\frac{\mathrm{M}}{24q^2}\right)^5}\right)^3$$

$$= \left(\frac{\mathrm{M} + 48q^5}{24q^2}\right)^5 \left(\frac{(\mathrm{M} + 48q^5)^3 - 2\,\mathrm{M}^5}{(\mathrm{M} + 48q^5)^5 + \mathrm{M}^5}\right)^5$$

$$+ \left(\frac{\mathrm{M}}{24q^2}\right)\left(\frac{2\,(\mathrm{M} + 48q^5)^5 - \mathrm{M}^5}{(\mathrm{M}\,48q^5)^5 + \mathrm{M}^5}\right) \qquad \ldots\ldots\ (d)$$

Il est clair que si l'on suppose $(\mathrm{M} + 48q^5)^5 > 2\,\mathrm{M}^5$, les deux cubes du second membre seront positifs : nous supposerons pour le moment cette condition remplie, et nous considérerons de nouveau l'identité (c) en prenant

$$a^5 = \left(\frac{\mathrm{M} + 48q^5}{24q^2}\right)^5 \left(\frac{(\mathrm{M} + 48q^5)^5 - 2\,\mathrm{M}^5}{(\mathrm{M} + 48q^5)^5 + \mathrm{M}^5}\right)^5, \qquad b = \left(\frac{\mathrm{M}}{24q^2}\right)^5;$$

en substituant ces valeurs dans l'identité (c) nous aurons

$$\left(\frac{\mathrm{M} + 48q^3}{24q^3}\right)^3 \left(\frac{(\mathrm{M} + 48q^3)^3 - 2\,\mathrm{M}^3}{(\mathrm{M} + 48q^3)^3 + \mathrm{M}^3}\right)^3 - \left(\frac{\mathrm{M}}{24q^3}\right)^3 =$$

$$= \left(\frac{M+48q^3}{24q^2}\right)^3 \left(\frac{(M+48q^3)^3-2M^3}{(M+48q^3)^3+M^3}\right)^3 \times$$

$$\times \left(\frac{\left(\frac{M+48q^3}{24q^2}\right)^3 \left(\frac{(M+48q^3)^3-2M^3}{(M+48q^3)^3+M^3}\right)^3 - 2\left(\frac{M}{24q^2}\right)^3}{\left(\frac{M+48q^3}{24q^2}\right)^3 \left(\frac{(M+48q^3)^3-2M^3}{(M+48q^3)^3+M^3}\right)^3 + \left(\frac{M}{24q^2}\right)^3} \right)^3$$

$$+ \left(\frac{M}{24q^2}\right)^3 \left(\frac{2\left(\frac{M+48q^3}{24q^2}\right)^3 \left(\frac{(M+48q^3)^3-2M^3}{(M+48q^3)^3+M^3}\right)^3 - \left(\frac{M}{24q^2}\right)^3}{\left(\frac{M+48q^3}{24q^2}\right)^3 \left(\frac{(M+48q^3)^3-2M^3}{(M+48q^3)^3+M^3}\right)^3 + \left(\frac{M}{24q^2}\right)^3} \right)^3 \quad \ldots . (d)$$

le premier terme du second membre de cette équation peut s'écrire encore de la manière suivante

$$\left(\frac{48q^3+M}{24q^2}\right)^3 \left(\frac{(M+48q^3)^3-2M^3}{(M+48q^3)^3+M^3}\right)^3 \times$$

$$\times \left(\frac{(48q^3+M)^3\,((48q^3+M)^3-2M^3)^3-2M^3\,((48q^3+M^3)^3+M^3)^3}{(48q^3+M)^3\,((48q^3+M)^3-2M^3)^3-2M^3\,((48q^3+M^3)^3+M^3)^3} \right)^3,$$

et l'on voit que si ce premier cube est positif, le second le sera encore (dans l'hypothèse que $(M+48q^3)^3 > 2M^3$); à présent pour le rendre positif, il faut et il suffit que l'on ait

$$(e) \qquad (48q^3+M^3)^3\,((48q^3+M)^3-2M^3) > 2M^3)\,(48q^3+^3+M^3)^3$$

et cette condition renferme l'autre que nous avons supposée $(48q^3+M)^3 > 2M^3$; ainsi lorsque l'inégalité (e) sera satisfaite, celle-ci $(48q^3+M)^3 > 2M^3$ le sera aussi si nous faisons $48q^3 = z$, l'inégalité (e) se transformera dans celle-ci

$$(z+M)\,((z+M)^3-2M^3)-M\,((z+M)^3+M^3)\sqrt[3]{2}>0$$

laquelle étant développée donne

$$(z+M)\,(z^3+3z^2M+3zM^2-M^3)-M\,(z^3+3z^2M+3zM^2+2M^3)\sqrt[3]{2}$$
$$= z^4+4z^3M+6z^2M^2+2z^2M^2+2zM^3-M^3-2M^4\sqrt[3]{2}-3zM^3\sqrt[3]{2}-3z^2M^2\sqrt[3]{2}-z^3M\sqrt[3]{2}$$
$$= z^4+z^3M(4-\sqrt[3]{2})+z^2M^2(6-3\sqrt[3]{2})+zM^3(2-3\sqrt[3]{2})-M^4(1+2\sqrt[3]{2})>0 \quad \ldots . (f)$$

Nous avons supposé que $M > 48q^3$, ou bien $M > z$; en faisant donc $M = Az$, on aura $A>1$: si l'on substitue cette valeur de M dans l'inégalité (f), et qu'on la divise par z^4, on aura

$$1+A(4-\sqrt[3]{2})+A^2(6-3\sqrt[3]{2})+A^3(2-3\sqrt[3]{2})-A^4(1+2\sqrt[3]{2})>0;$$

si l'on fait à présent $A = 1+\omega$, on obtiendra $\ldots . (g)$

$$\ldots . 1+(4-\sqrt[3]{2})(1+\omega)+(6-3\sqrt[3]{2})(1+\omega)^2+(2-3\sqrt[3]{2})(1+\omega)^3-(1+2\sqrt[3]{2})(1+\omega)^4,$$
$$= (12-9\sqrt[3]{2}+\omega(18-24\sqrt[3]{2})+\omega^2(6-24\sqrt[3]{2})-\omega^3(2+11\sqrt[3]{2})-\omega^4(1+2\sqrt[3]{2}))>0,$$

je dis que l'on pourra toujours satisfaire à cette inégalité en prenant pour ω un nombre rationnel et positif. En effet puisque $\frac{126}{100} > \sqrt[3]{2}$, on aura

$$12 - 9\sqrt[3]{2} > 12 - \left(\frac{126}{100} \times 9 = \frac{1200 - 1134}{100} = \frac{66}{100} \right)$$

ou bien

$$12 - 9\sqrt[3]{2} > \frac{33}{50};$$

et ω devra être un nombre tel que la somme de tous les termes qu'il multiplie dans l'inégalité (g), soit moindre que $\frac{33}{50}$: nous prendrons partout $\frac{126}{100}$ pour valeur de $\sqrt[3]{2}$ sans crainte d'erreur, parce que dans l'inégalité (g) tous les termes, moins les premiers sont négatifs, et nous devrons avoir

$$\frac{33}{50} - \omega\left(24 \times \frac{126}{100} - 18 \right) - \omega^2\left(24 \times \frac{126}{100} - 6 \right) - \omega^3\left(11 \times \frac{126}{100} + 2 \right) - \omega^4\left(2 \times \frac{126}{100} + 1 \right)$$

$$= \frac{33}{50} - \omega\left(\frac{3024 - 1800}{100} \right) - \omega^2\left(\frac{3024 + 600}{100} \right) - \omega^3\left(\frac{1386 + 200}{100} \right) - \omega^4\left(\frac{252 + 100}{100} \right);$$

$$\frac{33}{50} - \frac{612}{50}\omega - \frac{1212}{50}\omega^2 - \frac{793}{50}\omega^3 - \frac{176}{50}\omega^4 > 0$$

d'où, en multipliant par 50, nous déduirons

$$(h) \qquad 33 - 612\omega - 1212\omega^2 - 793\omega^3 - 176\omega^4 > 0 :$$

si l'on fait $\omega = \frac{1}{\rho}$, et que l'on multiplie tous les termes par $\frac{\rho^4}{33}$, on obtiendra

$$\rho^4 - \frac{612}{33}\rho^3 - \frac{1212}{33}\rho^2 - \frac{793}{33}\rho - \frac{226}{33} > 0.$$

Cette dernière inégalité sera satisfaite en prenant $\rho > \frac{1212}{33} + 1$, ou bien

$$\rho = \frac{1245}{33} + u = \frac{415}{11} + u = \frac{415 + 11u}{11};$$

et par conséquent l'inégalité (h) sera satisfaite en prenant

$$\omega = \frac{11}{415+11u}; \quad \omega < \frac{11}{415},$$

u étant un nombre quelconque rationnel et positif. Mais puisque l'on a

$$M = Az = (1+\omega)z = \left(1+\frac{11}{415+11u}\right)z$$
$$= \left(\frac{426+11u}{415+11u}\right)z = 48q^3\left(\frac{426+11u}{415+11u}\right),$$

on aura aussi

$$q^3 = \frac{M}{48}\left(\frac{415+11u}{426+11u}\right).$$

On devra par conséquent prendre pour q^3 un cube rationnel positif compris entre $\frac{M}{48}$ et $\left(\frac{415+11u}{426+11u}\right)\frac{M}{48}$ ou bien entre $\frac{M}{48}$ et $\frac{415}{426}\cdot\frac{M}{48}$; et l'on voit qu'il existera toujours un nombre infini de ces cubes. A présent si l'on substitue l'un de ces cubes dans les identités (c), (d), on aura décomposé le nombre M en quatre cubes rationnels et positifs.

Ce théorème offre le premier exemple de la décomposition des nombres en puissances d'un degré plus élevé que le deuxième : on pourrait le généraliser et en déduire plusieurs autres propositions nouvelles.

PREMIER MÉMOIRE

SUR

LA DÉTERMINATION DES INTÉGRALES

DONT LA VALEUR EST ALGÉBRIQUE;

PAR JOSEPH LIOUVILLE (*).

I.

[1] La question que je traite dans ce mémoire me paraît mériter, sous plus d'un rapport, l'attention des géomètres. Lorsque j'ai entrepris mon travail, je ne me proposais que de démontrer, d'une manière directe et rigoureuse, l'impossibilité d'obtenir algébriquement les intégrales indéfinies de certaines fonctions algébriques. Au premier rang parmi ces intégrales, que l'on doit regarder comme des quantités transcendantes, figure la fonction elliptique $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, et c'est par l'examen de cette expression que j'ai commencé mes recherches. J'ai d'abord appliqué à cette inte-

(*) Ce mémoire et le suivant ont été l'objet d'un rapport de M. Poisson, qui doit être imprimé dans le journal de M. Crelle. Ils ont été présentés à l'Académie des sciences le 7 décembre 1832 et le 4 février 1833. Depuis cette époque on a retouché la rédaction en quelques points, mais sans rien changer aux théorèmes principaux.

grale un procédé particulier, fondé sur une circonstance bien indifférente au premier aperçu, savoir, sur ce fait analytique, que d'une part la quantité $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ est une fonction de x dont la valeur reste la même, au signe près, quand on y remplace x par $-x$, et que d'autre part l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ est un nombre fini. On prouve que ces deux propriétés ne pourraient pas exister ensemble, si la fonction elliptique de première espèce avait une valeur algébrique. Mais cette méthode singulière (qu'il suffit d'avoir indiquée en deux mots), ne conduisant qu'à des résultats bornés, n'aurait pu contribuer en rien aux progrès du calcul intégral. En regardant les choses de plus près, j'ai rencontré une méthode nouvelle qui, déduite naturellement des vrais principes de la matière, mène à des résultats beaucoup plus étendus que la précédente. Par son moyen je suis arrivé au théorème suivant : *Étant donnée une fonction algébrique quelconque* $f(x)$, *on pourra toujours décider si elle a ou n'a pas pour intégrale une fonction algébrique;* à quoi j'ajouterai que *si la question est résolue affirmativement, le même procédé fera connaître la valeur de* $\int f(x)dx$. Toutefois je ne veux pas démontrer ici, dans toute son étendue, la proposition que je viens d'énoncer, me réservant, dans un second mémoire, d'attaquer le problème général. Pour le moment je supposerai que les quantités placées sous les radicaux que $f(x)$ contient sont des fonctions rationnelles de x. On verra que notre théorème, ainsi restreint à ce que je nomme *fonctions irrationnelles de première espèce*, dérive avec facilité des règles du calcul différentiel et des propriétés des radicaux. Mais avant d'entrer en matière, il faut définir d'une manière précise ce qu'on entend par une fonction algébrique (*), et montrer comment on peut toujours écrire une fonction de cette espèce.

(*) On ne considère dans ce mémoire que des fonctions algébriques *explicites*.

II.

(2) Une fonction algébrique $f(x)$ est celle où la variable x se trouve engagée avec des constantes, seulement par addition, soustraction, multiplication, division, élévation aux puissances entières et positives, extraction de racines; en sorte qu'une fonction algébrique peut toujours être représentée, sous forme finie, par les simples signes des six opérations fondamentales que je viens d'indiquer.

D'après cette définition

$$\frac{x^3 + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}}}{1 + x + \sqrt{x}}$$

est une fonction algébrique. Les quantités qui renferment des exposants fractionnaires ou négatifs sont aussi des fonctions algébriques, parce que les exposants négatifs peuvent se remplacer par des divisions, et les exposants fractionnaires par des extractions de racines. Ainsi $x + (1+x)^{\frac{3}{5}}$, $1 + (1+x^3)^{-\frac{2}{7}}$, sont des fonctions algébriques que l'on peut écrire de cette autre manière :

$$x + \sqrt[5]{(1+x)^3}, \qquad 1 + \frac{1}{\sqrt[7]{(1+x^3)^2}},$$

Mais $x^{\sqrt{2}}$, $x^{\sqrt{-1}}$, ne sont pas des fonctions algébriques, parce que l'exposant $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, et l'exposant $\sqrt{-1}$ un nombre imaginaire.

Quant aux constantes qui entrent dans la fonction, elles peuvent être tout ce que l'on veut, et n'influent aucunement sur sa nature.

Une fonction algébrique est rationnelle lorsqu'elle ne contient aucun radical irréductible affectant la variable x; dans le cas contraire elle est irrationnelle.

Une fonction algébrique rationnelle devient entière lorsque la

variable x ne se trouve nulle part en diviseur : tel est le polynome

$$a + b + cx^2 + \ldots + kx^m,$$

où $a, b, c, \ldots k$, sont des constantes quelconques.

[3] Voyons maintenant à quelle forme on peut réduire une fonction algébrique.

D'abord, en vertu des règles données dans les éléments, la fonction algébrique la plus générale peut être représentée par une fraction dont le dénominateur et le numérateur, à la fois, ne contiendront plus aucune division indiquée.

Si l'on avait, par exemple, la quantité

$$f(x) = x + \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}}}{1 + \frac{3}{\sqrt{x}}};$$

on observerait que le second terme est égal à

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x + 3\sqrt{x}};$$

puis en le réduisant au même dénominateur avec le premier, on trouverait

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^3+1}}{x + 3\sqrt{x}}.$$

Voilà par conséquent la fonction $f(x)$ mise sous la forme à laquelle nous désirions la réduire, forme dont le caractère propre consiste en ce qu'il ne se trouve aucune fraction au numérateur, ni aucune fraction au dénominateur, en sorte que dans la fonction $f(x)$ une seule division est indiquée.

[4] Maintenant il est aisé de faire en sorte que le dénomina-

teur devienne une fonction rationnelle de x. En effet, on enseigne dans les éléments le moyen de trouver le facteur par lequel une fonction irrationnelle proposée étant multipliée, il en résulte un produit débarrassé de radicaux. Ce moyen consiste à former toutes les racines de l'équation à coefficients rationnels d'où dépend l'expression irrationnelle proposée; car le produit de ces racines, abstraction faite de son signe, étant égal au dernier terme de cette équation, sera rationnel, et par conséquent le produit de toutes celles qui seront différentes de la proposée sera le facteur demandé. En multipliant donc par un facteur convenable les deux termes de la fraction qui compose la valeur de $f(x)$, le dénominateur de cette fraction deviendra rationnel; et comme il ne renferme aucune division indiquée, ce sera en même temps un polynome entier

$$a + bx + cx^2 + \ldots + kx^m.$$

[5] Voyons ensuite ce que deviendra le numérateur. En effectuant toutes les multiplications indiquées, et observant que le produit de deux radicaux tel que $\sqrt[m]{\mathrm{P}} \cdot \sqrt[n]{\mathrm{Q}}$ donne lieu à un simple radical $\sqrt[mn]{\mathrm{P}^m\mathrm{Q}^n}$, on verra que le numérateur ne pourra contenir que des termes compris dans les espèces suivantes :

1° Des quantités rationnelles et entières;

2° Des radicaux sous lesquels se trouveront des quantités rationnelles entières. J'appellerai ces radicaux *fonctions irrationnelles de première espèce*. L'expression $x^2\sqrt{x} + \sqrt[3]{1+x^2}$ en est un exemple. Au reste, une fonction sera dite *irrationnelle de première espèce*, quand elle contiendra des radicaux de première espèce, lors même qu'elle renfermerait en outre des termes rationnels. Ainsi le polynome $x^2 + x\sqrt{1+x}$ est une fonction irrationnelle de première espèce (*).

(*) Les quantités placées sous les radicaux sont ici des fonctions entières; ce qui tient à l'opération qu'on a effectuée sur la fonction $f(x)$ au n° 3. Mais quand même on remplacerait

3° des radicaux sous lesquels se trouveront des fonctions irrationnelles de première espèce. J'appellerai ces radicaux *fonctions irrationnelles de seconde espèce.* Telle est l'expression

$$x\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt{1+x}}.$$

Au surplus, une fonction où entreraient de tels radicaux ne cesserait pas d'être de seconde espèce, quand même elle renfermerait en outre des radicaux de première espèce et des termes rationnels.

4° Des radicaux sous lesquels se trouveront des fonctions irrationnelles de seconde espèce. J'appellerai ces radicaux *fonctions irrationnelles de troisième espèce.*

Et ainsi de suite, car il est aisé de poursuivre aussi loin qu'on voudra cette classification.

[6] Actuellement nous conviendrons des notations suivantes pour représenter les fonctions rationnelles et les diverses espèces de fonctions irrationnelles.

Les lettres simples E, F, G, ... P, Q, R, ... désigneront des fonctions rationnelles.

Les lettres portant 1 pour indice, savoir $E_1, F_1, G_1, \ldots P_1, Q_1, R_1, \ldots$ désigneront des fonctions irrationnelles de première espèce.

De même, en mettant à ces lettres les indices 2, 3, ... on leur fera représenter des fonctions irrationnelles de seconde espèce, comme $P_2, Q_2, \ldots$ ou de troisième espèce, comme $P_3, Q_3, \ldots$

Les petites lettres $m, n, p, q, r, \ldots$ serviront d'indices aux radicaux, et représenteront toujours des nombres entiers positifs plus grands que l'unité.

Enfin, quand il s'agira de prendre la dérivée d'une fonction,

les quantités entières par des polynomes rationnels et fractionnaires, les radicaux dont il s'agit seraient encore de première espèce. Ainsi, par exemple, $\frac{x}{1+x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ est une fonction irrationnelle de première espèce. En lisant le n° 6 on devra avoir cette remarque présente à l'esprit.

nous accentuerons la lettre qui représente cette fonction, c'est-à-dire que nous ferons à la manière de Lagrange

$$\frac{dP}{dx} = P', \quad \frac{dQ}{dx} = Q', \quad \frac{dP_1}{dx} = P_1', \text{ etc.}$$

Conformément aux idées du même géomètre, nous représenterons aussi quelquefois par $(EQ)'$, $(E^mQ)'$, les dérivées respectives des produits EQ, E^mQ.

D'après ces notations, on voit que toute fonction algébrique sera une des quantités successives P, P_1, P_2, P_3, ... et que de plus P_1, P_2, P_3, ... seront toujours de la forme

$$P_1 = P + \sqrt[m]{Q} + \sqrt[n]{R} + \ldots + \sqrt[q]{S}$$
$$P_2 = P_1 + \sqrt[m]{Q_1} + \sqrt[n]{R_1} + \ldots + \sqrt[q]{S_1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On ne met pas de coefficients aux radicaux, parce que cela serait inutile; en effet, soit par exemple un terme de la forme $\frac{M}{N}\sqrt[m]{L}$; on le ramènera à la forme $\sqrt[m]{Q}$ en faisant passer M et N sous le radical, et posant $Q = \frac{M^m L}{N^m}$. On pourrait écrire aussi :

$$P_1 = P + E\sqrt[m]{Q} + F\sqrt[n]{R} + \ldots + H\sqrt[q]{S}$$
$$P_2 = P_1 + E_1\sqrt[m]{Q_1} + F_1\sqrt[n]{R_1} + \ldots + H_1\sqrt[q]{S_1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

E, F, ... H, désignant des quantités rationnelles aussi bien que P, Q, R, ... S; et E_1, P_1, etc., étant des fonctions irrationnelles de première espèce.

La fonction $P_1 = P + E\sqrt[m]{Q} + F\sqrt[n]{R} + \ldots + H\sqrt[q]{S}$ est celle dont on s'occupera dans ce mémoire. On enseignera la manière de déterminer $\int P_1 dx$ toutes les fois que cette intégrale sera exprimable algébriquement. Pour que la fonction P_1 soit réduite à sa forme la plus simple, il est nécessaire que les radicaux $\sqrt[m]{Q}$, $\sqrt[n]{R}$, ... $\sqrt[q]{S}$, soient *irréductibles*, c'est-à-dire que ces radicaux expriment des quantités véritablement irrationnelles. On doit ensuite les supposer *dissemblables*, c'est-à-dire

tels que le rapport de deux d'entre eux ne soit jamais rationnel; car si l'on avait par exemple $\frac{\sqrt[n]{R}}{\sqrt[m]{Q}} = K$, K étant rationnel, on aurait aussi

$$E\sqrt[m]{Q} + F\sqrt[n]{R} = (E + FK)\sqrt[m]{Q};$$

et les deux termes $E\sqrt[m]{Q}$, $F\sqrt[n]{R}$ se trouveraient réduits à un seul de la forme $E\sqrt[m]{Q}$. Désormais nous supposerons que la fonction P_1 a été mise sous la forme la plus simple, et que les radicaux dont elle dépend sont tous irréductibles et dissemblables entre eux.

III.

[7] Notre but étant de trouver $\int P_1 dx$, nous passerons du simple au composé, en considérant d'abord la quantité $\int \sqrt[\mu]{L}.dx$. Je désigne par L une fonction rationnelle quelconque donnée : on verra que le cas général se ramène aisément à ce cas particulier. Or, l'intégration de la quantité $\sqrt[\mu]{L}.dx$ (quand elle est possible algébriquement) dépend d'un théorème général dont voici l'énoncé :

THÉORÈME.

Si l'intégrale $y = \int \sqrt[\mu]{L}.dx$ *a une valeur algébrique, cette valeur sera nécessairement de la forme* $y = \mathcal{G}\sqrt[\mu]{L} +$ *constante,* $\mathcal{G}$ *désignant une fonction rationnelle de* x.

Démonstration. Puisque par hypothèse la valeur de y est algébrique, et qu'évidemment cette valeur ne peut pas être rationnelle, il faut en conclure que y sera une fonction irrationnelle d'une certaine espèce, et que par conséquent (d'après nos conventions du n° 6) cette quantité pourra être représentée par une des lettres successives P_1, P_2, P_3, ... Maintenant je dis que y ne peut pas être une fonction irrationnelle d'espèce supérieure à la première; car si l'on avait par exemple

$$y = P_2 = P_1 + E_1\sqrt[m]{Q_1} + F_1\sqrt[n]{R_1} + \ldots + H_1\sqrt[q]{S_1},$$

et que P_2 contînt p radicaux de seconde espèce, on différencierait l'équation $y = P_2$, et de l'équation dérivée, savoir

$$\sqrt[\mu]{L} = P_1' + \frac{(E_1{}^m Q_1)'}{m E_1{}^m Q_1} E_1 \sqrt[m]{Q_1} + \ldots + \frac{(H_1{}^q S_1)'}{q H_1{}^q S_1} H_1 \sqrt[q]{S_1},$$

on tirerait la valeur d'un de ces radicaux; en sorte qu'après la substitution faite de cette valeur dans celle de y, le nombre des radicaux de seconde espèce entrant dans y se trouverait réduit à $p - 1$. Opérant sur la nouvelle valeur de y comme on a opéré sur la première, on diminuera encore ce nombre d'une unité, et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous les radicaux de seconde espèce aient disparu.

Si l'on y posait $y = P_3$, il est visible que par des différenciations successives on éliminerait de même tous les radicaux d'espèce supérieure à la première, en commençant l'élimination par ceux de troisième espèce; et en général si l'on avait $y = P_n$, on chasserait par des opérations successives semblables tous les radicaux de n^e espèce, puis ceux de $(n-1)^e$ espèce, etc., d'où il résulte que y doit être une fonction irrationnelle de première espèce seulement. En d'autres termes, s'il existe une valeur algébrique de y, conformément à notre hypothèse, on pourra toujours, quelle qu'elle soit, en déduire, par des différenciations et des éliminations convenables, une valeur nouvelle débarrassée des radicaux d'espèce supérieure.

Puisque la valeur de y ne contient dès-lors que des radicaux de première espèce, elle est de la forme P_1 : posons donc

$$(1) \qquad y = P + E\sqrt[m]{Q} + F\sqrt[n]{R} + \ldots + H\sqrt[q]{S}.$$

Le second membre de cette égalité contient des radicaux dont on peut représenter le nombre par r, et dont $r-1$ au moins sont différents de $\sqrt[\mu]{L}$. Or, je dis que r doit être égal à l'unité, et qu'en outre le radical, qui peut seul rester dans la valeur de y, est précisément $\sqrt[\mu]{L}$.

Différencions en effet les deux membres de l'égalité précédente, et il viendra

$$\sqrt[\mu]{L} = P' + \frac{(E^m Q)'}{m E^m Q} E \sqrt[m]{Q} + \ldots + \frac{(H^q S)'}{q H^q S} H \sqrt[q]{S}.$$

Or, dans cette équation nouvelle un radical quelconque, tel que $\sqrt[m]{Q}$, ne peut pas disparaître s'il est essentiellement différent du radical $\sqrt[\mu]{L}$, qui se trouve au premier membre. Donc on pourra en tirer la valeur de $\sqrt[m]{Q}$, et en la reportant dans l'équation (1), le second membre de celle-ci ne contiendra plus que $r-1$ radicaux, puisque $\sqrt[m]{Q}$ se trouvera éliminé. D'ailleurs, après avoir réduit à $r-1$ le nombre des radicaux entrant dans y, ainsi que nous venons de le faire, rien n'empêche de réduire ce nombre à $r-2$, puis à $r-3$, par des opérations semblables. En continuant ainsi, il est bien clair qu'on parviendra à éliminer de l'équation (1) tous les radicaux du second membre qui diffèreront de $\sqrt[\mu]{L}$.

Donc, si l'intégrale $y = \int \sqrt[\mu]{L} \, . \, dx$ est exprimable algébriquement, sa valeur sera de la forme

$$\int \sqrt[\mu]{L} \, . \, dx = P + \mathcal{C} \, . \, \sqrt[\mu]{L};$$

et comme cette valeur différenciée donne

$$\sqrt[\mu]{L} = P' + \sqrt[\mu]{L} \left(\mathcal{C}' + \frac{\mathcal{C} L'}{\mu L} \right),$$

et que le radical $\sqrt[\mu]{L}$ est irréductible, on en conclut que le terme rationnel P' doit être nul de lui-même, indépendamment des termes irrationnels; en conséquence il vient $P' = 0$, d'où $P =$ constante; ce qui complète la démonstration du théorème qu'on voulait établir.

[8] L'équation

$$\int \sqrt[\mu]{L} \, . \, dx = \mathcal{C} \sqrt[\mu]{L} + \text{constante}$$

peut être mise sous une forme plus commode. En effet, puisque L

est une fonction rationnelle, on peut poser $L = \frac{M}{N}$, M et N désignant des polynomes entiers, et on a

$$\sqrt[\mu]{L} = \sqrt[\mu]{\frac{M}{N}} = \frac{M}{\sqrt[\mu]{NM^{\mu-1}}} = \frac{M}{\sqrt[\mu]{T}},$$

en faisant $NM^{\mu-1} = T$. De même on trouve

$$\mathcal{C}\sqrt[\mu]{L} = \frac{\mathcal{C}M}{\sqrt[\mu]{T}} = \frac{\theta}{\sqrt[\mu]{T}};$$

pourvu que l'on représente par une seule lettre θ le produit $\mathcal{C}M$. D'après cela on obtiendra :

$$\int \sqrt[\mu]{L}\,.\,dx = \int \frac{M\,dx}{\sqrt[\mu]{T}} = \frac{\vartheta}{\sqrt[\mu]{T}} + \text{constante},$$

ϑ étant une fonction rationnelle déterminée par l'égalité

$$(2) \qquad MT = T\frac{d\vartheta}{dx} - \frac{\theta}{\mu}\,.\,T',$$

qui se déduit de la précédente, en en différenciant les deux membres.

[9] Maintenant je dis que ϑ est non-seulement une fonction rationnelle, mais même une fonction entière de x. En effet, si ϑ n'est pas un polynome entier, on pourra toujours exprimer ϑ par le quotient de deux fonctions entières X et Y, c'est-à-dire faire $\vartheta = \frac{X}{Y}$, la fraction $\frac{X}{Y}$ étant réduite à sa plus simple expression.

Pour prouver que ϑ est un polynome entier, il suffit de faire voir que Y ne contient pas la variable x, ou, en d'autres termes, que nul facteur linéaire $x + a$ ne peut diviser Y. Or, soit, s'il est possible, $x + a$ un facteur qui entre α fois dans Y, et posons en conséquence :

$$Y = Z(x+a)^{\alpha},$$

Z étant une fonction entière non divisible par $x + a$. Je vais montrer que cette hypothèse conduit à une absurdité.

On en conclut en effet

$$\theta = \frac{X}{Z(x+a)^{\alpha}},$$

et

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\alpha X}{Z(x+a)^{\alpha+1}} + \frac{ZX' - XZ'}{Z^2(x+a)^{\alpha}}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (2), on trouve :

$$(3)\quad Z^2MT(x+a)^{\alpha} = -\alpha\frac{TXZ}{x+a} + T(ZX' - XZ') - \frac{XZ}{\mu}.T'.$$

La forme de cette équation prouve que TXZ doit être divisible par $x+a$; et comme il est évident que ce binome ne peut diviser ni X, ni Z, il en résulte qu'il doit diviser T. Pour fixer les idées, supposons qu'il le divise m fois, et faisons $T = (x+a)^m.V$, d'où :

$$T' = (x+a)^m.V' + mV(x+a)^{m-1}.$$

Substituons au lieu de T et T' leurs valeurs dans l'équation (3); divisons-la ensuite par $(x+a)^m$, et il nous sera aisé de lui donner la forme

$$Z^2MV(x+a)^{\alpha} = V(ZX' - XZ') - \frac{XZ}{\mu}.V' - \left(\alpha + \frac{m}{\mu}\right)\frac{XZV}{x+a}.$$

Or, cette dernière égalité est évidemment absurde; car, pour qu'elle pût subsister, il faudrait que le produit XZV fût divisible par $x+a$, et cela n'a pas lieu, puisque le facteur premier $x+a$ ne divise aucune des trois quantités X, Z, V. Donc Y ne peut pas contenir x : donc θ est une fonction entière.

Ainsi me voilà conduit à ce théorème :

Si l'équation

$$(2)\quad MT = T\frac{d\theta}{dx} - \frac{\theta}{\mu}.T'$$

n'est satisfaite par aucune valeur entière de θ, *l'intégrale*

$$\int \sqrt[\mu]{L}.dx = \int \frac{M dx}{\sqrt[\mu]{T}}$$

n'est pas exprimable algébriquement; et dans le cas contraire, on a

$$\int \sqrt[\mu]{\mathrm{L}}\,.\,dx = \int \frac{\mathrm{M}dx}{\sqrt[\mu]{\mathrm{T}}} = \frac{\theta}{\sqrt[\mu]{\mathrm{T}}} + \text{constante.}$$

[10] Tout se réduit donc à chercher s'il y a une valeur entière de θ satisfaisant à l'équation (2), et à trouver cette valeur quand elle existe; problème que l'on résoudra aisément par la méthode des coefficients indéterminés, dès que l'on connaîtra l'exposant de la puissance la plus élevée de x, entrant dans le polynome θ. On pourrait calculer cet exposant par la règle du parallélogramme analytique, mais il est une manière plus simple d'y parvenir. En effet (si l'on excepte d'abord le cas particulier où le degré du polynome T est un multiple exact de μ, tel que $\sigma\mu$), à la seule inspection de l'égalité

$$\int \frac{\mathrm{M}dx}{\sqrt[\mu]{\mathrm{T}}} = \frac{\theta}{\sqrt[\mu]{\mathrm{T}}} + \text{constante},$$

il est aisé de comprendre que, toutes les fois qu'elle a lieu, le polynome entier θ est d'un degré supérieur d'une unité au degré de M; en sorte que si M est, comme nous le supposerons, du degré m, θ ne peut être que du degré $m+1$. On se convaincra de la vérité de cette assertion, si l'on développe les deux membres de l'équation en séries ordonnées suivant les puissances décroissantes de x, et si l'on observe que les premiers termes de ces séries doivent être les mêmes de part et d'autre.

A cause de la constante arbitraire introduite par l'intégration, ce raisonnement et la conclusion qu'on en tire pourraient se trouver en défaut, si le degré de T était un nombre de la forme de $\sigma\mu$, et si en même temps celui de θ avait σ pour valeur; par où l'on comprend que le degré du polynome θ est toujours un des deux nombres $m+1$ ou σ, dont il suffit évidemment d'essayer le plus considérable, et dont le second ne peut être adopté qu'autant qu'il est entier. Pour fixer les idées admettons que $m+1$ soit $> \sigma$. Il résulte de là que,

pour s'assurer de la possibilité ou de l'impossibilité de notre équation, il suffit de faire

$$\theta = ax^{m+1} + bx^m + \ldots + hx + k$$
$$\frac{d\theta}{dx} = (m+1)ax^m + mbx^{m-1} + \ldots + h,$$

puis de substituer ces valeurs dans (2), et de chercher s'il y a moyen de satisfaire à l'égalité résultante, en déterminant convenablement les constantes $a, b, \ldots h, k$. Ces calculs une fois effectués, on connaîtra tout ce qu'il est possible de savoir sur l'intégration de la formule différentielle $\sqrt[\mu]{\mathrm{L}}.dx$ en termes algébriques. En effet, ou l'on obtiendra pour la fonction entière θ une valeur convenable, et on aura

$$\int \sqrt[\mu]{\mathrm{L}}.dx = \frac{\theta}{\sqrt[\mu]{\mathrm{T}}} + \text{constante},$$

ou l'on démontrera que cette valeur entière de θ n'existe pas, ce qui établira rigoureusement l'impossibilité d'exprimer $\int \sqrt[\mu]{\mathrm{L}}.dx$ sous forme algébrique. Notre méthode ne dépend, comme on voit, de la résolution d'aucune équation de degré supérieur (*).

[11] La recherche du polynome entier θ se réduit toujours à celle d'un polynome de degré moindre. Pour le prouver, j'observe que l'équation (2) peut être écrite ainsi

$$\frac{\theta \mathrm{T}'}{\mu \mathrm{T}} = \frac{d\theta}{dx} - \mathrm{M}.$$

Il en résulte que le produit $\theta \mathrm{T}'$ étant divisé par T, doit fournir un quotient entier. On sait d'ailleurs que, si l'on divise T' par T, on formera par là une fraction irréductible, ayant pour dénominateur le produit de tous les facteurs premiers inégaux renfermés dans T. Si donc on désigne ce produit par la lettre U, il est mani-

(*) Quand on pose $\mu = 1$, la quantité que nous intégrons devient une simple fraction rationnelle, d'où il résulte que l'intégration d'une fraction rationnelle $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$ (quand elle peut s'effectuer algébriquement) n'exige pas la connaissance des racines de l'équation $\mathrm{N} = 0$, connaissance que la méthode ordinaire semble supposer.

feste que θ doit être exactement divisible par U ; en sorte que l'on pourra poser $\theta = U \cdot \frac{?}{S}$, $\frac{?}{S}$ étant un nouveau polynome entier. La détermination de la fonction inconnue θ est ainsi ramenée à celle d'une autre fonction entière $\frac{?}{S}$, laquelle évidemment est de degré moindre.

[12] En admettant que le polynome entier U soit du degré n, et se rappelant que θ est du degré $m+1$ ou du degré σ, on voit que $\frac{?}{S}$ sera du degré $m-n+1$ ou du degré $\sigma-n$: si donc les quantités $m-n+1$ et $\sigma-n$ étaient négatives, on tomberait dans une absurdité, et il faudrait en conclure que l'intégrale $\int \sqrt[n]{L} \cdot dx = \int \frac{M dx}{\sqrt[n]{T}}$ n'est pas exprimable algébriquement. Supposons, par exemple, que le polynome T n'ait ni facteurs doubles, ni facteurs triples, etc., c'est-à-dire supposons que l'équation $T = 0$ n'ait pas de racines égales : alors T et T′ n'ayant aucun diviseur commun, on trouvera $U = T$, et le degré n de U sera en même temps le degré de T; de plus on aura constamment $\sigma - n < 0$: l'intégrale $\int \frac{M dx}{\sqrt[n]{T}}$ sera donc impossible sous forme algébrique, si le degré m du polynome M placé en numérateur est inférieur à $n-1$.

Un corollaire très-simple de ce théorème, c'est que les fonctions elliptiques de première et de seconde espèce, savoir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

$$\int \frac{dx(1-c^2x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

n'ont jamais une valeur algébrique en fonction de l'indéterminée x.

On démontre avec une égale facilité que l'intégrale $\int \frac{M dx}{P \sqrt[n]{Q}}$, dans laquelle P et Q sont des polynomes tels que les deux équations $P = 0$, $Q = 0$, n'aient ni racines communes, ni racines égales, est toujours impossible sous forme algébrique, tant que P ne se

réduit pas à une simple constante, et que les deux fonctions M et P sont premières entre elles. En effet, si l'on égale la quantité $\frac{M}{P\sqrt[\mu]{Q}}$ à la formule $\frac{M}{\sqrt[\mu]{T}}$, prise pour type général, on a $T = P^{\mu}Q$, d'où l'on tire

$$T' = P^{\mu}.Q' + \mu P^{\mu-1}.Q.P'.$$

Portant ces valeurs de T et T′ dans l'équation (2), on obtient

$$MPQ = PQ\frac{d\theta}{dx} - \frac{\theta}{\mu}PQ' - \theta QP'.$$

Cette égalité prouve que le produit $\theta QP'$ doit être divisible par P. Or, les deux quantités QP′ et P ne peuvent avoir aucun diviseur commun, puisque les équations $P = 0$, $Q = 0$, n'ont par hypothèse ni racines communes, ni racines égales. Par conséquent θ est divisible par P, et, en nommant z le quotient, il est permis de poser

$$\theta = Pz, \quad \frac{d\theta}{dx} = P\frac{dz}{dx} + zP';$$

ce qui transforme notre équation dans la suivante

$$MQ = P\left(Q\frac{dz}{dx} - \frac{Q'z}{\mu}\right),$$

dont l'impossibilité est manifeste, puisque le second membre est divisible et le premier non divisible par P. Donc, en admettant nos hypothèses, l'intégrale $\int \frac{M dx}{P\sqrt[\mu]{Q}}$, qui renferme, comme cas particulier, la fonction elliptique de troisième espèce, n'est pas exprimable algébriquement.

IV.

[13] Soit enfin proposé de trouver $\int P_1 dx$, P_1 étant une fonction irrationnelle de première espèce. On sait que P_1 peut se mettre sous la forme

$$P_1 = P + \sqrt[m]{Q} + \sqrt[n]{R} + \ldots + \sqrt[q]{S};$$

fonction dans laquelle on suppose toujours les radicaux irréductibles et dissemblables. Cela posé, il est facile de voir que l'intégrale $\int P_1 . dx$ (si elle est algébrique) ne peut contenir d'autres radicaux que ceux qui entrent dans P_1; et, en effet, tous ceux que l'on voudrait introduire dans l'expression de cette intégrale pourraient en être éliminés par des différenciations successives, ainsi qu'on l'a vu n° 7. La valeur de $\int P_1 . dx$ est donc nécessairement de la forme

$$\int P_1 . dx = F + G\sqrt[m]{Q} + H\sqrt[n]{R} + \ldots + K\sqrt[q]{S}.$$

F, G, H, ... K, désignant des quantités rationnelles. En la différenciant, on en conclut

$$P_1 = F' + \frac{(G^m Q)'}{mG^m Q} G\sqrt[m]{Q} + \frac{(H^n R)'}{nH^n R} H\sqrt[n]{R} + \ldots + \frac{(K^q S)'}{qK^q S} K\sqrt[q]{S}.$$

Or, je dis que cette égalité ne peut subsister qu'autant que l'on a

$$F' = P$$

$$\frac{(G^m Q)'}{mG^m Q} G\sqrt[m]{Q} = \sqrt[m]{Q}$$

$$\frac{(H^n R)'}{nH^n R} H\sqrt[n]{R} = \sqrt[n]{R}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{(K^q S)'}{qK^q S} K\sqrt[q]{S} = \sqrt[q]{S},$$

c'est-à-dire que les diverses irrationnelles irréductibles, entrant dans les deux membres, doivent être les mêmes de part et d'autre. Cette proposition découle assez naturellement de ce que chaque radical du degré m, pris dans toute la généralité de l'algèbre, possède m valeurs différentes. On pourrait aussi la déduire des principes du calcul différentiel : c'est ce que nous montrerons tout à l'heure : pour le moment regardons-la comme démontrée, et intégrons les équations que nous venons d'écrire, nous obtiendrons

$$\int \mathrm{P}dx = \mathrm{F}$$
$$\int \sqrt[m]{\mathrm{Q}}dx = \mathrm{G}\sqrt[m]{\mathrm{Q}}$$
$$\int \sqrt[n]{\mathrm{R}}dx = \mathrm{H}\sqrt[n]{\mathrm{R}}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\int \sqrt[q]{\mathrm{S}}dx = \mathrm{K}\sqrt[q]{\mathrm{S}}.$$

Donc, pour que la différentielle $\mathrm{P}_1 dx$ soit intégrable algébriquement, il faut que les diverses parties dont se compose $\int \mathrm{P}_1 dx$, savoir

$$\int \mathrm{P}dx,\ \int \sqrt[m]{\mathrm{Q}}dx,\ \int \sqrt[n]{\mathrm{R}}dx,\ \ldots\ \int \sqrt[q]{\mathrm{S}}dx,$$

aient chacune en particulier une valeur algébrique, et comme on a donné, quels que soient L et μ, le moyen d'intégrer (quand cela est possible algébriquement) la différentielle $\mu\sqrt{\mathrm{L}}dx$, il en résulte qu'en appliquant notre méthode à l'intégrale $\int \mathrm{P}_1 dx$, on pourra toujours décider si elle est exprimable en termes algébriques, et de plus en donner la valeur algébrique toutes les fois qu'elle existera. Ainsi se trouve démontré, pour le cas des fonctions irrationnelles de première espèce, le théorème énoncé au commencement de ce mémoire, théorème que l'on peut regarder comme le résumé de nos recherches, et qui constitue en quelque sorte une nouvelle méthode d'intégration. On peut étendre cette méthode aux fonctions irrationnelles de seconde ou de troisième espèce, et en général à une fonction algébrique quelconque : c'est ce que je prouverai dans un autre écrit; mais la théorie doit alors être présentée sous un point de vue un peu différent.

[14] Dans le numéro qui précède j'ai promis la démonstration d'un théorème d'algèbre dont j'ai fait usage, et qui revient au fond à ceci :

Soient F, G, H, ... K, *et* P, Q, ... S, *des quantités rationnelles : les radicaux* $\sqrt[m]{\mathrm{P}}$, $\sqrt[n]{\mathrm{Q}}$, ... $\sqrt[q]{\mathrm{S}}$, *étant irréductibles et dissemblables, je dis que la somme*

$$F + G\sqrt[m]{P} + H\sqrt[n]{Q} + \ldots + K\sqrt[q]{S}$$

ne peut être égale à zéro, si l'on n'a pas

$$F = 0, \quad G = 0, \quad H = 0, \quad \ldots \quad K = 0.$$

Cette proposition est évidente lorsque la somme ne contient qu'un seul radical. Supposons donc qu'elle soit vraie, lorsqu'il y a μ radicaux, et prouvons qu'elle le sera encore si le nombre des radicaux devient $\mu + 1$. Cela fait, il est clair que notre théorème sera démontré.

Or, si, en supposant $\mu + 1$ radicaux dans le second membre, on pouvait avoir

$$(\alpha) \qquad F + G\sqrt[m]{P} + H\sqrt[n]{Q} + \ldots + K\sqrt[q]{S} = 0,$$

sans que F, G, H, ... K, fussent nuls, comme en différenciant cette équation on trouve

$$F' + \frac{(G^m P)'}{mG^m P} G\sqrt[m]{P} + \frac{(H^n Q)'}{nH^n Q} H\sqrt[n]{Q} + \ldots + \frac{(K^q S)'}{qK^q S} K\sqrt[q]{S} = 0,$$

on pourrait, par le secours de cette dernière égalité, éliminer $\sqrt[m]{P}$: on tomberait par suite sur une équation ne contenant plus que μ radicaux, et par conséquent impossible dans l'hypothèse admise : donc l'équation (α) l'est aussi : ce qu'il fallait prouver. Cette conclusion suppose toutefois que dans l'égalité obtenue par l'élimination de $\sqrt[m]{P}$ les coefficients des divers termes ne sont pas nuls séparément. Or, par exemple, après l'élimination de $\sqrt[m]{P}$, le terme indépendant des radicaux est

$$F\frac{(G^m P)'}{mG^m P} - F';$$

si donc il pouvait être nul, c'est qu'on aurait

$$\frac{G\sqrt[m]{P}}{F} = \text{constante},$$

ce qui est absurde, puisque $\sqrt[m]{P}$ est irrationnel.

De même le coefficient de $\sqrt[n]{Q}$, après l'élimination de $\sqrt[m]{P}$, est

$$H\left[\frac{(G^m P)'}{mG^m P} - \frac{(H^n Q)'}{nH^n Q}\right].$$

Si donc il pouvait être nul, c'est qu'on aurait

$$\frac{G\sqrt[m]{P}}{H\sqrt[n]{Q}} = \text{constante};$$

ce qui est absurde, puisque, par hypothèse, $\sqrt[m]{P}$ et $\sqrt[n]{Q}$ sont des radicaux dissemblables.

[15] Cette manière d'établir un théorème, que l'on néglige ordinairement de démontrer, me paraissant très-simple, je n'ai pas cru devoir l'omettre. La proposition algébrique dont nous venons de nous occuper trouve son analogue en arithmétique; et même elle devient alors beaucoup plus difficile à démontrer; car dans ce cas on ne peut faire usage ni du calcul différentiel, ni du principe de la multiplicité des valeurs d'un radical. Ainsi, par exemple, si $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega$, sont des nombres rationnels quelconques, et $a, b, c, \ldots h$, des nombres entiers positifs non carrés, on peut prouver que

$$\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b} + \gamma\sqrt{c} + \ldots + \omega\sqrt{h}$$

est toujours une quantité irrationnelle, pourvu toutefois que $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}, \ldots \sqrt{h}$, soient des radicaux essentiellement différents l'un de l'autre. Mais cette proposition, quoique très-élémentaire, et l'une des plus simples que l'on puisse rechercher en ce genre, est à elle seule plus difficile à établir que notre théorème général d'algèbre. Au reste, les questions arithmétiques dont nous venons de dire un mot ont été traitées amplement, par M. Libri, dans un mémoire inédit sur les *irrationnelles numériques;* et nous en avons parlé ici uniquement pour rappeler que la priorité lui appartient, et qu'en cherchant à prouver le théorème du n° 14, nous n'avons fait que marcher sur ses traces, et

transporter aux fonctions algébriques ce qu'il avait démontré pour les nombres.

V.

[16] Dans la *Théorie analytique des probabilités* de Laplace on trouve quelques réflexions relatives à la question de calcul intégral qui a fait l'objet de ce mémoire : nous allons rapporter textuellement l'article qui les contient :

« Leibnitz a indiqué le premier, dans les *Actes de Leipsic*, les « transcendantes à exposants variables, et par là il a complété le « système des éléments dont une fonction finie peut être com- « posée; car toute fonction finie explicite se réduit, en dernière « analyse, à des grandeurs simples, ajoutées ou soustraites les « unes des autres, multipliées ou divisées entre elles, élevées à « des puissances constantes ou variables. Les racines des équations « formées de ces éléments en sont des fonctions implicites. C'est « ainsi que, c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est « l'unité, le logarithme de a est la racine de l'équation transcen- « dante $c^{t} - a = 0$. On peut encore considérer les quantités loga- « rithmiques comme des fonctions exponentielles dont les exposants « sont infiniment petits. Ainsi, X log X′ est égal à $\frac{X'^{Xdx} - 1}{dx}$.

« Toutes les modifications de grandeur que l'on peut concevoir aux « exposants se trouvent donc représentées par les quantités expo- « nentielles, algébriques et logarithmiques. Ces quantités et leurs « fonctions embrassent par conséquent toutes les fonctions finies « explicites; et les racines des équations formées de fonctions sem- « blables embrassent toutes les fonctions finies implicites.

« Ces quantités sont essentiellement différentes : l'exponen- « tielle a^{x}, par exemple, ne peut jamais être identique avec une « fonction algébrique de x; car toute fonction algébrique est « réductible dans une série descendante de la forme $kx^{n} + k'x^{n-n'} + \ldots$

« Or, il est facile de démontrer que, a étant supposé plus grand

« que l'unité, et x étant infini, a^x est infiniment plus grand que « kx^n, quelque grands que l'on suppose k et n. Pareillement il est « aisé de voir que dans le cas de x infini, x est infiniment plus « grand que $k(\log x)^n$. Les fonctions exponentielles, algébriques, « logarithmiques, d'une variable indéterminée, ne peuvent donc « pas rentrer les unes dans les autres : les quantités algébriques « tiennent le milieu entre les exponentielles et les logarithmes : « les exposants, lorsque la variable est infinie, pouvant être consi- « dérés comme infinis dans les exponentielles, finis dans les « quantités algébriques, et infiniment petits dans les quantités « logarithmiques.

« On peut encore établir en principe qu'une fonction radicale « d'une variable ne peut pas être identique avec une fonction ra- « tionnelle de la même variable, ou avec une autre fonction radi- « cale. Ainsi, $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ est essentiellement distinct de $(1+x^3)^{\frac{1}{2}}$ et « de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$.

« Ces principes, fondés sur la nature même des fonctions, « peuvent être d'une grande utilité dans les recherches analytiques, « en indiquant les formes dont les fonctions, que l'on se propose « de trouver, sont susceptibles, et en prouvant leur impossibilité « dans un grand nombre de cas; mais alors il faut être bien sûr « de n'omettre aucune des formes possibles. Ainsi, la différencia- « tion laissant subsister les quantités exponentielles et radicales, « et ne faisant disparaître les quantités logarithmiques qu'autant « qu'elles sont multipliées par des constantes, on doit en conclure « que l'intégrale d'une fonction différentielle ne peut contenir d'autres « quantités exponentielles et radicales que celles qui sont conte- « nues dans cette fonction. Par ce moyen, j'ai reconnu que l'on « ne peut pas obtenir, en fonction finie explicite ou implicite de « la variable x, l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\alpha x^2+\epsilon x^4}}. »$$

La proposition que Laplace énonce relativement à l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\alpha x^2+\beta x^4}}$$

est très-belle, mais la démonstration n'en a pas été publiée, et nous ignorons de quelle nature cette démonstration pouvait être. Il est singulier que ce grand géomètre, qui fait mention, en plusieurs endroits de ses ouvrages, du théorème dont il s'agit, ne soit jamais entré à ce sujet dans des détails suffisants. Nous le regrettons d'autant plus que ce théorème ne nous paraît nullement facile à établir d'une manière tout à fait rigoureuse, et que cependant une rigueur absolue est indispensable dans ces recherches, qui ont quelque rapport avec la théorie des nombres.

[17] Le principe posé par Laplace *que l'integrale d'une fonction différentielle ne peut contenir d'autres quantités radicales que celles qui entrent dans cette fonction*, est certainement d'une grande utilité dans le calcul intégral. Le théorème du n° 7 n'en est au fond qu'un cas particulier. En étendant un peu les considérations dont on a fait usage au numéro cité, on parviendra sans peine à une démonstration générale du principe dont nous parlons, pour tous les cas où l'intégrale est algébrique; mais il convient d'en modifier l'énoncé, afin d'obtenir des résultats plus simples. Voici comment il faut procéder.

Étant donnée une fonction algébrique quelconque y, on peut toujours regarder y comme la racine d'une équation algébrique de la forme

$$(a) \qquad y^{\mu} - \mathrm{L}y^{\mu-1} - \ldots - \mathrm{M}y - \mathrm{N} = 0,$$

L, ... M, N, désignant des fonctions rationnelles de x : cela posé, la question que nous devons résoudre consiste à déterminer la forme sous laquelle on peut écrire l'intégrale $\int y dx$, lorsque cette intégrale est exprimable algébriquement. Or, la quantité $\int y dx$

étant une fonction algébrique de x, d'après l'hypothèse; et les deux lettres y et x étant liées entre elles par l'équation (a), on est libre de regarder $\int y dx$ comme une fonction algébrique de x et y. Je vais démontrer que notre intégrale est nécessairement équivalente à une fonction rationnelle de x et y. Ce théorème est, comme on voit, celui de Laplace, énoncé d'une autre manière. La démonstration que j'en donnerai repose sur deux lemmes que voici :

PREMIER LEMME.

La fonction y de x étant racine de l'équation (a), on peut toujours exprimer $\frac{dy}{dx}$ par une fonction rationnelle de x et y. Et en général la dérivée $\frac{1}{dx} df(x,y)$ d'une fonction algébrique $f(x,y)$ ne peut contenir d'autres radicaux que ceux qui entrent dans $f(x,y)$.

La première partie du lemme résulte de ce que l'équation (a) donne, par les règles du calcul différentiel,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^{\mu-1}\frac{d\mathrm{L}}{dx} + \ldots\ldots + y\frac{d\mathrm{M}}{dx} + \frac{d\mathrm{N}}{dx}}{\mu y^{\mu-1} - \ldots\ldots - \mathrm{M}},$$

et la seconde devient évidente, en observant qu'on a

$$\frac{1}{dx} df(x,y) = \frac{df(x,y)}{dx} + \frac{df(x,y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

et en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur.

SECOND LEMME.

Les fonctions algébriques de deux variables x et y, qui contiennent des irrationnelles, peuvent être classées en espèces

tout aussi bien et par la même méthode que les fonctions d'une seule variable.

La proposition contenue dans ce lemme est évidente; car il suffit de répéter mot à mot, pour les fonctions de deux variables, ce que j'ai dit au n° 2 et dans les numéros suivants, pour les fonctions d'une seule variable.

L'analogie est si complète que nous ferons dans les deux cas usage de la même notation. Ainsi, dans ce qui va suivre, je désignerai par des lettres majuscules sans indices, telles que P, Q, R, ... les fonctions rationnelles de x et y, et par ces lettres avec l'indice n, comme P_n, Q_n, R_n, ... les fonctions irrationnelles de n^e espèce.

On pourra donc toujours écrire

$$\begin{aligned} P_1 &= P + \sqrt[m]{Q} + \sqrt[n]{R} + \ldots + \sqrt[q]{S} \\ P_2 &= P_1 + \sqrt[m]{Q_1} + \sqrt[n]{R_1} + \ldots + \sqrt[q]{S_1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned} P_1 &= P + E\sqrt[m]{Q} + F\sqrt[n]{R} + \ldots + H\sqrt[q]{S} \\ P_2 &= P_1 + E_1\sqrt[m]{Q_1} + F_1\sqrt[n]{R_1} + \ldots + H_1\sqrt[q]{S_1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

[18] Maintenant on peut démontrer le théorème général déjà énoncé *que si l'intégrale* $\int y dx$ *est exprimable algébriquement, sa valeur sera égale à une certaine fonction rationnelle de* x *et* y.

Car si la quantité $\int y dx$ n'est pas une fonction rationnelle de x et y, elle sera une fonction irrationnelle de première espèce ou de seconde espèce, &c. Supposons d'abord que $\int y dx$ soit une fonction irrationnelle de première espèce, et qu'on ait en conséquence

$$\int y dx = P + E\sqrt[m]{Q} + \ldots + H\sqrt[q]{S}.$$

Le second membre contient un certain nombre r de radicaux de première espèce : or, je dis que l'on peut éliminer tous ces radicaux par des différenciations successives. En effet, en différenciant $\int y dx$, et indiquant les dérivées par des accents à la manière de Lagrange, c'est-à-dire faisant $\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dx}{dx} = P'$, etc., on obtient

$$y = P' + \frac{(E^m Q)'}{m E^m Q} E \sqrt[m]{Q} + \ldots + \frac{(H^q S)'}{q H^q S} H \sqrt[q]{S}.$$

De cette égalité on peut tirer la valeur de $\sqrt[m]{Q}$, et en portant cette valeur dans celle de $\int y dx$, il ne restera dans cette dernière que $r - 1$ radicaux. Si donc on la différencie une seconde fois, il est incontestable qu'on éliminera de même un second radical, et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous les radicaux aient disparu; alors $\int y dx$ sera exprimée rationnellement en fonction de x et y. Donc $\int y dx$ ne peut pas être une fonction irrationnelle de première espèce.

On ne peut pas avoir davantage $\int y dx = P_2$, c'est-à-dire que $\int y dx$ ne peut pas être une fonction irrationnelle de seconde espèce, car si cela était, et qu'on eût

$$\int y dx = P_1 + E_1 \sqrt[m]{Q_1} + \ldots + H_1 \sqrt[q]{S_1},$$

on en déduirait

$$y = P'_1 + \frac{(E_1 {}^m Q_1)'}{m E_1 {}^m Q_1} E_1 \sqrt[m]{Q_1} + \ldots + \frac{(H_1 {}^q S_1)'}{q H_1 {}^q S_1} H_1 \sqrt[q]{S_1}.$$

Par conséquent, on pourrait éliminer $\sqrt[m]{Q_1}$, et on éliminerait ensuite les autres radicaux, en répétant la même opération plusieurs fois. Ayant chassé par là tous les radicaux de seconde espèce contenus dans la valeur de $\int y dx$, cette intégrale se trouverait réduite à la forme $\int y dx = P_1$, qui a été démontré impossible. On prouvera par des raisonnements semblables que $\int y dx$ ne peut pas non plus être une fonction irrationnelle de troi-

sième espèce, etc. Donc $\int y dx$ est une fonction rationnelle de x et y, ce qu'il fallait démontrer. Ce théorème est la base de la méthode générale que nous exposerons dans un second mémoire, pour déterminer les intégrales dont la valeur est exprimable algébriquement.

SECOND MÉMOIRE

SUR

LA DÉTERMINATION DES INTÉGRALES

DONT LA VALEUR EST ALGÉBRIQUE;

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

[1] Les recherches contenues dans le présent mémoire sont relatives à cette partie de l'analyse dans laquelle on veut remonter d'une quantité différentielle connue à la fonction primitive dont cette quantité est dérivée. Le théorème général que je me propose de démontrer est le suivant :

Étant donnée une fonction algébrique quelconque, explicite ou implicite, savoir y, on pourra toujours décider si elle a ou n'a pas pour intégrale une fonction explicite ou implicite algébrique : à quoi j'ajouterai *que si la question est résolue affirmativement, le même procédé fera connaître la valeur de* $\int y dx$ (*).

(*) On appelle fonction algébrique explicite toute fonction qui se trouve écrite, sous forme finie, à l'aide des simples signes employés dans les éléments d'algèbre, et fonction algébrique implicite toute fonction que l'on peut regarder comme la racine d'une équation algébrique, résoluble ou non par radicaux.

Pour bien comprendre cet énoncé, on observera que lorsqu'on demande l'intégrale d'une fonction algébrique déterminée y, il est permis de distinguer deux cas : le premier a lieu si l'intégrale $\int y dx$ est elle-même algébrique; le second cas est celui où l'intégrale représente une fonction transcendante. Vous les rencontrez l'un et l'autre en intégrant une fraction rationnelle $\frac{M}{N}$; car si parmi les dénominateurs des diverses fractions simples dans lesquelles on partage $\frac{M}{N}$ pour en obtenir l'intégrale, il n'y en a aucun du premier degré, le résultat de l'intégration sera une fonction algébrique; et il contiendra au contraire des logarithmes si quelqu'un de ces dénominateurs est du premier degré.

Or, puisque l'intégrale d'une fonction algébrique appartient, suivant les circonstances, à la classe des fonctions algébriques ou à la classe des fonctions transcendantes, on peut se proposer de reconnaître avec certitude dans laquelle de ces deux classes doit être rangée l'intégrale d'une fonction algébrique dont la composition est connue, ou qui doit satisfaire à une équation donnée. Ce problème est précisément celui qui fait l'objet de ce mémoire; mais j'y ai joint une condition que je crois essentielle, savoir, que le même procédé qui fait connaître si la quantité $\int y dx$ est ou n'est pas algébrique, fournisse aussi la valeur de cette intégrale toutes les fois qu'on peut l'obtenir algébriquement, soit d'une manière explicite, soit d'une manière implicite.

La question que j'ai résolue me paraît analogue à celles que nous offrent la division algébrique et l'extraction des racines. En effet, lorsqu'il s'agit de diviser un polynome par un autre, on recherche d'abord si le quotient est de même nature que le dividende et le diviseur, c'est-à-dire s'il est composé comme eux d'un nombre fini de termes Et quand on extrait la racine d'une fonction entière, on examine en premier lieu si cette racine peut ou non être exprimée par une fonction entière; semblablement, lorsqu'il est question de l'intégrale d'une fonction algébrique, il

convient, avant tout, de s'assurer si elle est ou n'est pas exprimable algébriquement.

[2] Le théorème général du numéro précédent se trouve énoncé dans un mémoire que j'ai présenté à l'Académie des sciences, le 7 décembre 1832. Je l'ai même démontré alors dans le cas particulier où y est une fonction irrationnelle de première espèce, c'est-à-dire dans le cas particulier où les quantités soumises aux radicaux de y sont rationnelles. J'avertissais dès lors que la méthode développée dans ce premier travail pouvait être étendue avec les modifications convenables à des fonctions algébriques quelconques, et je me propose aujourd'hui d'opérer cette extension. Mais, avant d'entrer en matière, je dois rappeler au lecteur un écrit d'Abel, dont j'ai eu connaissance depuis peu, et qui est intitulé : *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques* (*). On y trouve un théorème général *sur la forme dont l'intégrale d'une différentielle quelconque algébrique est susceptible, en supposant cette intégrale exprimable par des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques,* à la suite duquel l'auteur ajoute en note : « J'ai fondé sur ce théorème une nouvelle théorie de l'intégration « des formules différentielles que je n'ai pu encore publier jusqu'à « présent. Cette théorie franchit beaucoup les résultats connus, « et son but est d'opérer toutes les réductions possibles des inté- « grales des formules algébriques, à l'aide des fonctions algébriques « et logarithmiques. On parvient par-là à réduire au plus petit « nombre possible les intégrales qui représentent sous forme finie « toutes les intégrales d'une même classe. » Il résulte de là qu'Abel s'était occupé de questions semblables à celles que nous avons résolues, mais je ne crois pas que son mémoire ait été publié, et j'ignore si même on a trouvé là-dessus quelque chose d'achevé dans ses papiers

(*) Voyez le tome IV du Journal de M. Crelle, page 264. Il sera bon de lire aussi la lettre d'Abel à M. Legendre, imprimée dans le même Journal, tome VI, page 77.

[3] Le théorème d'Abel, mentionné plus haut (quand on le restreint au cas particulier dont je veux m'occuper), consiste en ce que si l'intégrale $\int y dx$, dans laquelle y désigne une fonction algébrique quelconque, explicite ou implicite, peut être obtenue algébriquement, soit d'une manière explicite, soit d'une manière implicite, la valeur de cette intégrale pourra toujours être exprimée par une certaine fonction rationnelle de x et y. Ce théorème (tout à fait semblable à celui que l'on trouve dans mon premier mémoire) ne diffère pas au fond de celui posé par Laplace, *que l'intégrale d'une fonction différentielle ne peut contenir d'autres quantités radicales que celles qui entrent dans cette fonction;* et on doit dire qu'il était connu des premiers inventeurs de l'analyse infinitésimale. Leibnitz en effet le regardait comme une conséquence nécessaire de ce que si l'intégrale $\int y dx$ est égale à une fonction algébrique Φ, les deux membres de l'égalité

$$\int y dx = \Phi,$$

dans laquelle les divers radicaux ont, comme on sait, des valeurs multiples, doivent, pour être identiques, posséder le même nombre de valeurs. Mais cette démonstration et celle de Laplace semblent un peu vagues, et ne sont point admises par tous les géomètres. Il n'était donc pas inutile d'y substituer des considérations tout à fait rigoureuses.

[4] Quoi qu'il en soit, le théorème précédent fait connaître les irrationnelles irréductibles qui peuvent entrer dans la valeur de $\int y dx$. Mais ces irrationnelles (que l'on ramène aisément à une forme entière) peuvent être affectées de coefficients rationnels et fonctions de x qui nous sont inconnus; soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ces coefficients. Pour les déterminer, on différencie l'équation

$$\int y dx = \Phi,$$

ce qui produit une équation purement algébrique,

$$y = \frac{d\Phi}{dx},$$

dont les deux membres, pour être identiques, doivent être composés des mêmes irrationnelles respectivement affectées des mêmes coefficients. Égalant donc entre eux ces coefficients de part et d'autre, on trouve un certain nombre μ d'équations différentielles linéaires du premier ordre, contenant μ quantités inconnues α, $\beta, \gamma, \ldots$ qui doivent avoir des valeurs rationnelles toutes les fois que l'intégrale $\int y dx$ est réellement algébrique. Si donc on avait une méthode infaillible pour découvrir quand ces équations linéaires peuvent être satisfaites par des valeurs rationnelles de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ et si de plus cette méthode fournissait (lorsque cela est possible) les valeurs rationnelles convenables de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ le théorème énoncé en tête de ce mémoire se trouverait démontré.

Ainsi tout se réduit à traiter cette question nouvelle, qui, par elle-même et indépendamment de ses applications, paraît très-intéressante :

Étant donné un système de μ équations différentielles linéaires à coefficients rationnels et du premier ordre, contenant μ inconnues, trouver les intégrales rationnelles qui peuvent satisfaire à ces équations.

Ou, ce qui est la même chose :

Étant donnée une équation linéaire à coefficients rationnels renfermant une seule inconnue y, mais d'un ordre quelconque, déterminer toutes les valeurs rationnelles de y qui rendent son premier membre égal à zéro.

Or, la solution de ce problème est exposée dans mon mémoire avec de longs développements.

Cet exposé rapide indique à peu près la marche que j'ai suivie. On voit qu'elle renferme deux parties distinctes. L'une consiste à déterminer la forme algébrique que peut prendre l'intégrale $\int y dx$, et l'autre a pour objet de découvrir la valeur des quantités rationnelles qui entrent dans cette intégrale comme coefficients. Je passe sous silence quelques problèmes accessoires qu'il m'a fallu résoudre pour atteindre le but proposé, et je me hâte d'entrer en matière.

Je partagerai ce mémoire en deux sections. Dans la première je chercherai les intégrales rationnelles d'une équation linéaire différentielle d'un ordre quelconque à coefficients rationnels, et je donnerai dans la seconde la théorie générale de l'intégrale $\int y dx$, en tant qu'elle est exprimable algébriquement, y étant une fonction algébrique prise à volonté.

SECTION PREMIÈRE

OÙ L'ON RÉSOUT CETTE QUESTION :

Étant donnée une équation linéaire d'un ordre quelconque à coefficients rationnels, trouver les intégrales particulières exprimées par des fonctions rationnelles de x, qui satisfont à cette équation ; ou démontrer qu'il n'existe pas de telles intégrales.

I.

[5] Considérons l'équation différentielle linéaire d'un ordre quelconque μ

$$(A)\quad P\frac{d^\mu y}{dx^\mu} + Q\frac{d^{\mu-1}y}{dx^{\mu-1}} + \ldots + R\frac{dy}{dx} + Sy = T,$$

P, Q, ... R, S, T, étant des fonctions algébriques rationnelles de x, ou mieux des polynomes entiers, ce qui revient au même, puisque l'on peut chasser les dénominateurs : on demande de déterminer toutes les valeurs rationnelles, c'est-à-dire toutes les valeurs de la forme $y = \frac{X}{Y}$ (X et Y étant des fonctions entières) qui satisfont à cette équation.

Si l'on se bornait à demander les intégrales entières, telles que

$$y = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Cx + D,$$

dont la proposée est susceptible, le problème n'offrirait aucune

difficulté. Par la règle connue du parallélogramme analytique, on calculera d'abord l'exposant m; substituant ensuite dans l'équation (A), au lieu de $y, \frac{dy}{dx}, \ldots$ leurs valeurs respectives,

$$y = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + C + D,$$
$$\frac{dy}{dx} = mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + \ldots + C,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

puis égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x réunies dans le premier membre, on obtiendra un certain nombre d'équations de condition, et on s'assurera s'il est possible ou non d'y satisfaire, en attribuant aux coefficients indéterminés A, B, ... C, D, des valeurs convenables. On n'aura besoin dans cette recherche que des formules connues pour la résolution d'un système d'équations du premier degré.

Je supposerai donc ici, comme je l'ai déjà fait dans mon premier mémoire, que l'on sache trouver les intégrales entières de l'équation (A), et je ramènerai à ce cas simple celui plus compliqué où l'on se propose de trouver les intégrales dont la valeur est une fraction rationnelle $\frac{X}{Y}$. Or, la détermination des intégrales de cette dernière espèce se réduirait de suite à la détermination des intégrales entières, si le dénominateur Y était connu; car en posant $y = \frac{\theta}{Y}$ et chassant y de l'équation (A), on tombera sur une équation différentielle qui sera de l'ordre μ comme la proposée, mais où l'inconnue θ, substituée à y par cette transformation, devra avoir la valeur entière $\theta = X$.

Et même il n'est pas nécessaire de connaître Y : il suffit de connaître un polynome entier L divisible par Y; car soit $\frac{L}{Y} = M$, on aura

$$y = \frac{X}{Y} = \frac{MX}{MY} = \frac{MX}{L}.$$

Donc si l'on fait $y = \frac{\theta}{L}$, l'équation différentielle transformée sera satisfaite par l'expression entière $\theta = MX$.

Ainsi notre but principal, dans la question qui nous occupe, doit être de découvrir le dénominateur Y; ce à quoi nous parviendrons en généralisant la méthode exposée dans notre premier mémoire, méthode uniquement fondée sur les théorèmes relatifs à la décomposition des polynomes algébriques en facteurs, et à leur divisibilité les uns par les autres.

Comme on risquerait d'être obscur en appliquant nos principes à l'équation générale (A), nous en ferons d'abord l'exposition sur les équations particulières du premier et du second ordre. De là on déduira facilement la marche à suivre s'il s'agit d'équations d'ordre supérieur.

II.

[6] *Équation différentielle du premier ordre :* P, Q, R, désignant des polynomes entiers donnés, on propose de satisfaire, s'il est possible, à l'équation linéaire du premier ordre

$$P\frac{dy}{dx} + Qy + R = 0, \tag{1}$$

par une valeur rationnelle $y = \frac{X}{Y}$ où l'on peut toujours supposer X et Y premiers entre eux. On a vu que pour répondre à cette question il suffit de déterminer Y.

Je vais d'abord montrer que les facteurs premiers qui entrent dans Y entrent aussi dans le polynome P; en sorte que si, par exemple, $x + a$ est un diviseur de Y, ce sera en même temps un diviseur de P. Pour le faire voir, admettons que Y soit généralement de la forme

$$Y = Z(x+a)^{\alpha},$$

Z étant un polynome non divisible par $x+a$, et α un nombre entier positif quelconque. En différenciant y, savoir :

$$y = \frac{X}{Z(x+a)^{\alpha}},$$

et représentant $\frac{dX}{dx}$ par X', $\frac{dZ}{dx}$ par Z', je trouve

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha X}{Z(x+a)^{\alpha+1}} + \frac{ZX'-XZ'}{Z^2(x+a)^{\alpha}},$$

et portant ces valeurs dans l'équation (1), j'obtiens

$$-\frac{\alpha PX}{Z(x+a)^{\alpha+1}} + \frac{P(ZX'-XZ')}{Z^2(x+a)^{\alpha}} + \frac{QX}{Z(x+a)^{\alpha}} + R = 0,$$

égalité qu'on peut écrire ainsi

$$\frac{\alpha PXZ}{x+a} = P(ZX'-XZ') + QZX + RZ^2(x+a)^{\alpha}.$$

Le second membre étant une fonction entière, le premier doit être aussi une fonction entière; mais $x+a$ ne divise pas Z, et il ne divise pas non plus X, puisque la fraction $\frac{X}{Y}$ a été réduite à sa plus simple expression. Donc $x+a$ doit être un diviseur de P, ce qu'on voulait prouver.

[7] D'après la démonstration précédente, le dénominateur Y se compose du produit des facteurs premiers de P, élevés à des puissances inconnues. Si donc on désigne ces facteurs premiers par $x+a$, $x+b$, $x+c$, ... Y sera nécessairement de la forme

$$Y = (x+a)^{\alpha}(x+b)^{\beta}(x+c)^{\gamma} \ldots .$$

et l'on aura

$$y = \frac{X}{Y} = \frac{X}{(x+a)^{\alpha}(x+b)^{\beta}(x+c)\ldots}$$

D'après la manière dont on arrive à cette valeur de y, les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont des nombres entiers nuls ou positifs. Toutefois, il y aura plus de généralité et d'élégance à les regarder comme pouvant prendre indifféremment des valeurs entières positives ou des valeurs entières négatives. Pour développer cette idée d'une manière précise, examinons spécialement l'exposant α : les mêmes réflexions seront applicables à $\beta, \gamma, \ldots$.

On sait que α indique combien de fois le binome $x+a$ est diviseur de Y : or, on peut avoir $\alpha = 0$ ou $\alpha > 0$, et il importe de distinguer ces deux cas. En effet, puisque X et Y sont premiers entre eux, le facteur $x+a$, qui entrera dans Y avec un exposant α différent de zéro, sera par cela même exclu de X, où il pourrait évidemment se trouver dans l'hypothèse contraire.

Si donc α est > 0, $x+a$ ne divisera pas X; et dès lors, dans la valeur de y, savoir :

$$y = \frac{X}{(x+a)^{\alpha}(x+b)^{\beta}(x+c)^{\gamma}\ldots}$$

$x+a$ se trouvera au dénominateur avec un exposant positif α, et ne se trouvera pas au numérateur.

Mais si l'on a $\alpha = 0$, le binome $x+a$ pourra diviser X : si donc on suppose en général qu'il le divise σ fois, et que pour exprimer cette circonstance on remplace X par $X(x+a)^{\sigma}$, la valeur de y deviendra

$$y = \frac{X(x+a)^{\sigma}}{(x+b)^{\beta}(x+c)^{\gamma}\ldots} = \frac{X}{(x+a)^{-\sigma}(x+b)^{\beta}(x+c)^{\gamma}\ldots}$$

et elle reprendra par conséquent la forme

$$y = \frac{X}{(x+a)^{\alpha}(x+b)^{\beta}(x+c)^{\gamma}\ldots}$$

si l'on pose $-\sigma = \alpha$.

On voit par là que dans tous les cas possibles il est permis de faire

$$y = \frac{\mathrm{X}}{(x+a)^{\alpha}(x+b)^{\beta}(x+c)^{\gamma}....}$$

X n'étant divisible par aucun des facteurs $x+a$, $x+b$, $x+c$,... pourvu que l'on regarde les lettres α, β, γ,... comme susceptibles d'exprimer un nombre entier quelconque positif, nul ou négatif.

[8] Il reste à déterminer les exposants α, β, γ,.... Si on les connaît une fois, on possédera par cela même le dénominateur de y; et d'après ce qu'on a vu n° 5, notre problème pourra être regardé comme résolu. J'ajouterai qu'il le serait encore si au lieu de trouver α, β, γ,.... on avait seulement des limites supérieures de ces exposants. Soient en effet λ, μ, ν,.... des nombres entiers respectivement supérieurs à α, β, γ,.... en sorte que l'on ait

$$\alpha < \lambda, \quad \beta < \mu, \quad \gamma < \nu, \ldots.$$

inégalités qui indiquent que λ, μ, ν,.... sont plus rapprochés que α, β, γ,.... de l'infini positif. On pourra poser

$$\alpha = \lambda - \alpha', \quad \beta = \mu - \beta', \quad \gamma = \nu - \gamma' \ldots.$$

α', β', γ',.... étant > 0, il en résultera

$$y = \frac{\mathrm{X}(x+a)^{\alpha'}(x+b)^{\beta'}(x+c)^{\gamma'}....}{(x+a)^{\lambda}(x+b)^{\mu}(x+c)^{\nu}....}$$

Donc le dénominateur de y sera connu dans ce cas aussi bien que dans le précédent; et par le n° 5 il ne s'agira plus que de trouver les intégrales entières d'une équation linéaire donnée à coefficients rationnels, ce qu'on sait faire, ainsi que nous l'avons expliqué au long.

Du reste, si l'on veut s'assurer directement que la connaissance

des limites supérieures $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ suffit pour ramener la recherche présente à celle d'une intégrale entière, on observera que y ayant pour valeur

$$y = \frac{X(x+a)^{\alpha'}(x+b)^{\beta'}(x+c)^{\gamma'} \ldots}{(x+a)^{\lambda}(x+b)^{\mu}(x+c)^{\nu} \ldots},$$

si l'on pose

$$y = \frac{\theta}{(x+a)^{\lambda}(x+b)^{\mu}(x+c)^{\nu} \ldots}$$

et que dans l'équation (1) on substitue, au lieu de y, $\frac{dy}{dx}$ les valeurs résultant de cette hypothèse, on obtiendra une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels, qui devra être satisfaite par la valeur entière

$$\theta = X(x+a)^{\alpha'}(x+b)^{\beta'}(x+c)^{\gamma'} \ldots.$$

La discussion à laquelle nous venons de nous livrer prouve que si les nombres entiers $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ sont des limites supérieures de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ on peut, sans pousser plus loin l'examen, faire $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu, \gamma = \nu, \ldots$ et que l'on a alors

$$y = \frac{\theta}{(x+a)^{\lambda}(x+b)^{\mu}(x+c)^{\nu} \ldots}$$

θ désignant une fonction entière qui reste seule inconnue, et que l'on détermine aisément. On voit aussi que dans le cas où la valeur de α doit être choisie parmi certains nombres entiers connus, on pourra toujours, sans crainte d'erreur, faire α égal au plus grand de ces nombres; et en général, si l'on attribue à $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des valeurs supérieures à celles que ces exposants possèdent quand on réduit la fraction qui exprime y à sa plus simple expression, cela n'aura d'autre inconvénient que de compliquer les calculs, et ne nuira en aucune façon à la solution rigoureuse du problème.

[9] Il faut maintenant chercher les valeurs de α, β, γ, ... ou au moins des limites supérieures qu'elles ne puissent dépasser. Or, le moyen dont on doit faire usage étant le même pour tous ces exposants, il suffit d'indiquer la marche de l'opération sur un d'entre eux, α par exemple.

A cet effet je pose

$$(x+b)^{\beta}\,(x+c)^{\gamma}\,\ldots\ldots = \frac{Z}{V},$$

V et Z désignant des polynomes entiers non divisibles par $x+a$, et j'ai par suite

$$y = \frac{VX}{Z(x+a)^{\alpha}},$$

ou plus simplement

$$y = \frac{U}{Z(x+a)^{\alpha}},$$

en faisant $VX = U$. Il est manifeste que U n'est pas divisible par $x+a$.

En différenciant y, il vient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha U}{Z(x+a)^{\alpha+1}} + \frac{ZU'-UZ'}{Z^2(x+a)^{\alpha}}.$$

Je porte cette valeur et celle de y dans l'équation

$$(1) \qquad P\frac{dy}{dx} + Qy + R = 0,$$

et je trouve

$$-\frac{\alpha PU}{Z(x+a)^{\alpha+1}} + \frac{P(ZU'-UZ')}{Z^2(x+a)^{\alpha}} + \frac{QU}{Z(x+a)^{\alpha}} + R = 0.$$

Comme il importe de savoir combien de fois P, Q, R, contiennent le facteur $x+a$, je fais

$$P = L(x+a)^m, \quad Q = M(x+a)^n, \quad R = N(x+a)^p,$$

L, M, N, n'étant plus divisibles par ce binome. A l'aide de ces valeurs j'obtiens

$$(2)\quad NZ^z(x+a)^{\alpha+p} = ZU[\alpha L(x+a)^{m-1} - M(x+a)^n] - L(ZU' - UZ')(x+a)^m.$$

[10] Cela posé, il faut distinguer trois cas, suivant que l'on a $m-1>n$, ou $m-1<n$, ou $m-1=n$.

PREMIER CAS. $m-1>n$. Dans ce cas le second membre de l'équation (2) est divisible par $(x+a)^n$, et ne l'est pas par $(x+a)^{n+1}$, car il faudrait pour cela que ZUM fût divisible par $x+a$, ce qui est impossible, puisque chacun des facteurs Z, U, M, pris séparément, ne peut être divisible par $x+a$. Donc le premier membre doit être aussi divisible par $(x+a)^n$ sans être divisible par $(x+a)^{n+1}$, ce qui exige que l'on ait

$$\alpha + p = n, \quad \text{d'où} \quad \alpha = n - p.$$

DEUXIÈME CAS. $m-1<n$. Dans ce cas le second membre de l'équation (2) est divisible par $(x+a)^{m-1}$, et il ne peut devenir divisible par $(x+a)^m$ que si le terme $\alpha ZUL(x+a)^{m-1}$ (qui est divisible par $(x+a)^{m-1}$ seulement) disparaît, c'est-à-dire si $\alpha = 0$. Donc si α n'est pas nul, le premier membre doit être aussi divisible par $(x+a)^{m-1}$ sans l'être par $(x+a)^m$, ce qui exige que $\alpha = m-p-1$. Ainsi la valeur de α est ou $= 0$, ou $= m-p-1$; c'est-à-dire qu'il faut faire (d'après la remarque du n° 8) $\alpha = m-p-1$, si $m-p-1$ est > 0, et $\alpha = 0$, si $m-p-1 = 0$ ou est < 0.

TROISIÈME CAS. $m-1=n$. L'équation (2) devient alors

$$(3)\quad NZ^z(x+a)^{\alpha+p} = ZU(x+a)^{m-1}(\alpha L - M) - L(ZU' - UZ')(x+a)^m.$$

Le second membre est divisible par $(x+a)^{m-1}$, et il ne peut devenir divisible par une puissance de $x+a$ plus élevée, à moins que le produit

$$ZU(\alpha L - M)$$

ne soit divisible par $x+a$, et que par conséquent ce produit ne s'annule en y faisant $x=-a$. Si l'on appelle La, Ma, ce que deviennent L et M par l'hypothèse $x=-a$, on trouve donc

$$\alpha = \frac{Ma}{La}$$

pour la seule valeur de α qui puisse rendre le second membre de l'équation (3) divisible par $(x+a)^m$. Pour toute autre valeur de α, ce second membre est divisible par $(x+a)^{m-1}$, sans être divisible par $(x+a)^m$; il faut donc qu'il en soit de même du premier, et qu'on ait

$$\alpha = m - p - 1.$$

Par conséquent α ne peut avoir que l'une des deux valeurs $m-p-1$ et $\frac{Ma}{La}$, entre lesquelles on doit préférer la plus grande, d'après le n° 8. J'ai à peine besoin d'observer que si $\frac{Ma}{La}$ était une quantité fractionnaire, on ne pourrait pas la prendre pour valeur de α, et qu'alors on aurait nécessairement $\alpha = m-p-1$ (*).

III.

[11] *Équation linéaire du second ordre.* On demande les valeurs de la forme $y=\frac{X}{Y}$ qui satisfont à l'équation

$$(4) \qquad P\frac{d^2y}{dx^2} + Q\frac{dy}{dx} + Ry = S.$$

(*) Nous n'avons point parlé du cas particulier où l'on aurait $R=0$; mais si le terme fonction de x seulement, était nul dans l'équation (1), on le rétablirait en substituant à l'inconnue y une autre inconnue z, liée à la première par la relation $y=z+f(x)$: $f(x)$ est une fonction rationnelle quelconque, pourvu que la valeur $y=f(x)$ ne satisfasse pas à l'équation (1). En général il est permis de supposer que l'équation (A) du n° 5 possède un second membre, et même qu'elle est complète; car si elle ne l'était pas, on la rendrait telle par une transformation de la forme $y=zF(x)+f(x)$, en attribuant aux fonctions rationnelles $F(x)$, $f(x)$, des valeurs convenables. Je dis cela pour montrer en deux lignes que ma méthode n'est jamais en défaut : l'examen direct des cas particuliers dont il s'agit serait d'ailleurs extrêmement facile.

On a vu que pour résoudre cette question il suffit de déterminer Y. Or, je vais prouver que tout binome $x+a$ qui divise Y divise aussi P. Pour cela, je ferai en général

$$Y = Z(x+a)^{\alpha},$$

Z étant un polynome premier avec $x+a$, et α un nombre entier positif quelconque, il en résultera

$$y = \frac{X}{Z(x+a)^{\alpha}}.$$

Je différencie deux fois cette valeur pour avoir $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$; et afin de simplifier l'expression de ces dernières quantités, je fais

$$\frac{d\left(\frac{X}{Z}\right)}{dx} = \frac{X_1}{Z^2}$$

et

$$-2\alpha\frac{d\left(\frac{X}{Z}\right)}{dx} + (x+a)\frac{d^2\left(\frac{X}{Z}\right)}{dx^2} = \frac{X_2}{Z^3},$$

moyennant quoi je trouve

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha X}{Z(x+a)^{\alpha+1}} + \frac{X_1}{Z^2(x+a)^{\alpha}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)X}{Z(x+a)^{\alpha+2}} + \frac{X_2}{Z^3(x+a)^{\alpha+1}}.$$

Il est évident que X_1 et X_2 sont des fonctions entières. Si l'on substitue dans l'équation (4) ces valeurs et celle de y, et si l'on multiplie ensuite l'équation par $Z^3(x+a)^{\alpha+1}$, il vient

$$\frac{\alpha(\alpha+1)Z^2X.P}{x+a} + PX_2 - \alpha QZ^2X + (x+a)(QZX_1+RZ^2X) = SZ^3(x+a)^{\alpha+1}.$$

Cette équation prouve que Z^2XP doit être divisible par $x+a$; mais X et Z sont premiers avec $x+a$: donc ce binome divise P.

[12] Ainsi, lorsqu'il s'agit de l'équation différentielle du second ordre, comme lorsqu'il s'agit de l'équation différentielle du premier ordre, le dénominateur Y ne peut se composer que du produit des facteurs de P élevés à des puissances diverses. Imaginons donc que $x+a$, $x+b$, $x+c$, ... soient des facteurs premiers de P; Y devra être de la forme

$$Y = (x+a)^{\alpha}\,(x+b)^{\beta}\,(x+c)^{\gamma}\,\ldots\,.$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. étant des exposants nuls ou positifs. Ainsi la valeur de y devient

$$y = \frac{X}{(x+a)^{\alpha}\,(x+b)^{\beta}\,(x+c)^{\gamma}\,..}.$$

Lorsque α est > 0, $x+a$ ne doit pas entrer dans X, et il peut au contraire diviser X une ou plusieurs fois si $\alpha = 0$. Il résulte de là, par un raisonnement analogue à celui du n° 7, qu'il est toujours permis de faire

$$y = \frac{X}{(x+a)^{\alpha}\,(x+b)^{\beta}\,(x+c)^{\gamma}\,..};$$

et de supposer le numérateur X non divisible par $x+a, x+b, x+c,..$ pourvu que l'on convienne de regarder $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. comme des nombres entiers susceptibles de prendre indifféremment des valeurs positives, nulles ou négatives.

Il faut maintenant déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Pour faire connaître la marche à suivre, je vais chercher l'exposant α. A cet effet je pose

$$(x+b)^{\beta}\,(x+c)^{\gamma}\,\ldots\,. = \frac{Z}{V},$$

Z et V désignant des fonctions entières non divisibles par $x+a$, et j'en déduis

$$y = \frac{\mathrm{VX}}{\mathrm{Z}(x+a)^{\alpha}},$$

ou plus simplement

$$y = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{Z}(x+a)^{\alpha}};$$

en faisant $\mathrm{VX} = \mathrm{U}$. Il est clair que le polynome U n'est pas divisible par $x+a$.

Je différencie y deux fois, et pour abréger, je pose

$$\frac{d\left(\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{Z}}\right)}{dx} = \frac{\mathrm{U}_1}{\mathrm{Z}^2}$$

et

$$-2\alpha\frac{d\left(\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{Z}}\right)}{dx} + (x+a)\frac{d^2\left(\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{Z}}\right)}{dx^2} = \frac{\mathrm{U}_2}{\mathrm{Z}^3},$$

U_1 et U_2 représentant des fonctions entières; j'obtiens

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha\mathrm{U}}{\mathrm{Z}(x+a)^{\alpha+1}} + \frac{\mathrm{U}_1}{\mathrm{Z}^2(x+a)^{\alpha}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)\mathrm{U}}{\mathrm{Z}(x+a)^{\alpha+2}} + \frac{\mathrm{U}_2}{\mathrm{Z}^3(x+a)^{\alpha+1}}.$$

Portant ces valeurs et celle de y dans l'équation (4), elle devient

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha(\alpha+1)\mathrm{UP}}{\mathrm{Z}(x+a)^{\alpha+2}} - \frac{\alpha\mathrm{QU}}{\mathrm{Z}(x+a)^{\alpha+1}} + \frac{\mathrm{RU}}{\mathrm{Z}(x+a)^{\alpha}} - \mathrm{S}\\ + \frac{\mathrm{PU}_2}{\mathrm{Z}^3(x+a)^{\alpha+1}} + \frac{\mathrm{QU}_1}{\mathrm{Z}^2(x+a)^{\alpha}}\end{aligned}\right\} = 0.$$

Je chasse les dénominateurs; puis afin d'indiquer combien de fois P, R, S, contiennent $x+a$, je pose

$$P=L(x+a)^m,\ Q=M(x+a)^n,\ R=N(x+a)^p,\ S=O(x+a)^q,$$

L, M, N, O, n'étant plus divisibles par $x+a$. De la sorte j'arrive à l'équation définitive

$$(5)\quad Z^3O(x+a)^{\alpha+q}=\alpha(\alpha+1)UZ^2L(x+a)^{m-2}-\alpha UZ^2M(x+a)^{n-1}+UZ^2N(x+a)^p+U_2L(x+a)^{m-1}+U_1ZM(x+a)^n.$$

Cela posé, la détermination de l'exposant inconnu α dépend de la grandeur relative des trois nombres $m-2$, $n-1$, p. Nous allons parcourir les divers cas qui peuvent se présenter.

[13] Ils se réduisent à trois principaux. En effet, ou des trois nombres $m-2$, $n-1$, p, il y en a un plus petit que les deux autres; ou deux de ces nombres sont égaux entre eux, et plus petits que le troisième; ou enfin ces trois nombres sont égaux entre eux.

PREMIER CAS. Il se subdivise en trois autres; car puisque l'un des nombres $m-2$, $n-1$, p, est le plus petit, ce nombre le plus petit peut être ou p, ou $n-1$, ou $m-2$.

Si l'on a $p<m-2$ et $p<n-1$, le second membre de l'équation (5) est divisible par $(x+a)^p$, et n'est pas divisible par $(x+a)^{p+1}$; car, pour que cette dernière circonstance eût lieu, il faudrait que le terme

$$UZ^2.N(x+a)^p$$

fût divisible par $(x+a)^{p+1}$; et cela est impossible, puisque U, N et Z ne contiennent pas le facteur $x+a$. Donc le premier membre aussi doit renfermer $x+a$ à la puissance p, d'où l'on conclut :

$$\alpha=p-q.$$

Si l'on a $n-1<p$, $n-1<m-2$, le second membre de

l'équation (5) est divisible par $(x+a)^{n-1}$, et il ne peut devenir divisible par $(x+a)^n$ que si le terme

$$\alpha \mathrm{UZ^2M}(x+a)^{n-1}$$

disparaît, ce qui suppose $\alpha = 0$. Or, si le second membre est divisible par $(x+a)^{n-1}$ et n'est pas divisible par $(x+a)^n$, il en devra être de même du premier, en sorte qu'il viendra

$$\alpha = n - q - 1.$$

Donc la valeur de α ne peut être que $= 0$, ou $= n-q-1$; en sorte que, d'après la remarque du n° 8, on fera $\alpha = n-q-1$ si $n-q-1$ est > 0, et $\alpha = 0$ si $n-q-1 = 0$ ou est < 0.

Si l'on a $m-2 < n-1$ et $m-2 < p$, le second membre de l'équation (5) est divisible par $(x+a)^{m-2}$, et il ne pourrait devenir divisible par une puissance supérieure de $x+a$, que si le terme

$$\alpha(\alpha+1)\mathrm{UZ^2.L}(x+a)^{m-2},$$

qui n'est divisible que par $(x+a)^{m-2}$, était nul, c'est-à-dire si l'on avait $\alpha = 0$ ou $\alpha = -1$, valeurs dont la première est la plus grande. Mais si le second membre de l'équation (5) est divisible seulement par $(x+a)^{m-2}$, le premier doit jouir de la même propriété, ce qui exige que

$$\alpha = m - q - 2.$$

Ainsi l'exposant α ne peut être que l'un des trois nombres 0, -1, $m-q-2$, dont le plus grand doit être préféré. Il résulte de là qu'on aura $\alpha = m-q-2$, si $m-q-2$ est positif, et $\alpha = 0$ si $m-q-2$ est nul ou négatif.

Deuxième cas. Il se subdivise aussi en trois autres, car puisque l'on y suppose deux des nombres $m-2$, $n-1$, p, égaux entre eux et plus petits que le troisième, celui-ci peut être indifféremment $m-2$, $n-1$, ou p.

Si l'on a $p > m-2$ et $m-2 = n-1$, l'équation (5) devient

$$(6)\quad Z^3O(x+a)^{\alpha+q} = [\alpha(\alpha+1)L - \alpha M]UZ^2(x+a)^{m-2} + UZ^2N(x+a)^p + U_2L(x+a)^{m-1} + U_1ZM(x+a)^{m-1}.$$

Son second membre est toujours divisible par $(x+a)^{m-2}$, mais pour qu'il devienne divisible par une puissance de $x+a$ plus élevée, il faut que

$$\alpha(\alpha+1)L - \alpha M$$

soit un polynome divisible par $x+a$, ce qui peut arriver de deux manières : d'abord en posant $\alpha = 0$, ensuite en posant $\alpha = -1 + \frac{M_a}{L_a}$, M_a et L_a représentant ce que deviennent les polynomes M, L, quand on y fait $x = -a$. Or, si le second membre de l'équation (6) n'est divisible que par $(x+a)^{m-2}$, ce qui arrivera pour toute autre valeur de α, il faudra nécessairement qu'on ait $\alpha = m-q-2$. Donc α ne peut prendre que l'une des trois valeurs

$$0, \quad -1 + \frac{M_a}{L_a}, \quad \text{et} \quad m-q-2,$$

parmi lesquelles on préfèrera la plus grande : bien entendu que si la quantité $-1 + \frac{M_a}{L_a}$ était fractionnaire on n'en tiendrait aucun compte, puisque α doit être un exposant entier.

Si l'on a $n-1 > m-2$ et $m-2 = p$, l'équation (5) devient

$$(7)\quad Z^3O(x+a)^{\alpha+q} = [\alpha(\alpha+1)L + N]UZ^2(x+a)^{m-2} - \alpha UZ^2M(x+a)^{n-1} + U_2L(x+a)^{m-1} + U_1ZM(x+a)^n.$$

Son second membre est divisible par $(x+a)^{m-2}$; mais pour qu'il devienne divisible par $(x+a)^{m-1}$, il faudra que le polynome

$$\alpha(\alpha+1)L + N$$

soit divisible par $x+a$, c'est-à-dire que α soit racine de l'équation

$$\alpha(\alpha+1)L_a + N_a = 0,$$

L_a et N_a désignant ce que deviennent L et N lorsqu'on y fait $x=-a$. Je nomme α', α'', les deux racines de cette équation, dont on ne devra tenir compte que si elles sont entières. J'observe ensuite que si α est différent de α' et de α'', le second membre de l'équation (7) est divisible par $(x+a)^{m-2}$ seulement, d'où l'on conclut, par le raisonnement ordinaire

$$\alpha = m - q - 2.$$

Donc l'exposant α ne peut être que l'un des nombres α', α'', $m-q-2$; en sorte que d'après la remarque du n° 8 il faut poser $\alpha =$ le plus grand des trois.

Si l'on a $m-2>n-1$ et $n-1=p$, l'équation (5) devient

$$(8)\quad Z^3O(x+a)^{\alpha+q}=\alpha(\alpha+1)UZ^2L(x+a)^{m-2}+UZ^2(x+a)^{n-1}(N-\alpha M)+U_2L(x+a)^{m-1}+U_1ZM(x+a)^n.$$

Son second membre est divisible par $(x+a)^{n-1}$, et ne peut devenir divisible par $(x+a)^n$ que si $N-\alpha M$ est divisible par $x+a$, ce qui suppose $\alpha=\frac{N_a}{M_a}$, N_a et M_a désignant à l'ordinaire les valeurs de N, M, pour $x=-a$. Mais quand le second membre de l'équation (8) n'est pas divisible $(x+a)^n$, on en conclut sans peine que $\alpha=n-q-1$. Donc α ne peut être que $=n-q-1$ ou $=\frac{N_a}{M_a}$, en sorte que l'on doit poser $\alpha=n-q-1$, lorsque $\frac{N_a}{M_a}$ est fractionnaire, et $\alpha=$ la plus grande des deux quantités $n-q-1$, et $\frac{N_a}{M_a}$ lorsque $\frac{N_a}{M_a}$ est un nombre entier.

Troisième cas. Si l'on a $m-2=n-1=p$, l'équation (5) devient

$$(9)\quad Z^3O(x+a)^{\alpha+q}=UZ^2(x+a)^{m-1}\{\alpha(\alpha+1)L-\alpha M+N\}+U_2L(x+a)^{m-1}+U_1Z.M(x+a)^{m-1}.$$

Le second membre est divisible par $(x+a)^{m-2}$, et il est mani-

feste qu'il ne pourra être rendu divisible par une puissance de $x+a$ plus considérable qu'en égalant α à une des racines de l'équation

$$\alpha(\alpha+1)\mathrm{L}_a - \alpha\mathrm{M}_a + \mathrm{N}_a = 0,$$

L_a, M_a, N_a, ayant la signification précédemment indiquée. Soient α', α'', les deux racines de cette équation, dont il ne faudra tenir compte qu'autant qu'elles seront entières. On observera que si α est différent de α', α'', le second membre de l'équation (9) sera divisible par $(x+a)^{m-2}$, et non divisible par $(x+a)^{m-1}$, d'où résulte $\alpha = m-q-2$. Donc α doit avoir pour valeur un des trois nombres α', α'', $m-q-2$, et d'après la remarque du n° 8, on peut l'égaler au plus grand d'entre eux.

IV.

[14] *Équation linéaire d'un ordre quelconque.* La simplicité et surtout l'uniformité de la marche que nous avons suivie pour obtenir les intégrales rationnelles des équations linéaires du premier et du second ordre, prouvent suffisamment que cette marche est applicable à l'équation générale

$$(\mathrm{A})\quad \mathrm{P}\frac{d^\mu y}{dx^\mu} + \mathrm{Q}\frac{d^{\mu-1}y}{dx^{\mu-1}} + \ldots + \mathrm{R}\frac{dy}{dx} + \mathrm{S}y = \mathrm{T}.$$

Aussi aurons-nous peu de mots à ajouter pour rendre la chose évidente.

D'abord si la valeur $y = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}$ qui satisfait à l'équation (A) est réduite à sa forme la plus simple, on peut prouver que les facteurs premiers de Y divisent tous P. Soit en effet $x+a$ un de ces facteurs, et supposons qu'il entre α fois dans Y; faisons en conséquence

$$\mathrm{Y} = \mathrm{Z}(x+a)^\alpha,$$

d'où

$$y = \frac{X}{Z(x+a)^{\alpha}}.$$

Il est facile de voir que les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha X}{Z(x+a)^{\alpha+1}} + \frac{X_1}{Z^2(x+a)^{\alpha}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)X}{Z(x+a)^{\alpha+2}} + \frac{X_2}{Z^3(x+a)^{\alpha+1}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)X}{Z(x+a)^{\alpha+3}} + \frac{X_3}{Z^4(x+a)^{\alpha+2}}$$

. . . . . .

$$\frac{d^{\mu}y}{dx^{\mu}} = \pm\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)..(\alpha+\mu-1)X}{Z(x+a)^{\alpha+\mu}} + \frac{X_{\mu}}{Z^{\mu+1}(x+a)^{\alpha+\mu-1}},$$

$X_1, X_2, X_3, \ldots X_{\mu}$, désignant des polynomes entiers.

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (A), et que l'on multiplie ensuite cette équation par $Z^{\mu+1}(x+a)^{\alpha+\mu-1}$, il est évident que tous les termes dont elle se compose seront débarrassés de dénominateur, un seul excepté, lequel sera égal à

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+\mu-1)PZ^{\mu}X}{x+a}.$$

Donc le numérateur de ce terme devra être divisible par $x+a$, ce qui exige que $x+a$ soit un des facteurs premiers de P.

[15] D'après cela, si l'on désigne par $x+a, x+b, x+c, \ldots$ les diviseurs linéaires de P, y sera nécessairement de la forme

$$y = \frac{X}{(x+a)^{\alpha}(x+b)^{\beta}(x+c)^{\gamma}\ldots\ldots},$$

et si l'on regarde α, β, γ, ... comme pouvant exprimer des nombres entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs, il sera permis de supposer que X n'est divisible ni par $x+a$, ni par $x+b$, ni par $x+c$ .....

Maintenant pour déterminer α, β, γ, ... par exemple α, faisons

$$(x+b)^{\beta}(x+c)^{\gamma} \ldots\ldots = \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{V}},$$

puis

$$\mathrm{VX} = \mathrm{U},$$

ce qui donne

$$y = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{Z}(x+a)^{\alpha}},$$

où l'on peut supposer les polynomes Z et U non divisibles par $x+a$. On tire de là pour $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., des valeurs de la forme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha \mathrm{U}}{\mathrm{Z}(x+a)^{\alpha+1}} + \frac{\mathrm{U}_1}{\mathrm{Z}^2(x+a)^{\alpha}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^{\mu-1}y}{dx^{\mu-1}} = \mp \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\mu-2)\mathrm{U}}{\mathrm{Z}(x+a)^{\alpha+\mu-1}} + \frac{\mathrm{U}_{\mu-1}}{\mathrm{Z}^{\mu}(x+a)^{\alpha+\mu-2}}$$

$$\frac{d^{\mu}y}{dx^{\mu}} = \pm \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\mu-1)\mathrm{U}}{\mathrm{Z}(x+a)^{\alpha+\mu}} + \frac{\mathrm{U}_{\mu}}{\mathrm{Z}^{\mu+1}(x+a)^{\alpha+\mu-1}},$$

$\mathrm{U}_1, \ldots\ldots \mathrm{U}_{\mu-1}, \mathrm{U}_{\mu}$, étant des fonctions entières de x.

Je porte ces valeurs dans l'équation (A); et comme il est nécessaire de connaître la relation des coefficients P, Q, ... R, S, T, avec le binome $x+a$, je fais en outre

$$\begin{aligned} P &= (x+a)^m P_1 \\ Q &= (x+a)^n Q_1 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ R &= (x+a)^p R_1 \\ S &= (x+a)^q S_1 \\ T &= (x+a)^r T_1. \end{aligned}$$

Toutes opérations effectuées, il vient une égalité de la forme

$$(B) \qquad T_1 Z^{\mu+1}(x+a)^{\alpha+r} = Z^\mu . UK + L,$$

les quantités K, L, ayant les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} K = \pm\ & \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\mu-1)(x+a)^{m-\mu} . P_1 \\ \mp\ & \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\mu-2)(x+a)^{n-\mu+1} . Q_1 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\ & \alpha(x+a)^{p-1} R_1 \\ +\ & (x+a)^q S_1, \end{aligned}$$

et

$$L = P_1 U_\mu (x+a)^{m-\mu+1} + ZQ_1 U_{\mu-1}(x+a)^{n-\mu+2} + \dots . \\ \dots . + Z^{\mu-1} R_1 U_1 (x+a)^p.$$

Cela posé, pour déterminer α, il faudra examiner les divers cas qui peuvent se présenter suivant les valeurs relatives des nombres

$$m - \mu, \quad n - \mu + 1 \dots . p - 1, \quad q,$$

J'en examinerai deux seulement, lesquels montreront assez comment on discuterait les autres.

[16] Je supposerai en premier lieu que $m - \mu$ soit plus petit que tous les autres nombres

$$n - \mu + 1 \dots\dots . p - 1, \quad q.$$

Alors le second membre de l'équation (B) est divisible par $(x+a)^{m-\mu}$; mais pour qu'il devînt divisible par une puissance supérieure de $x+a$, il faudrait que le terme

$$\alpha(\alpha+1)\ldots\ldots(\alpha+\mu-1)(x+a)^{m-\mu}.Z^{\mu}UP_1,$$

contenu dans $Z^{\mu}UK$ disparût, ce qui suppose $\alpha=0$, $\alpha=-1\ldots$ ou $\alpha=-\mu+1$. D'ailleurs toutes les fois que le second membre de l'équation (B) est divisible par $(x+a)^{m-\mu}$ seulement, il faut que le premier contienne $x+a$ avec un exposant égal à $m-\mu$, c'est-à-dire qu'il faut que l'on ait $\alpha=m-\mu-r$. Donc la valeur de α doit être ou $m-\mu-r$, ou l'une de celles qu'on a précédemment écrites; et comme le raisonnement du n° 8 fait voir que dans le doute on doit préférer le nombre le plus fort, il en résulte que si $m-\mu-r$ est une quantité positive, on aura

$$\alpha = m-\mu-r;$$

et que si $m-\mu-r$ est une quantité nulle ou négative, on aura

$$\alpha = 0.$$

Le second cas que j'examinerai est celui où l'on a

$$m-\mu = n-\mu+1,\ldots\ldots = p-1 = q.$$

Le second membre de l'équation (B) est alors divisible par $(x+a)^{m-\mu}$; mais pour qu'il devînt divisible par $(x+a)^{m-\mu+1}$, il faudrait que le polynome K, qui prend évidemment la forme

$$K = (x+a)^{m-\mu}f(\alpha,x),$$

fût divisible par $(x+a)^{m-\mu+1}$: cette condition est exprimée par l'égalité

$$f(\alpha,-a) = 0,$$

dont on cherchera les racines entières α', α'', α''',... Cela posé, on observera que si α n'est pas un des nombres α', α'', α''',....

le second membre de l'équation (B), et par suite le premier, seront divisibles par $(x+a)^{m-\mu}$ seulement, ce qui exige que

$$\alpha = m - \mu - r.$$

Donc α aura pour valeur la plus grande des quantités $m-\mu-r$, α', α'', α''', ... Il importe de faire attention que non-seulement on n'a pas besoin des racines irrationnelles ou fractionnaires de l'équation

$$f(\alpha, -a) = 0,$$

mais qu'il suffit même d'avoir la plus grande de ces racines entières ou une limite supérieure à cette plus grande racine.

[17] La théorie que nous venons d'exposer ramènera, comme on l'a dit, la recherche des intégrales rationnelles de l'équation (A) à celle des intégrales entières d'une autre équation linéaire, lesquelles s'obtiendront sans difficulté. La rédaction qu'on vient de lire semble supposer essentiellement que le polynome P qui multiplie $\frac{d^\mu y}{dx^\mu}$ a été décomposé en facteurs. Cette hypothèse n'a rien d'inadmissible en soi, puisque la détermination des racines des équations numériques est une question d'un ordre inférieur, que l'on suppose généralement connue lorsqu'on s'occupe du calcul intégral. Toutefois on se formerait de notre méthode une idée très-inexacte, si l'on se figurait que, pour l'appliquer aux cas particuliers, on a besoin de résoudre certaines équations. Cela n'est point du tout nécessaire, et les géomètres versés dans la théorie des fonctions symétriques le comprendront d'abord. Que si, dans tout ce qui précède, j'ai supposé le polynome P décomposé en facteurs premiers, c'est uniquement pour simplifier les calculs, et reduire à un moindre nombre les cas particuliers, déjà très-nombreux, qu'on est obligé de discuter. Afin de rendre sensible à tout le monde la vérité des propositions que je viens d'énoncer, je vais reprendre en son entier, et sans supposer en aucune manière

qu'on sache trouver les racines incommensurables des équations), je vais reprendre, dis-je, la recherche des intégrales rationnelles de l'équation linéaire du premier ordre :

$$(1) \qquad P\frac{dy}{dx} + Qy + R = 0.$$

V.

[18] *Nouvelle discussion de l'équation linéaire du premier ordre.* En représentant par $y = \frac{X}{Y}$ la valeur rationnelle de y qui satisfait à l'équation (1), nous avons prouvé au n° 6 que le dénominateur Y ne peut être formé que du produit des facteurs premiers de P, élevés à des puissances inconnues. Comme il importe de savoir combien de fois ces facteurs entrent dans P, nous supposerons qu'on ait décomposé ce polynome par la méthode des racines égales en un produit de la forme

$$P = EF^2G^3 \ldots . K^n \ldots .$$

dans lequel E contient tous les diviseurs simples de P, F^2 ses diviseurs doubles, G^3 ses diviseurs triples, et en général K^n ceux qui s'y trouvent n fois. Les polynomes E, F, G,.... K... sont tels que les équations

$$E = 0, \quad F = 0, \quad G = 0, \ldots . \quad K = 0, \ldots .$$

nulle ne peut avoir de racines égales. Il résulte de là que si l'on désigne par E', F', G',... K',... les dérivées respectives E, F, G,... K,... les polynomes E et E' sont premiers entre eux, ainsi que F et F', G et G', K et K'; propriété qui nous sera utile par la suite.

Si l'on décompose par la pensée chacune des quantités E, F, G,.... K,.... en facteurs linéaires inégaux; si l'on fait en conséquence

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} &= (x+a)\ (x+a')\ (x+a'')\ \ldots\ldots \\
\mathrm{F} &= (x+b)\ (x+b')\ (x+b'')\ \ldots\ldots \\
\mathrm{G} &= (x+c)\ (x+c')\ (x+c'')\ \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathrm{K} &= (x+h)\ (x+h')\ (x+h'')\ \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

on sait que Y pourra contenir $x+a, x+a', \ldots x+b, x+b', \ldots$ élevés à des puissances diverses. On pourra donc regarder Y comme étant le produit de quantités de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&(x+a)^{\alpha}\ (x+a')^{\alpha'}\ (x+a'')^{\alpha''}\ \ldots\ldots \\
&(x+b)^{\beta}\ (x+b')^{\beta'}\ (x+b'')^{\beta''}\ \ldots\ldots \\
&(x+c)^{\gamma}\ (x+c')^{\gamma'}\ (x+c'')^{\gamma''}\ \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(x+h)^{\varepsilon}\ (x+h')^{\varepsilon'}\ (x+h'')^{\varepsilon''}\ \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Pour fixer les idées, je supposerai que α est le plus grand des exposants $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$; que β est de même plus grand que $\beta', \beta'' \ldots$; γ plus grand que $\gamma', \gamma'' \ldots$; et enfin ε plus grand que $\varepsilon', \varepsilon'' \ldots$. Si l'on multiplie ensemble les fonctions que je vais écrire

$$\begin{aligned}
&(x+a')^{\alpha-\alpha'}\ (x+a'')^{\alpha-\alpha''}\ \ldots\ldots \\
&(x+b')^{\beta-\beta'}\ (x+b'')^{\beta-\beta''}\ \ldots\ldots \\
&(x+c')^{\gamma-\gamma'}\ (x+c'')^{\gamma-\gamma''}\ \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(x+h')^{\varepsilon-\varepsilon'}\ (x+h'')^{\varepsilon-\varepsilon''}\ \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

on formera une fonction entière S telle que le produit SY sera égal à

$$E^{\alpha}\ F^{\beta}\ G^{\gamma}\ \ldots\ K^{\varepsilon}\ \ldots\ .$$

Maintenant on aura

$$y = \frac{X}{Y} = \frac{SX}{SY} = \frac{SX}{E^{\alpha} F^{\beta} G^{\gamma} \ldots K^{\varepsilon} \ldots}.$$

La valeur de y pourra donc se mettre sous la forme

$$y = \frac{V}{E^{\alpha} F^{\beta} G^{\gamma} \ldots K^{\varepsilon} \ldots};$$

et par des considérations semblables à celles du n° 7, on s'assurera qu'il est toujours permis d'y regarder V comme n'étant divisible par aucun des polynomes E, F, G, ... K; ... pourvu que l'on regarde les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon, \ldots$ comme susceptibles d'exprimer un nombre entier quelconque positif, nul ou négatif.

[19] Il reste à chercher $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon$. Voici la marche que l'on doit suivre pour déterminer ε.

On posera

$$\frac{E^{\alpha} F^{\beta} G^{\gamma} \ldots K^{\varepsilon} \ldots}{K^{\varepsilon}} = \frac{Z}{W},$$

W et Z désignant des polynomes entiers, que l'on peut regarder tous deux comme premiers avec le facteur K, et on aura par suite :

$$y = \frac{VW}{ZK^{\varepsilon}},$$

ou plus simplement :

$$y = \frac{U}{ZK^{\varepsilon}},$$

en faisant $VW = U$. Puisque W est premier avec K, et que V n'est pas divisible par K, le produit $VW = U$ ne le sera pas non plus.

En différenciant la valeur de y, il vient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varepsilon K'U}{ZK^{\varepsilon+1}} + \frac{ZU'-UZ'}{Z^2K^{\varepsilon}}.$$

Je porte cette valeur et celle de y dans l'équation

$$(1) \qquad P\frac{dy}{dx} + Qy + R = 0,$$

et je trouve

$$-\frac{\varepsilon PK'U}{ZK^{\varepsilon+1}} + \frac{P(ZU'-UZ')}{Z^2K^{\varepsilon}} + \frac{QU}{ZK^{\varepsilon}} + R = 0.$$

Mais P, Q, R, peuvent renfermer le facteur K. Pour le mettre en évidence, je fais

$$\begin{aligned} P &= EF^2G^3 \ldots\ldots K^n \ldots\ldots = LK^n \\ Q &= MK^p \\ R &= NK^q, \end{aligned}$$

L étant premier avec K, et M et N étant non divisibles par K, bien qu'ils puissent avoir certains facteurs communs avec ce polynome. A l'aide de ces valeurs j'obtiens

$$(\alpha) \quad NZ^2K^{\varepsilon+q} = \varepsilon ZULK'K^{n-1} - L(ZU'-UZ')K^n - ZUMK^p.$$

[20] Cela posé, il faut distinguer trois cas, suivant que l'on a $p > n-1$, $p < n-1$, $p = n-1$.

PREMIER CAS. $p > n-1$. Il est évident que le second membre de l'équation (α) est divisible par K^{n-1}; mais pour qu'il devienne divisible par K^n, il faut que l'on ait $\varepsilon = 0$. En effet, des trois termes qui le composent, les deux derniers sont divisibles par K^n; mais le premier, savoir, $\varepsilon ZULK'K^{n-1}$ ne peut pas l'être, car il faudrait pour cela que $\frac{ZULK'}{K}$ fût un polynome entier, chose impossible, vu que L, Z et K', sont premiers avec K, et que U n'est pas divisible par K.

Donc si l'on exclut l'hypothèse $\varepsilon = 0$, le premier membre de l'équation (α) doit aussi être divisible par K^{n-1} sans l'être par K^n, ce qui exige que l'on ait $\varepsilon = n-q-1$.

Il résulte de cette discussion que l'on ne peut choisir pour valeur de ε que l'un des deux membres 0 et $n-q-1$, dont le plus grand doit être préféré. D'après cela, si $n-q-1$ est > 0, on fera $\varepsilon = n-q-1$, et si $n-q-1$ est $= 0$ ou < 0, on fera $\varepsilon = 0$.

DEUXIÈME CAS. $p < n-1$. Si p est $< n-1$, faisons $n-1 = p+z$, l'équation (α) deviendra

$$(\beta) \quad NZ^2K^{\varepsilon+q} = ZUK^p(\varepsilon LK'K^z - M) - L(ZU' - UZ')K^{p+z+1}.$$

Le second membre est divisible par K^p; mais on ne peut pas savoir *à priori* s'il est ou s'il n'est pas divisible par une puissance de K plus considérable. Cela dépend de la manière dont le produit

$$ZU(\varepsilon LK'K^z - M)$$

est composé relativement à K. Si la valeur de ε est telle que ce produit ne soit pas divisible par K^{z+1}, il est manifeste que le second membre de l'équation (β) ne contiendra pas le facteur K^{p+z+1}, et sera tout au plus divisible par K^{p+z}. Donc le premier

membre aussi devra contenir le facteur K avec un exposant $< p + z + 1$; et on aura

$$\varepsilon + q < p + z + 1, \quad \text{d'où} : \varepsilon < p - q + z + 1.$$

Donc ε sera au plus égal à $p - q + z$; et d'après les réflexions du n° 8, on pourra poser $\varepsilon = p - q + z$.

Mais notre raisonnement cessera d'être exact si le produit

$$\mathrm{ZU}(\varepsilon \mathrm{LK'K^z} - \mathrm{M})$$

devient divisible par K^{z+1}, ce qui pourra arriver avec une valeur de ε convenablement choisie.

Donc on ne peut prendre pour ε que la valeur de $\varepsilon = p - q + z$, ou l'une des valeurs qui rendent la quantité

$$\mathrm{ZU}(\varepsilon \mathrm{LK'K^z} - \mathrm{M})$$

un multiple de K^{z+1}. Nous devons par conséquent fournir le moyen de déterminer ces dernières valeurs, que je nommerai ε', ε'', ε''', ... en excluant celles qui ne seraient pas entières. Lorsqu'elles seront connues, nous les joindrons à $p - q + z$, et nous adopterons pour valeur de ε le plus grand des nombres $p - q + z$, ε', ε'', ε''', ...

Ainsi nous avons à résoudre cette question d'algèbre : *Trouver les valeurs de* ε *qui peuvent rendre le produit* $\mathrm{ZU}(\varepsilon \mathrm{LK'K^z} - \mathrm{M})$ *divisible par le facteur donné* K^{z+1}.

On voit d'abord que Z et K étant premiers entre eux, les valeurs cherchées sont les mêmes que celles qui rendent

$$\mathrm{U}(\varepsilon \mathrm{LK'K^z} - \mathrm{M})$$

divisible par K^{z+1}. La détermination en semble au premier aspect assez difficile, parce que le polynome U ne nous est pas connu. Toutefois elle découle naturellement des principes de l'algèbre et du caractère de la fonction U, caractère qui consiste en ce qu'elle n'est pas divisible par K.

Il faut observer que les deux fonctions entières M et K^z étant données, on peut chercher leur plus grand commun diviseur Δ, et poser en conséquence

$$M = M_1\Delta, \quad K^z = K_1\Delta,$$

M_1 et K, étant premiers entre eux. De là il résulte

$$\frac{U(\varepsilon LK'K^z - M)}{K^{z+1}} = \frac{U(\varepsilon LK'K_1 + M_1)}{KK_1}.$$

Pour que le premier membre de cette égalité soit une fonction entière, il faut donc que le produit

$$U(\varepsilon LK'K_1 - M_1)$$

soit divisible par K; et comme on ajoute la condition que $\frac{U}{K}$ conserve une valeur fractionnaire, cela ne peut avoir lieu qu'autant que $\varepsilon LK'K_1 - M_1$ et K ont un commun diviseur. Opérez par conséquent sur ces deux polynomes comme pour chercher leur plus grand commun diviseur, jusqu'à ce que vous soyez parvenu à un reste $f(\varepsilon)$ indépendant de x. L'équation $f(\varepsilon) = 0$ vous fournira toutes les valeurs de ε qui satisfont à la question. Il ne vous restera donc plus qu'à chercher les racines entières de cette équation, ou plutôt sa plus grande racine entière, la seule dont on ait besoin. Or, tout cela est indépendant de la considération des racines incommensurables, en quoi gît la difficulté de la résolution des équations numériques.

Troisième cas. $p = n - 1$. Si l'on a $p = n - 1$, l'équation (α) devient

$$(\gamma) \qquad NZ^2K^{\epsilon+q} = ZUK^p(\varepsilon LK' - M) - L(ZU' - UZ')K^{p+1},$$

et il se présente encore un double examen à faire.

En effet, la valeur de ε peut être telle que le produit

$$U(\varepsilon LK' - M)$$

ne soit pas divisible par K, ou telle que ce produit soit au contraire divisible par K.

En admettant la première hypothèse, le second membre de l'équation (γ) sera divisible par K^p sans l'être par K^{p+1}, et l'on aura

$$\varepsilon + q = p, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon = p - q.$$

Donc on ne peut prendre pour ε que la valeur $\varepsilon = p - q$ ou l'une des valeurs $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \ldots$ qui rendent le polynome

$$U(\varepsilon L K' - M)$$

divisible par K, sans contredire toutefois notre hypothèse fondamentale que $\frac{U}{K}$ soit une fraction. Ces valeurs sont faciles à trouver. En effet, puisque la quantité

$$U(\varepsilon L K - M),$$

doit être divisible par K sans que $\frac{U}{K}$ cesse d'être fractionnaire, il faut que les deux fonctions $\varepsilon L K' - M$ et K aient un commun diviseur; il en résulte que l'on devra égaler à zéro le reste $f(\varepsilon)$ indépendant de x, obtenu en cherchant ce plus grand commun diviseur par les règles connues, et les racines entières de l'équation $f(\varepsilon) = 0$ seront les nombres $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \ldots$ dont on a besoin.

[21] Cette discussion détaillée fait assez connaître la nature du problème qui est l'objet de ce paragraphe, et le caractère des difficultés qu'il présente. Tout se réduit à déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ $\varepsilon \ldots$ et pour y parvenir on emploie, suivant les cas, deux procédés différents. Le premier est très-simple, et il suffit lorsque l'on a $p > n - 1$. Il ne diffère pas de celui dont nous avons fait un fréquent usage dans le paragraphe précédent. Le second est un peu plus compliqué; il dépend de la résolution d'une question

d'algebre, puisqu'il s'agit de trouver les valeurs de ε qui peuvent rendre

$$U(\varepsilon LK'K^{z} - M)$$

divisible par K^{z-1} : ce problème est déterminé, parce que l'on sous-entend cette condition essentielle que $\frac{U}{K}$ soit une fraction. La marche même du calcul indique suffisamment que la recherche des intégrales rationnelles d'une équation linéaire d'ordre supérieur dépend de principes tout à fait semblables à ceux que nous venons de mettre au jour; en sorte que nulle part cette recherche n'exige la connaissance des racines irrationnelles des équations numériques.

Maintenant, si l'on a un système de μ équations différentielles linéaires simultanées renfermant μ inconnues, il sera facile d'en obtenir les intégrales rationnelles, puisqu'on pourra éliminer toutes les inconnues, hors une qui se trouvera donnée par une équation linéaire semblable à notre équation (A). Bien entendu que les divers coefficients contenus dans les équations simultanées sont supposés des fonctions rationnelles de la variable indépendante x.

On pourrait, au lieu de chercher les intégrales rationnelles de l'équation linéaire (A), demander les intégrales exprimées par des fonctions irrationnelles de première espèce. Mais la solution de cette question est étrangère à l'objet du présent mémoire : je ne m'en occuperai donc pas ici, non plus que de l'extension de notre méthode aux équations non linéaires.

SECTION II,

OÙ L'ON RÉSOUT CETTE QUESTION :

y étant une fonction algébrique de x, trouver l'intégrale $\int y dx$ toutes les fois qu'elle est exprimable algébriquement.

[22] Nous nous occuperons dans cette section des moyens d'intégrer algébriquement ydx toutes les fois que cela est possible. Puisque y est une fonction algébrique de x, explicite ou implicite, on peut toujours considérer y comme étant racine d'une équation de la forme

$$(a) \qquad y^{\mu} - \mathrm{L}y^{\mu-1} - \ldots\ldots - \mathrm{M}y - \mathrm{N} = 0,$$

L, ... M, N, désignant des fonctions rationnelles de x. Cette équation est facile à obtenir lorsque y est une fonction explicite, et on doit la compter au nombre des données fondamentales de la question, lorsque y est une fonction implicite. Cela posé, l'intégrale $\int y dx$ dépend de la variable x, et il est permis de la regarder comme une fonction de x et y : or, je dis que si elle est exprimable algébriquement, sa valeur ne peut être qu'une fonction rationnelle de x et y. Ce théorème énoncé depuis longues années par les géomètres a été rigoureusement établi par Abel, dont j'adopterai ici la démonstration (*).

En faisant $\int y dx = u$, on voit que si la quantité u est une fonction algébrique, explicite ou implicite, de x et y, comme nous le supposons, il y aura entre x, y, u, une équation algébrique que je désignerai par

$$(b) \qquad f(x, y, u) = 0;$$

(*) La démonstration d'Abel est plus générale que celle que j'ai donnée du même théorème dans mon premier mémoire; car elle ne suppose pas *à priori* que la valeur algébrique de $\int y dx$ soit exprimable par radicaux en fonctions de x et y.

et dont le premier membre contiendra x, y, u, rationnellement et sous forme entière. Cette équation, qui fournira la valeur de u, sera, par rapport à cette inconnue, d'un certain degré Δ; et on a le droit de la regarder comme irréductible, c'est-à-dire d'admettre qu'il soit impossible que la fonction u puisse être racine d'une autre équation de la même forme, mais dont le degré serait moindre que Δ.

Dès lors il est incontestable, 1° que le premier membre de l'équation (b) ne sera jamais décomposable en deux facteurs rationnels, sans quoi on pourrait supprimer celui de ces facteurs qui serait étranger à la question, et abaisser par là le degré de l'équation; 2° que si l'équation (b) a une racine commune avec une autre équation de même forme $\mathrm{F}(x, y, u) = 0$, toutes les racines de la première satisferont à la seconde; car si la chose se passait autrement, les deux polynomes $f(x, y, u)$, $\mathrm{F}(x, y, u)$ auraient un commun diviseur dont le degré serait moindre que Δ, et par conséquent $f(x, y, u)$ se trouverait décomposable en deux facteurs rationnels, ce qui ne se peut.

Maintenant, pour que l'équation

$$\int y x d = u$$

soit satisfaite, il faut et il suffit que l'on ait

$$y = \frac{du}{dx}.$$

Mais en différenciant les équations (a) et (b), il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^{\mu-1}\frac{d\mathrm{L}}{dx} + \cdots\cdots + y\frac{d\mathrm{M}}{dx} + \frac{d\mathrm{N}}{dx}}{\mu y^{\mu-1} - (\mu-1)\mathrm{L}y^{\mu-2} - \cdots\cdots - \mathrm{M}}$$

et

$$\frac{df(x,y,u)}{dx} + \frac{df(x,y,u)}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df(x,y,u)}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 0.$$

En combinant ces deux égalités, on en déduira pour $\frac{du}{dx}$ une valeur rationnelle en fonction de x, y, u, valeur que j'écrirai ainsi :

$$\frac{du}{dx} = \frac{\varphi(x,y,u)}{\psi(x,y,u)},$$

en mettant en évidence son numérateur et son dénominateur, et d'où résultera

$$y = \frac{\varphi(x,y,u)}{\psi(x,y,u)}.$$

Donc pour que l'équation $\int y dx = u$ ait lieu, il faut et il suffit que la valeur de u soit telle qu'on ait à la fois

$$(b) \qquad f(x,y,u) = 0;$$

$$(c) \qquad y\psi(x,y,u) - \Phi(x,y,u) = 0.$$

Mais nous avons démontré que si l'une des racines de l'équation (b) satisfait à l'équation (c), les autres y satisferont aussi. Donc en nommant u_1, u_2, u_3, ... u_δ, toutes les racines de l'équation (b), si l'intégrale $\int y dx$ peut être exprimée par la première u_1, elle pourra également être exprimée par les autres u_2, u_3, ... u_δ, d'où il résulte, en ajoutant toutes ces valeurs, que l'on aura

$$\int y dx = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_\delta}{\delta}.$$

D'ailleurs, par la théorie des fonctions symétriques, le second membre de cette dernière égalité est exprimable rationnellement au moyen des coefficients de u dans l'équation (b) (lesquels sont eux-mêmes rationnels en x et y). Donc la valeur de $\int y dx$, quand elle est algébrique, se trouve égale à une fonction rationnelle de x et y, ce qu'on voulait prouver.

[23] D'après ce théorème, la valeur de $\int y dx$ peut être écrite ainsi :

$$\int y dx = \frac{f(x,y)}{F(x,y)};$$

$f(x,y)$, $F(x,y)$, étant des fonctions rationnelles et entières de x et y. Je vais faire voir qu'il y a toujours un facteur rationnel $\Phi(x,y)$, entier par rapport à y, et tel que le produit $\Phi(x,y)$, $F(x,y)$ devienne une simple fonction rationnelle de x, indépendante de y.

En effet y est, comme on l'a vu, une des racines de l'équation

$$(a) \qquad y^{\mu} - Ly^{\mu-1} - \ldots - My - N = 0,$$

soient $y_1, y_2, \ldots y_{\mu-1}$ les autres racines. Il est évident que le produit

$$F(x,y)\,F(x,y_1)\,F(x,y_2)\,\ldots\,F(x,y_{\mu-1})$$

étant une fonction symétrique des racines de l'équation (a) s'exprimera rationnellement au moyen des coefficients de cette équation, c'est-à-dire sera une fonction rationnelle de x, indépendante de y. Il en résulte qu'on peut prendre pour valeur du facteur cherché, le produit $F(x,y_1)\,F(x,y_2)\,\ldots\,F(x,y_{\mu-1})$, et poser

$$\Phi(x,y) = F(x,y_1)\,F(x,y_2)\,\ldots\,F(x,y_{\mu-1}).$$

Cela suppose, il est vrai, que ce produit peut s'exprimer rationnellement en x et y, et qu'en outre il ne contiendra pas y en dénominateur. Pour démontrer cette propriété, j'observe que la quantité

$$F(x,y_1)\,F(x,y_2)\,\ldots\,F(x,y_{\mu-1})$$

est une fonction symétrique entière de $y_1, y_2, \ldots\ldots y_{\mu-1}$: d'après les éléments d'algèbre, elle peut donc être considérée comme une fonction entière des sommes

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{\mu-1}$$
$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{\mu-1}^2$$
$$y_1^3 + y_2^3 + \ldots + y_{\mu-1}^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Celles-ci sont exprimables en x et y sous forme rationnelle, et ne contiennent pas y en dénominateur, puisque si on leur ajoute respectivement y, y^2, y^3, ... on obtient les polynomes

$$y + y_1 + y_2 + \ldots + y_{\mu-1}$$
$$y^2 + y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{\mu-1}^2$$
$$y^3 + y_1^3 + y_2^3 + \ldots + y_{\mu-1}^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dont les valeurs sont fonctions rationnelles de x seul.

Donc on peut poser

$$\Phi(x,y) = \mathrm{F}(x,y_1)\,\mathrm{F}(x,y_2)\ldots\ldots\mathrm{F}(x,y_{\mu-1}),$$

et $\Phi(x,y)$ sera une fonction rationnelle de x et y, entière par rapport à y.

En multipliant par le facteur $\Phi(x,y)$, ainsi obtenu, les deux termes de la fraction $\frac{f(x,y)}{\mathrm{F}(x,y)}$, équivalente à $\int y dx$, cette intégrale se trouvera exprimée par une fonction dans le dénominateur de laquelle y aura disparu : cette fonction sera de la forme

$$\int y dx = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \text{etc.},$$

α, β, γ, ... désignant des quantités rationnelles en x.

D'ailleurs, en vertu de l'équation (a), qui donne

$$y^\mu = \mathrm{L}y^{\mu-1} + \ldots + \mathrm{M}y + \mathrm{N},$$

on peut éliminer du second membre toutes les puissances de y

dont l'indice est supérieur à $\mu - 1$; en sorte qu'il reste simplement un résultat de la forme

$$\int y dx = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots + \lambda y^{\mu-1}.$$

Donc on a ce beau théorème : *Si l'intégrale $\int y dx$ est exprimable algébriquement, elle aura une valeur de la forme*

$$\int y dx = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots + \lambda y^{\mu-1}$$

dans laquelle $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$, sont des fonctions rationnelles de x.

[24] Jusqu'ici nous n'avons point eu à examiner la nature de l'équation (a); mais pour déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$, il est nécessaire de supposer cette équation ramenée à sa forme la plus simple.

Il est toujours permis de supposer l'équation (a) irréductible, c'est-à-dire de supposer que la valeur de y considérée par nous ne peut être racine d'aucune équation, à coefficients rationnels, de degré inférieur à μ.

En effet, si la racine y pouvait appartenir à l'équation (a) et à une autre équation semblable de degré moindre, il est clair que le premier membre de l'équation (a) se décomposerait en deux facteurs rationnels; en sorte qu'on se débarrasserait aisément de celui de ces deux facteurs qui serait étranger à la question.

Avant de faire usage de l'équation (a), nous supposerons donc qu'elle a été ramenée à sa forme la plus simple. On opérera cette réduction par les règles connues de l'algèbre, en cherchant successivement et en chassant par la division les facteurs rationnels du 1er, du 2^{e}, du 3^{e} degré, etc., qui peuvent se trouver dans le premier membre de l'équation (a).

Maintenant que cette équation est devenue irréductible, si l'on considère un polynome de la forme

$$Py^{\mu-1} + Qy^{\mu-2} + \ldots + Hy + K$$

P, Q, ... H, K, étant des fonctions rationnelles de x, il est manifeste que ce polynome ne pourra être nul à moins qu'on n'ait

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad \ldots\ldots \quad H = 0, \quad K = 0,$$

sans cela en effet il existerait une équation de degré $\mu - 1$, savoir :

$$Py^{\mu-1} + Qy^{\mu-2} + \ldots\ldots + Hy + K = 0,$$

ayant une racine commune avec l'équation (a) irréductible et du degré μ : ce qui est impossible.

[25] A présent reprenons l'égalité

$$\int y dx = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots\ldots + \lambda y^{\mu-1}.$$

En la différenciant et faisant tout passer dans le premier membre, nous aurons

$$(d) \quad \left.\begin{array}{l} y - \frac{d\alpha}{dx} - y\,\frac{d\beta}{dx} - y^2\frac{d\gamma}{dx} - \ldots\ldots - y^{\mu-1}\frac{d\lambda}{dx} \\ -(\beta + 2\gamma y + \ldots\ldots + (\mu-1)\lambda y^{\mu-2}\frac{dy}{dx} \end{array}\right\} = 0.$$

L'équation (a) donne d'autre part

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^{\mu-1}\frac{dL}{dx} + \ldots\ldots + y\frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dx}}{\mu y^{\mu-1} - (\mu-1)Ly^{\mu-2} - \ldots - M}.$$

Cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ étant une fonction rationnelle de x et y, on peut la mettre sous une forme entière relativement à y, en en multipliant les deux termes par un facteur convenable : effectuons ensuite le produit

$$\{\beta + 2\gamma y + \ldots + (\mu-1)\lambda y^{\mu-2}\}\frac{dy}{dx},$$

et chassons-en, au moyen de l'équation (a), toutes les puissances de y dont l'indice est égal ou supérieur à μ : par là nous donnerons à ce produit la forme

$$E + Fy + Gy^2 + \ldots + Hy^{\mu-1}$$

E, F, G, ... H, étant des fonctions rationnelles de x, $\beta, \gamma, \ldots \lambda$, linéaires par rapport à β, γ, ... λ, et dans lesquelles α n'entre pas. D'après cela l'équation (d) peut être écrite ainsi

$$\begin{vmatrix} \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dx} & y + \frac{d\gamma}{dx} & y^2 + \ldots + \frac{d\lambda}{dx} & y^{\mu-1} \\ + E + F & + G & + H & \\ - 1 & & & \end{vmatrix} = 0$$

et l'on en conclut

$$(e)\quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dx} + E = 0, \\ \frac{d\beta}{dx} + F - 1 = 0, \\ \frac{d\gamma}{dx} + G = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d\lambda}{dx} + H = 0. \end{cases}$$

Donc pour déterminer les μ inconnues α, β, γ, ... λ, on possède un système de μ équations différentielles linéaires que nous venons d'écrire; en sorte que toute la question est réduite à chercher les intégrales rationnelles de ces équations, ce que nous avons enseigné à faire (*).

(*) Dans une note que j'ai rédigée pour le journal de M. Crelle, j'ai prouvé que les équations (e) ne rentrent jamais les unes dans les autres; ce qui est nécessaire pour établir

Si les équations (*e*) n'ont pas d'intégrales rationnelles, l'impossibilité d'exprimer $\int y dx$ algébriquement sera démontrée; et dans le cas contraire, la méthode qui sert à calculer $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \lambda$, fournira aussi la valeur de $\int y dx$.

Ainsi est démontré, dans toute son étendue, le théorème général qui fait l'objet de ce mémoire. Le procédé dont on vient de se servir n'exige nulle part qu'on sache trouver les racines incommensurables des équations numériques : l'opération la plus compliquée qu'il nécessite est la division algébrique. Ce même procédé s'applique à diverses questions sur lesquelles nous reviendrons ailleurs.

[26] En effet, la théorie exposée dans la section première, pour la détermination des intégrales rationnelles d'une équation linéaire, me paraît devoir être d'une grande utilité en analyse; et je ne puis m'empêcher d'en rapporter ici une application très-simple, à laquelle un passage de M. Lacroix (*) m'a donné lieu de penser.

« Il y a encore, dit M. Lacroix, un autre moyen d'intégrer une « fonction exponentielle, telle par exemple que $\frac{e^x x dx}{(1+x)^2}$; c'est de « chercher à la rapporter à la différentielle de la fonction $e^x P$, qui « est $e^x (dP + P dx)$, et dans laquelle P représente une fonction « algébrique de x. C'est principalement la sagacité et l'habitude du

qu'il y a réellement autant d'équations que d'inconnues, comme l'exige notre méthode. J'ai montré aussi comment l'on en déduit immédiatement, en les généralisant, les résultats contenus dans mon premier mémoire. Il ne sera pas inutile d'observer ici que l'inconnue α entre dans la première des équations (*e*) seulement, et n'y entre que par la différentielle $\frac{d\alpha}{dx}$: quand on aura déterminé les valeurs rationnelles de $\beta, \gamma, \ldots\ldots \lambda$, on calculera donc ensuite celle de α, par la simple intégration d'une fraction rationnelle. Cette remarque servira à simplifier quelquefois le calcul. Elle démontre en outre, sans qu'il soit nécessaire d'insister là-dessus, que l'emploi des équations (*e*) fournirait la valeur de $\int y dx$, lors même que cette valeur contiendrait des logarithmes, si les signes logarithmiques ne portaient que sur des fonctions rationnelles de x.

(*) *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, tome II, page 94.

« calcul qui peuvent guider dans ce procédé. L'exemple proposé « étant fort simple ; il suffit de faire $1 + x = z$: il vient alors

$$\frac{e^x x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^{z-1}(z-1)dz}{z^2} = \frac{1}{e}\left(e^z\left(\frac{1}{z}dz - \frac{dz}{z^2}\right)\right),$$

« et, avec un peu d'attention, on voit bientôt que $-\frac{dz}{z^2}$ étant la « différentielle de $\frac{1}{z}$, on doit avoir $P = \frac{1}{z}$, d'où résulte l'inté- « grale $\frac{e^z}{ze}$ + constante. Remettant au lieu de z sa valeur, on « trouve

$$\int \frac{e^x x dx}{(1-x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + \text{constante.} »$$

Mais ce n'est là qu'une méthode de tâtonnement qu'il est aisé de réduire en procédé régulier. D'abord si la quantité $\int \frac{M e^x}{N} dx$ $\left(\frac{M}{N}\right.$ étant une fraction rationnelle$\left.\right)$ peut se mettre sous la forme

$$\int \frac{M e^x}{N} dx = P e^x + \text{constante},$$

P étant une fonction algébrique, il est aisé de prouver que P sera une fonction rationnelle de x. Ensuite, en différenciant, on trouvera

$$\frac{M}{N} = P + \frac{dP}{dx}.$$

Tout se réduit donc à chercher s'il y a une valeur rationnelle de P satisfaisant à cette égalité, et à la déterminer quand elle existe en effet. Ainsi notre théorie de l'intégration des équations linéaires en quantités rationnelles résout de suite le problème de M. Lacroix. Elle permettra aussi d'intégrer $e^x y dx$, y étant une fonction algébrique quelconque, toutes les fois que cette quantité aura été engendrée par la différenciation d'un produit de la forme

Pe^x, P étant algébrique; ou plus généralement toutes les fois que $e^x y dx$ sera la différentielle d'une fonction algébrique inconnue de x et e^x. Par une série de raisonnements à peu près semblables à ceux du n° 22 et du n° 23, on démontrera que si l'intégrale $\int e^x y dx$ est exprimable algébriquement en fonction de x et e^x, la valeur de cette intégrale doit être de la forme

$$\int e^x y dx = e^x (\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots + \lambda y^{\mu-1}) + \text{constante};$$

α, β, γ, ... λ, étant des fonctions rationnelles de x, et μ indiquant le degré de l'équation irréductible dont y est la racine. On déterminera ensuite les μ inconnues α, β, γ, ... λ, par un nombre égal d'équations, qu'on obtiendra comme on a obtenu celles du n° 25 (*).

[27] Enfin la méthode exposée dans ce mémoire sert quelquefois à démontrer l'impossibilité de satisfaire par aucune intégrale particulière algébrique, à une équation de la forme

$$(A) \quad P \frac{d^\mu y}{dx^\mu} + Q \frac{d^{\mu-1} y}{dx^{\mu-1}} + \ldots + R \frac{dy}{dx} + Sy = T,$$

les coefficients P, Q, ... R, S, T, étant des fonctions rationnelles de x, et T n'étant pas $= 0$. Il existe à ce sujet un théorème dont je me contenterai d'écrire l'énoncé : *pour que l'équation* (A)

(*) Par des considérations qui me sont propres je suis parvenu à démontrer en rigueur le théorème que voici : *Toutes les fois que l'intégrale $\int e^x y dx$ peut être obtenue à l'aide d'un nombre limité quelconque d'opérations algébriques, exponentielles, logarithmiques et circulaires, la valeur de cette intégrale est nécessairement équivalente à une certaine fonction algébrique de x et e^x; en sorte qu'il est permis de poser $\int e^x y dx = e^x(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots + \lambda y^{\mu-1}) +$* constante, *$\alpha$, β,* etc., *étant des fonctions rationnelles de x.* Si l'on ajoute à ce théorème le peu de mots que j'ai dits dans le texte, on en verra naître une méthode exacte pour trouver l'intégrale $\int e^x y dx$, lorsqu'elle est exprimable sous forme finie, en employant seulement les signes mathématiques usités dans les éléments, ou du moins pour en démontrer l'impossibilité sous la forme citée. On prouve par exemple de cette manière l'impossibilité de l'intégrale $\int \frac{e^x dx}{x}$, dont les géomètres se sont beaucoup occupés.

puisse être satisfaite par une valeur de y égale à une fonction algébrique de la variable indépendante, il faut nécessairement qu'elle possède une intégrale particulière de la forme

$$y = \frac{X}{Y},$$

X *et* Y *désignant des fonctions rationnelles et entières de* x. Ainsi, par exemple, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = -\frac{1}{x}$$

n'ayant aucune intégrale particulière de la forme $y =$ une fonction rationnelle de x, ne peut pas davantage en avoir une de la forme $y =$ une fonction algébrique (explicite ou implicite) de x. Il est bon d'observer qu'on satisfait à notre équation différentielle en posant

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha x \,.\, d\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Donc l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x \,.\, d\alpha}{1+\alpha^2}$, considérée comme fonction de x, ne peut être exprimée par aucune fonction algébrique de ce paramètre. Au reste elle n'est pas même exprimable, sous forme finie, en joignant aux signes algébriques ceux des opérations exponentielles et logarithmiques : c'est ce qu'on prouve aisément par les principes de la note précédente, comme je le ferai voir dans une autre occasion.

DE L'UTILITÉ
DES MACHINES,
DE LEURS INCONVÉNIENTS
ET DES MOYENS D'Y REMÉDIER,

EN ASSURANT

L'EXTENSION ET LES PROGRÈS DE NOTRE AGRICULTURE;

PAR M. LE BARON DE MOROGUES,

MEMBRE DU CONSEIL SUPÉRIEUR D'AGRICULTURE, DU CONSEIL GÉNÉRAL DU DÉPARTEMENT DU LOIRET ET DE LA SOCIÉTÉ ROYALE D'AGRICULTURE.

PRÉSENTÉ À L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES EN 1831.

CHAPITRE PREMIER.

DE L'UTILITÉ DES MACHINES.

L'utilité des machines est incontestable; outils perfectionnés à l'aide desquels l'homme produit plus et mieux les choses dont il a besoin : les rejeter sans examen serait renoncer à l'usage de la charrue; substituer le feu et le caillou employés par le sauvage, à la cognée et à la scie dont se servent nos bûcherons; abandonner tous les biens que la civilisation nous procure.

Repousser les machines nouvelles parce qu'elles diminuent le travail actuellement employé à une production quelconque, ne serait guère moins déraisonnable que de les proscrire toutes,

puisque produire plus est mettre à même de satisfaire plus de besoins et plus de jouissances.

Les machines et leurs perfectionnements sont donc, ainsi que tous les progrès des arts, d'une utilité incontestable quant à l'amélioration du sort des races humaines; ajoutez à cela la supériorité qu'elles donnent aux peuples les plus industrieux, et vous ne douterez plus qu'utiles aux ouvriers qui s'en servent pour abréger ou perfectionner leurs travaux elles le sont également aux familles et aux nations qui soutiennent par leur secours la concurrence avec les peuples rivaux, ou qui acquièrent sur eux une prépondérance positive.

Déjà l'utilité des machines sous tous ces rapports a été démontrée cent fois; M. le baron Charles Dupin l'a constatée dans ses savants écrits. Madame Élisabeth Celnard en a rendu la conviction populaire dans une intéressante brochure que la société d'instruction élémentaire vient de couronner; elle nous paraît si incontestable à nous-même, que nous rougirions d'avoir à la défendre.

L'emploi des machines a diminué le prix du pain en réduisant celui de la mouture et du pétrissage; il a permis de fournir à 50 centimes des étoffes qui se vendaient 3 francs; il a permis d'introduire chez nous mille fabrications nouvelles, d'enlever à l'Inde la fabrication de ses châles et de ses cotons, de rendre l'Asie tributaire de l'Europe pour les objets dont elle lui fournit la matière première, et que jadis elle lui fournissait dans un état de perfection qui nous semblait inimitable. Cet emploi a donc produit de nombreux bienfaits; mais est-il plus exempt d'inconvénients que les autres choses humaines? non; c'est là ce que nous allons examiner.

CHAPITRE II.

DES INCONVÉNIENTS INHÉRENTS À L'ADOPTION DES MACHINES.

Les machines ont le très-grand avantage, en économisant le travail, de multiplier les objets de consommation, et d'en diminuer la valeur; voilà pour la masse des citoyens : mais aussi elles

ont pour effet, lors de leur adoption, de réduire à l'inaction un grand nombre d'ouvriers, et de restreindre ainsi le salaire des moins habiles et des plus nombreux, tout en leur présentant beaucoup d'objets nouveaux, qui excitent leurs désirs et multiplient leurs besoins.

A chaque perfectionnement, lors même que l'accroissement du débit en est la conséquence, les fabricants se réservent une partie plus forte de l'excédant des prix de vente, tant pour leurs bénéfices que pour les couvrir des intérêts de leurs avances et de l'usure de leurs machines; le reste seulement est employé par eux en salaires d'ouvriers. Quand donc la proportion des avances et de l'usure des machines augmente dans la masse des ventes quelles qu'elles soient, cette augmentation tend à diminuer proportionnellement la part qui revient à la classe ouvrière. C'est surtout alors sur les moins habiles, sur les plus nombreux de cette classe, sur ceux qui sont le plus aisément suppléés par les machines, que cette diminution retombe; quand ils veulent consommer, ils sont contraints d'employer une plus forte part du prix de leurs journées pour payer l'objet diminué de valeur; ainsi, quand pour produire une pièce de coton de 100 francs, ils employaient pour 50 francs de travail manuel, le prix de ce travail les mettait à même d'en acquérir la moitié, mais aujourd'hui où la pièce de coton ne vaut plus que 10 francs, comme il n'entre dans sa fabrication que pour 1 franc de travail manuel, et que le reste appartient au manufacturier pour ses avances, intérêts et bénéfices, l'ouvrier, n'ayant qu'un dixième pour son travail, ne peut plus, avec le prix de ce travail, acquérir que le dixième de l'étoffe qu'il a fabriquée, au lieu de pouvoir comme auparavant en acquérir la moitié.

Quand même la quantité des étoffes fabriquées serait décuplée, l'existence des ouvriers ne leur semblerait plus la même qu'auparavant, parce que l'aisance n'est jamais que comparative : l'ouvrier voit donc diminuer la sienne quand sa quote-part dans la masse des valeurs produites est moindre; le manufacturier acquiert une plus grande fortune, mais sa position s'éloigne de plus en plus de celle de l'ouvrier, qui se trouve de plus en plus dans l'indigence.

L'aristocratie des richesses appesantit sur lui un joug qui lui paraît de plus en plus insupportable ; c'est là la conséquence nécessaire de la plus grande inégalité qui s'établit dans leur distribution chez les peuples les plus industrieux : les hommes y meurent sans doute moins souvent de faim que chez les peuples sauvages ; mais beaucoup s'y trouvent plus misérables, parce qu'ils connaissent plus de besoins, et que les progrès des arts leurs créent sans cesse de nouveaux désirs.

Je trouve une preuve bien évidente de cette vérité dans la répartition du nombre des suicides dans la France partagée en deux régions, nord et sud, suivant la méthode de M. le baron Charles Dupin : dans la première se trouvent trente-deux départements et 13,942,429 habitants, d'après l'ordonnance du 15 mars 1827 ; c'est la plus industrieuse ; eh bien ! il y a eu, année moyenne de 1827 à 1829, 1,154 suicides, c'est-à-dire 1 sur 12,081 habitants. Dans la seconde région, renfermant cinquante-quatre départements et peuplée de 17,902,999 habitants, il n'y a eu, année moyenne, que 576 suicides, c'est-à-dire 1 sur 31,082 habitants : la France totale a offert 1,730 suicides sur 31,845,428 habitants, ou 1 sur 18,407 ; ce fait, joint à la fréquence des suicides et du spleen dans l'Angleterre, prouve assez que la richesse accumulée par la grande industrie n'est pas répartie de la manière la plus convenable au bonheur des masses populaires dans les pays où la grande industrie a le plus d'influence.

Généralisez ce raisonnement, et supposez que les machines envahissent presque tous les genres de production, vous en conclurez que l'ouvrier qui n'aurait alors que son travail pour exister, étant sans cesse en concurrence avec elles, son salaire irait sans cesse en décroissant par rapport à la valeur des objets produits, et que moins les progrès de la mécanique lui laisseraient de travail à faire, plus serait faible proportionnellement la portion qu'il pourrait employer pour acquérir des objets qu'il aurait concouru à produire.

Voilà pourquoi l'inaction des ouvriers remplacés par les ma-

chines qui ne leur appartiennent pas, jointe à l'accroissement de leurs désirs excités par le bas prix et la variété des produits qui leur sont offerts, a tant multiplié le nombre des misérables : la preuve en est dans l'augmentation du nombre des crimes contre les propriétés; conséquence funeste de la détresse des classes laborieuses.

Les progrès de l'industrie en Angleterre ont été accompagnés de ceux du paupérisme et de ceux des crimes que l'accumulation des besoins jointe à celle de la misère entraînent toujours apres elles.

En 1798, les exportations de l'Angleterre ne s'élevaient, valeur officielle, qu'à 491,812,575 francs; le quarter de froment ne valait que 62 francs 80 centimes; la main-d'œuvre d'une pièce de coton se payait 18 francs; la taxe des pauvres ne s'élevait qu'à 75,000,000 francs; il n'y avait que peu d'associations charitables; point de révoltes d'ouvriers, et la misère était bien moindre qu'aujourd'hui. En 1812, les exportations de l'Angleterre s'élevaient déjà à 781,084,050 francs; la guerre était terrible; le quarter de froment valait 151 fr. 30 cent.; la main-d'œuvre de la pièce de coton se payait encore 10 francs; la taxe des pauvres s'élevait à 216,021,050 fr.; les associations charitables peu nombreuses n'en accroissaient guère les effets; le nombre des pauvres était grand, mais les révoltes d'ouvriers n'étaient pas redoutables, et le nombre des accusés n'était que de 6,576; c'était 1 sur 1,799 habitants.

En 1827, les exportations de l'Angleterre s'élevaient à 1,281,911,200 fr.; la paix était générale; le quarter de froment ne valait plus que 68 francs 75 centimes; mais la main-d'œuvre de la pièce de coton était réduite à 3 francs 10 centimes; la taxe des pauvres s'élevait à 192,876,375 francs; les associations charitables très-multipliées faisaient plus que d'en doubler les effets, et pourtant comme le quart de la population était inscrit sur la liste des pauvres, les révoltes d'ouvriers étaient fréquentes, et le nombre des accusés, qui s'est encore accru rapidement depuis, s'élevait à 17,921 : c'était 1 sur 871 habitants.

Voilà les résultats de l'adoption des machines quand la loi est faite de telle sorte que la richesse qu'elles attirent à leurs possesseurs s'accumule dans quelques mains en laissant une misère progressive pour partage à la masse des ouvriers dont elles remplacent le travail, sans que leurs bras puissent être autrement et utilement occupés. Comment remédier à ce mal? C'est ce qui nous reste à examiner ici.

CHAPITRE III.

CONSÉQUENCE DES INCONVÉNIENTS INHÉRENTS À L'EMPLOI DES MACHINES.

La masse du peuple ne vit et ne peut vivre que du produit de son travail journalier, il faut donc qu'elle soit sans cesse occupée pour toujours vivre sans mendier sa subsistance.

Ce serait une chimère que de chercher des ressources durables pour étendre le travail des ateliers dans le commerce extérieur, qui trouvera toujours des limites très-rapprochées dans la concurrence des autres nations, et dans les progrès des arts au-delà de nos frontières.

Nous en avons fait la triste épreuve. Nos manufacturiers ont voulu étendre leurs spéculations chez les peuples étrangers : c'est depuis 1787 en 1825 qu'ils ont fait le plus d'efforts pour y parvenir. Eh bien! ils n'y ont point réussi. Chaque année depuis 1825 nos importations ont bien pu se soutenir, mais nos exportations qui en 1825 s'élevèrent à 801,942,780 francs ont successivement été en 1826 de 735,154,920 francs; en 1827, de 642,254,598 f.; en 1828, de 638,494,196 francs; en 1829, de 666,393,227 francs; bien que nos exportations de vins se fussent accrues de 1825 à 1829 de 70,519,193 francs à 74,375,711 francs, ce qui faisait 3,856,518 francs de bénéfice pour nos vignobles, tandis que nos autres exportations diminuaient.

S'il en eût été autrement, y aurions-nous gagné beaucoup plus? Je ne le pense pas. Voici pourquoi, pendant que nos exportations diminuaient, nos voisins les Anglais ont vu s'accroître la masse des leurs : d'après les valeurs officielles, elles ne s'élevèrent en 1825 qu'à 1,161,707,050 francs, et en 1828 elles montèrent à l'énorme somme de 1,300,728,775 francs; ils ne s'en sont pas trouvés mieux pour cela. Cet accroissement apparent de 139,021,725 francs n'a pas été un bénéfice réel pour le commerce britannique; loin de là, ce surcroît de vente n'a été acquis qu'au détriment des fabricants anglais eux-mêmes, car les valeurs déclarées en 1825 étaient de 952,094,325 francs, et elles ne furent plus en 1828 que de 903,819,975 francs, en sorte que réellement il y eut dans cette dernière année pour 48,274,350 francs de travail britannique payé de moins que dans l'autre par les peuples étrangers.

La dépréciation des valeurs a été la conséquence de l'emploi des machines dans le but d'économiser sur la main-d'œuvre pour obtenir l'extension du commerce à l'étranger. En 1808, la valeur officielle des exportations n'était que de 666,557,200[f], bien que leur valeur déclarée fût de 1,022,041,775 fr.; ce qui donnait pour les valeurs déclarées 118,221,800 francs de plus qu'en 1828, et pourtant les valeurs réelles d'après les prix communs des dix années antérieures à 1808 eussent dû s'élever en 1808 à 1,124,130,100 fr. : il y avait donc déjà sur les anciens prix une dépréciation de 102,388,325 fr. selon les calculs de M. Marshall; dépréciation qui s'est accrue depuis avec une rapidité prodigieuse, puisque les marchandises exportées en 1828 et déclarées pour une valeur de 903,819,975 fr. eussent valu au même taux commun des dix années antérieures à 1808, 2,164,936,175 fr.; en sorte qu'il y avait alors sur les anciennes valeurs une dépréciation de 1,261,116,200 fr., et que le prix des marchandises vendues au dehors était réduit aux trois septièmes de ce qu'il était de 1798 à 1808.

Si cette dépréciation a été en déduction des bénéfices des commerçants anglais, on pourrait croire que le surplus de la population

britannique, en payant les marchandises fabriquées moins cher, en a profité par elle-même, et que son aisance est devenue plus grande par suite de la baisse des prix des objets de sa consommation : loin de là, le contraire a eu lieu pour la grande masse des citoyens qui vivait de son travail journalier ; le travail est devenu de plus en plus rare pour les ouvriers à cause de la substitution des machines à leurs bras; leurs salaires ont décru proportionnellement à la masse des produits obtenus en raison de la concurrence des travailleurs fictifs que les progrès de la mécanique répandaient chaque jour davantage. Birmingham et Manchester ont pu se peupler prodigieusement en attirant les ouvriers des petites fabriques par l'appât de gros salaires; mais, pendant que ces villes s'accroissaient, les petites fabriques et la petite culture étaient absorbées par les grandes fabriques et par les grandes fermes dans le reste du pays, où les salaires étaient diminués; et les salaires se sont ensuite rabaissés dans les grandes fabriques elles-mêmes, par le perfectionnement des machines, quand les petites fabriques et la petite culture n'étaient plus là pour venir au secours des familles qui les avaient abandonnées : alors les travailleurs imprudents que l'appât du gain avait attirés hors de chez eux n'ont plus eu que la misère pour partage.

La dépréciation du prix des marchandises de près des 5/8, depuis les dix ans antérieurs à 1808 jusqu'à 1828, loin de diminuer la misère, n'a ainsi fait que l'accroître dans une progression terrible; cela devait être, parce que si les ouvriers sont consommateurs, ils ne profitent du bas prix des objets de consommation que quand ils peuvent les acheter, et ils ne peuvent les acheter que quand ils travaillent : leur travail a été remplacé par celui des machines qui ne boivent ni ne mangent comme eux; et c'est en économisant sur ce qu'ils gagnaient, que les fabricants ont pu réduire leurs prix de vente pour triompher de la concurrence du dehors; le bénéfice de la réduction des prix des marchandises n'est revenu qu'en partie aux ouvriers; les autres consommateurs en ont profité comme eux, et pourtant ce bénéfice n'était fait que sur eux seuls.

Les progrès de la mécanique ont, à cause de cela, chez les

Anglais, encore plus que chez les autres peuples, été suivis de ceux du paupérisme qui a atteint les manufacturiers les plus entreprenants, après avoir frappé les classes laborieuses.

On a vu, en Angleterre comme en France, des gens habiles, parmi ceux qui comptaient le plus sur le succès de leurs machines, réduits à faire faillite. Nos villes ont été encombrées de pauvres, et nos campagnes ont été accablées de mendiants que repoussaient nos manufacturiers, faute de pouvoir leur donner de l'ouvrage.

La révolution de juillet est survenue; notre commerce extérieur a été paralysé; notre commerce intérieur a été repoussé par la crainte; les ateliers se sont fermés, et si le nombre des pauvres est resté faible et à peu près le même parmi les domiciliés des campagnes, on l'a vu très-grand et s'accroître dans nos villes suivant une progression effrayante; ce mal ne se ralentira que quand on aura créé pour le peuple de nouveaux genres de travaux.

Les progrès de la mécanique n'avaient en France, dès avant la révolution de juillet, réduit un grand nombre de nos ouvriers à la misère et causé l'encombrement de nos fabriques, que parce que leurs chefs tentaient vainement de spéculer sur leur débit à l'étranger, au lieu de s'occuper de faire prospérer nos agriculteurs et nos ouvriers. Les Anglais eux-mêmes, qui étendaient sans cesse au dehors leurs relations commerciales, ne le faisant qu'au détriment de la masse du peuple, voyaient encore plus que nous la misère augmenter parmi eux; assez pour discuter sérieusement l'opportunité de la déportation des pauvres et de la restriction de leur mariage, assez pour que le nombre de leurs émigrations annuelles volontaires s'élevât de 10,422 à 17,311 de 1824 à 1829, qu'en 1830 il atteignît 27,295 pour l'Irlande, l'Écosse et l'Angleterre, et que dans les six premiers mois de 1831 il s'élevât à 65,888.

La ressource du commerce extérieur a donc été insuffisante pour l'Angleterre, maîtresse du commerce du monde; pour l'Angleterre, qui, naguère tributaire de l'industrie indienne, gagne depuis quelque temps 400,000,000 francs chaque année sur les cotons qu'elle lui achète en laine, et qu'elle revend fabriqués;

pour l'Angleterre, dont les comptoirs établis dans d'immenses colonies sont dispersés sur tous les points du globe. Ses machines à vapeur représentant, d'après M. le baron Charles Dupin, une force supérieure à celle de 7,000,000 d'hommes vigoureux, que centuplent encore ses innombrables métiers, ses nombreux vaisseaux naviguant sur toutes les mers du monde, lui ont permis de fabriquer, de transporter assez de marchandises pour créer quelques énormes fortunes parmi ses citoyens, mais toujours trop peu pour occuper tous leurs bras : ses ouvriers meurent de faim vis-à-vis des palais somptueux de quelques spéculateurs et de quelques propriétaires privilégiés d'un sol inaliénable, plus opulents cent fois que la plupart des souverains des siècles derniers. Ce serait en vain que l'Angleterre chercherait, par l'adoption de machines de plus en plus expéditives, à étendre encore ses ventes au dehors pour obtenir suffisamment de travail dans ses ateliers : tout ce qu'elle ferait pour cela ne ferait qu'accélérer les ravages du paupérisme parmi ses citoyens. Tantales nouveaux, ils apprendraient sans cesse à connaître plus de besoins sans pouvoir les satisfaire, la perfection des machines causerait encore la baisse des salaires, et la population des pontons qui, de 1824 à 1829, a été portée de 3,678 à 5,814, s'accroîtrait avec une terrible rapidité par une conséquence nécessaire des progrès de la détresse du pauvre.

CHAPITRE IV.

MOYENS D'OBVIER AUX INCONVÉNIENTS RÉSULTANT DE L'EMPLOI DES MACHINES.

Les productions du travail réel des bras, celles naturelles au sol, celles qui précèdent toutes les autres, se consomment en nature, alimentent les ateliers, satisfont aux premiers besoins de l'homme; les productions agricoles en un mot peuvent plus que toutes les autres, en s'étendant et se variant, donner un travail suffisant à

la classe ouvrière : ce sont les seules qui, en exigeant toujours un travail manuel très-important, puissent mettre les ouvriers à même de gagner constamment leur subsistance.

Les lois de l'Angleterre, en s'opposant à la divisibilité du sol, et l'extension prodigieuse de sa grande culture, qui a envahi une multitude de petits fermages, ont repoussé la petite et la moyenne culture, qui, comme accessoires obligés de la grande, pourraient, en fournissant au pays des denrées qu'il achète à l'étranger, opposer une digue aux ravages du paupérisme, tout en laissant l'industrie marcher à grands pas.

L'absence de la petite et de la moyenne culture est la vraie cause de tous les maux de l'Angleterre; elles seules pourraient y prévenir la misère : en variant les produits du sol, elles offriraient une ressource constante aux ouvriers que le perfectionnement des machines chassera chaque jour de plus en plus de ses ateliers, comme il l'a déjà fait des nôtres; elles seules pourraient, en multipliant les produits de son territoire, diminuer les chances dangereuses que courront toujours ses fabricants, tant que les produits qu'ils obtiendront ne trouveront pas sur leur propre marché une quantité suffisante d'autres produits nationaux échangeables contre ceux dont ils voudront se défaire.

Le défaut de la petite et de la moyenne culture est la cause réelle du paupérisme, de l'agitation des ouvriers, du brisement des machines, des émeutes populaires, et des atteintes perpétuelles données à la tranquillité des nations les plus habiles dans les arts; c'est là la cause principale du progrès des crimes dans la Grande-Bretagne, qui, pour son malheur, ne compte que 589,384 propriétaires fonciers sur 16,000,000 d'habitants, et qui, comme pour aggraver le mal que les substitutions, le droit d'aînesse et la centralisation des propriétés lui causent, introduit partout des machines, dans les champs comme dans les villes, en même temps qu'elle y détruit les petites fermes pour les englober dans les grandes : de vastes exploitations rurales répandent ainsi le paupérisme au sein de ses villages, comme de grandes fabriques le

propagent au sein de ses cités, et tout cela dans le seul but d'accroître la fortune de quelques riches spéculateurs.

Heureusement la vente des biens nationaux, l'abolition du droit d'aînesse, l'égalité des partages, en créant en France 4,833,000 propriétaires fonciers imposés sous 9,330,469 cotes au-dessous de 50 francs, sous 920,098 cotes de 50 francs à 500 francs, et sous 46,026 cotes de 500 francs et au-dessus, ont concouru, avec la moindre rapidité de nos spéculations commerciales, à rendre chez nous le paupérisme moins redoutable que chez nos voisins.

En 1829, nous ne comptions pas, selon M. de Villeneuve, 2,000,000 de pauvres sur plus de 32,000,000 d'habitants, ce qui faisait environ un seizième de notre population, tandis que l'Angleterre en comptait alors un quart de la sienne; à cause de cela, nous ne comptions que 7,373 accusés de crimes, ou 1 sur 4,340 habitants, tandis que la Grande-Bretagne en comptait, en 1827, 17,921 sur 15,612,800 habitants, ce qui faisait 1 sur 871, et qu'en 1829 elle en comptait 18,675 sur 16,000,000 d'habitants, ce qui donnait 1 sur 857.

Les progrès des crimes en Angleterre et chez nous ont été comparables à ceux de la grande industrie, et surtout à ceux du commerce extérieur; ils les ont même surpassés chez nos voisins, parce que les Anglais n'ont guère qu'un propriétaire du sol sur 28 habitants, tandis que nous en avons 1 sur 7, et parce qu'ils ont plus d'industriels que de cultivateurs, tandis que nous avons plus de cultivateurs que d'industriels. Applaudissons-nous de ce que notre situation est meilleure que celle des Anglais, sous le rapport du paupérisme, causé par la grande industrie et par la grande culture, par conséquent sous le rapport de la criminalité; mais pourtant ne nous laissons pas aveugler sur l'influence qu'ont eue les progrès de la mécanique chez nous-mêmes quand le perfectionnement de nos fabriques n'a pas été accompagné de l'extension du nombre de nos agriculteurs. Considérons ce que la France a souffert pour avoir voulu recréer les grandes propriétés et favoriser

exclusivement les grandes manufactures de 1815 à 1830; ne nous abusons pas sur les dangereuses conséquences de ce système, dont l'adoption ne fut pas l'une des moindres fautes de la restauration, et, pour y remédier avec connaissance de cause, voyons ce qui est résulté chez nous de l'année 1825 à l'année 1829, espace de temps pendant lequel ce système a été plus constamment suivi.

Bien que, durant cet intervalle, les progrès de l'instruction populaire aient, en améliorant les hommes, réduit le nombre des accusés de crimes contre les personnes de 1897 à 1791, et celui des condamnés de 882 à 834, le nombre des accusés de crimes contre les propriétés s'est accru de 4,755 à 5,582, et celui des condamnés de 3,155 à 3,641, tandis que le nombre des prévenus de délits qui n'était en 1825 que de 146,511 s'est élevé en 1829 à 176,227, accroissement plus rapide que celui de la population; celle-ci s'élevant en 1825 à 31,509,921 habitants, et n'étant parvenue en 1829 qu'à 32,173,901.

En 1825, il n'y a eu qu'un accusé de crime contre les propriétés sur 6,627 habitants, et un prévenu de délit sur 222; en 1829, il y a eu un accusé de crime contre les propriétés sur 5,764 habitants, et un prévenu de délit sur 183.

Veut-on avoir la preuve que l'accroissement du nombre des crimes et délits contre les propriétés a été la conséquence de celui de la misère? la voici: en 1825, il n'y a eu que 2 accusés pour mendicité avec violence, 2,251 pour vagabondage, 252 pour mendicité simple, 9,574 pour vol simple, 143 pour maraudage, 306 pour délits dans les bois, 86,861 pour délits forestiers, et point de pillage de grains. En 1829, il y a eu 26 accusés pour mendicité avec violence, 2,858 pour vagabondage, 1,170 pour mendicité simple, 13,526 pour vol simple, 841 pour maraudage, 2,869 délits dans les bois, et 109,762 délits forestiers; ajoutez à cela qu'il y a eu dans cette même année 74 prévenus pour pillage de grains et 151 pour attroupement contre leur libre circulation.

C'est, nous dira-t-on, le renchérissement des grains qui a occasionné l'accroissement du paupérisme, encore plus que les progrès

du commerce extérieur et que ceux de la grande industrie. Admettons pour l'instant cette assertion dont nous prouvons ailleurs l'inexactitude. Le renchérissement des grains a contribué à l'accroissement du paupérisme en France; cela se peut, mais c'est la concurrence des laines et des bestiaux étrangers qui, en diminuant les produits de vente de nos cultivateurs sur deux des principales branches de leur industrie, les a forcés à vendre leurs grains plus cher, en même temps que la diminution de la quantité des engrais fournis par des bestiaux moins nombreux les a contraints à abandonner leurs terres les moins bonnes, et leur a fait retirer moins de leurs autres emblavures: c'est donc encore la concurrence étrangère qui, sous ce rapport comme sous les autres, a déterminé l'accroissement de la misère et par suite celui des crimes.

Voilà des faits qui constatent la nécessité non pas de proscrire l'usage des machines, ni même de ralentir leur adoption et leur perfectionnement, mais bien de prévenir les malheurs qui accompagneraient leurs bienfaits en encourageant les progrès de l'agriculture française, en les excitant par tous les moyens en notre puissance, en soutenant nos cultivateurs contre la concurrence étrangère, et aussi en étendant la petite culture le plus possible, afin d'accroître tous les travaux agricoles de plus en plus en raison de l'extension que prendront les machines. Ne nous confions pas pour cela à l'espérance illusoire, encore plus en temps de guerre qu'en temps de paix, de voir s'augmenter nos travaux industriels par un accroissement de notre débit à l'étranger.

Les Anglais ont reconnu depuis longtemps, ils reconnaissent encore, ils reconnaîtront toujours que quelle que soit l'extension de leur débit au dehors, c'est l'Angleterre elle-même qui est leur meilleure pratique, c'est encore elle qui consomme le plus de leurs produits aujourd'hui même où le paupérisme l'accable. Ne méconnaissons pas qu'il en sera toujours pareillement chez nous. Ne nous fions qu'à l'aisance de notre population pour rétablir notre commerce abattu. Ne croyons pas que d'énormes impôts prélevés sur le producteur, et par là même restrictifs du salaire de ses

ouvriers, puissent jamais, en se convertissant en charités publiques, atténuer la misère du pauvre ; ne croyons pas dédommager l'ouvrier du travail qui lui manque en l'habituant par l'aumône à l'oisiveté qui le conduit au vagabondage; ne croyons pas que de nombreux ateliers de charité qui ne produisent rien pour le commerce servent efficacement la population souffrante ; ne croyons pas que des avances onéreuses au trésor de l'État et à charge aux contribuables puissent, en retardant quelques faillites, venir utilement au secours du négociant ruiné, et rendre le travail aux gens qui restent oisifs malgré eux. Rien de cela ne saurait ranimer le commerce, ni rétablir les travaux productifs sans lesquels il n'y aura pas de débit au dedans du pays ; on ne pourra y parvenir qu'en relevant, qu'en ranimant la population productive, la population qui consomme, celle qui fait prospérer le commerce, quand elle boit, mange et se vêtit convenablement. Quand la population languit dans la misère, elle vole beaucoup, et n'achète rien, parce qu'alors il faut bien qu'elle vive sans payer, puisqu'elle ne peut ni travailler ni produire.

Ce n'est que la production qui paye la production; celle du sol fournit et aux premiers besoins de l'homme et les matières premières que les machines perfectionnent ensuite: c'est donc de toutes les productions celle du sol qui, en occupant un nombre sans cesse croissant de bras, peut être la plus utilement échangée contre les marchandises qui sortent des ateliers. Faisons tout pour l'accroître en lui consacrant le nombre des bras qu'elle appelle; bientôt le commerce fleurira et nos fabricants trouveront le débit qui leur manque au dehors, dans l'échange au dedans de leurs produits contre ceux que nos cultivateurs porteront sur nos marchés.

N'avons-nous plus ni terres à défricher, ni sol à améliorer, ni légumes à multiplier, ni récoltes nouvelles à introduire? Avons-nous suffisamment de sucre, de pastel, de tabac, de garance, d'huile, de soie, de chanvre, de lin, de bestiaux et d'abeilles?

N'importions-nous pas en 1828 pour plus de 72,000,000 francs de divers produits d'animaux que nous eussions pu recueillir chez nous, pour plus de 25,000,000 francs d'huile et de tabac, pour

plus de 19,000,000 francs de bois analogues aux nôtres, pour plus de 5,000,000 francs de chanvre, de lin et de houblon, pour plus de 8,000,000 francs de fil de chanvre ou de lin, pour plus de 4,000,000 francs d'animaux utiles à l'industrie, pour plus de 19,000,000 francs d'animaux utiles à la consommation, pour plus de 3,000,000 francs de grains et d'autres farineux analogues à ceux que nous pouvons produire, pour plus de 22,000,000 francs d'olives ou d'huile comestible, et pour 44,000,000 francs de sucre que nos champs de betteraves pourraient nous fournir? En tout, nous avons fait en 1828 pour 448,760,337 francs d'importations de marchandises, dont il y en avait pour 415,436,786 fr. de matières utiles à nos fabriques ou à notre consommation, que la plupart nous eussions pu obtenir chez nous. Sur celles-ci il y en avait pour plus de 221,000,000 francs que l'agriculture française eût pu utilement nous procurer, en donnant du travail à ceux de nos ouvriers que l'emploi des machines chassait de nos ateliers. N'eût-il pas mieux valu leur faire gagner cette somme dans nos campagnes que de la porter chez l'étranger, dans le but de lui vendre un peu plus des produits de nos fabriques, obtenus principalement au profit de quelques grands capitalistes à l'aide de leurs machines? Je dis un peu plus des produits de nos fabriques, car ces produits trouvent chaque jour au dehors une rivalité de plus en plus redoutable, et nos exportations en produits de notre sol sont de nature à ne cesser jamais.

Nos exportations en objets manufacturés se sont élevées en 1828 à 343,838,910 francs; nous avions introduit pour 278,590,868 francs de matières nécessaires à l'industrie et admises pour la consommation : restait donc pour le travail de nos fabriques un boni de 65,248,042 francs. Divisons cette somme en trois parties : une pour les avances du fabricant, une pour l'intérêt de ses fonds, et une partie pour ses ouvriers : ceux-ci n'auront reçu que 21,749,347 francs, somme fort inférieure à celle de 221,000,000 francs qu'ils eussent obtenue de la production des matières premières agricoles analogues aux nôtres, que nous

avons importées, et qu'ils auraient pu produire si le commerce eût suivi une direction différente.

Nous achetons au dehors à plus bas prix que nous ne pourrions produire chez nous, va-t-on nous dire. Oui, sans doute; mais nous ne payons les produits que nous obtiendrions de notre territoire avec nos bras qu'avec ceux que nous obtenons dans nos fabriques avec nos machines, qui ne mangent ni ne boivent comme nos ouvriers, et qui ne consomment ni draps ni toiles comme eux. Cet échange se fait au bénéfice de nos grands fabricants et de nos grands spéculateurs; le peuple, sacrifié par eux, ne travaillant pas, ne peut acquérir, à quelque prix que ce soit, les marchandises exotiques par lesquelles celles qu'il aurait produites ont été remplacées; il faut donc qu'on les lui donne, qu'il les prenne ou qu'il s'en passe.

Ceci est arrivé bien souvent en France, mais bien plus souvent encore en Angleterre, où l'aristocratie de l'argent et celle des machines se sont unies à l'aristocratie politique pour demander des lois qui ont aggravé la misère du pauvre, en repoussant le travail de ses bras; travail qui seul peut le conduire à l'aisance et assurer sa tranquillité.

Quand nous introduisions chez nous, en 1828, pour 453,760,337 francs, et en 1829, pour 483,353,139 francs de produits étrangers en concurrence de ceux que nos agriculteurs eussent pu nous fournir en très-grande partie, ne devions-nous pas croire que si, en 1825, le paupérisme et les délits étaient moins effrayants qu'en 1829, c'est qu'en 1824 nous n'introduisions chez nous que pour 394,830,727 francs de ces mêmes produits, presque tous semblables ou analogues à ceux que nous pourrions récolter par nous-mêmes. Sachons donc nous en fournir chez nous pour relever notre marché, rétablir notre commerce abattu, repousser le paupérisme prêt à nous dominer, rassurer la population effrayée des suites de la misère, et poser une digue, en faveur des progrès de la raison, aux progrès du malheur et à ceux de la perversité.

CHAPITRE V.

MOYENS D'OCCUPER LES POPULATIONS DÉSŒUVRÉES PAR SUITE DE L'EMPLOI DES MACHINES.

Il n'est rien sous le ciel qui ne soit sujet à des inconvénients plus ou moins graves : l'agglomération des populations dans les grandes villes, si favorable aux progrès des lumières, à ceux des sciences, de l'industrie, du commerce et de la civilisation, est contraire aux succès de l'agriculture et à la tranquillité publique; elle devient fréquemment la cause de la perversité des classes laborieuses; quand le travail leur manque, la misère les conduit à l'immoralité. Ne méconnaissons pas les avantages de l'agglomération des populations dans nos villes, afin d'en profiter; mais aussi ne méconnaissons pas ses inconvénients, afin d'y porter remède.

En 1810, le comté de Middlesex avait un criminel sur 991 habitants, tandis que le pays de Galles n'en comptait qu'un sur 8,007, et l'Angleterre, réunie à ce pays, 1 sur 2,044; en 1820, ce comté en comptait 1 sur 421 habitants, et le pays de Galles 1 sur 2,406. L'Angleterre, réunie à ce pays, en comptait 1 sur 892. De 1825 à 1829, le département de la Seine a compté, année moyenne, un accusé prévenu de crime sur 1,275 habitants, tandis que la France n'en a compté qu'un sur 4,505; que le département de la Creuse n'en a compté qu'un sur 13,312, et que celui de l'Ain n'en a compté qu'un sur 9,489.

L'agglomération des populations dans les grandes villes, en excitant l'émulation du bien, excite donc aussi celle du mal; la première est le mobile des classes dans l'aisance, quand l'ambition et la cupidité ne les aveuglent pas; les classes pauvres et ignorantes se laissent trop souvent entraîner par la seconde, quand l'aspect du luxe et de la richesse, accumulés au sein de nos cités,

excite leurs désirs, et quand la misère qui les accable accroît leurs besoins.

Voilà pourquoi la population qui n'a que son travail pour vivre se pervertit par la misère beaucoup plus rapidement au sein des villes populeuses qu'au sein des campagnes, et pourquoi son agglomération y rend plus redoutables les effets de sa perversité.

C'est en éloignant des villes la partie de la population que les machines repoussent des ateliers pour la reporter dans les campagnes où sa présence est désirable et où elle trouvera des travaux assurés, que l'on pourra tout à la fois lui rendre l'aisance, la moralité et le bonheur.

Il suffit pour cela, dans l'état où se trouve la France, d'abord de protéger nos agriculteurs français contre la concurrence des cultivateurs étrangers, et ensuite de créer au sein des campagnes peu populeuses, dont le sol en friche reste improductif faute de travailleurs, 80,000 petites maisons, placées chacune sur un hectare de terre situé au milieu des landes ou des bruyères, en créant aussi 20,000 habitations de jardiniers, sur un demi-hectare de terrain chacune, et en les placant dans les nombreuses communes où les produits de l'horticulture sont encore insuffisamment obtenus.

Par là on retirera du sol français un surcroit de produits utiles a la nourriture de ses habitants et d'autres produits consommables, susceptibles de couvrir nos marchés, et d'y être échangés contre des produits industriels. Cela seul, en accroissant la consommation de ces derniers, deviendra un élément de prospérité pour nos manufacturiers; notre commerce sera plus efficacement soutenu par cette création que par les 30 millions que l'État a prêtés à quelques spéculateurs privilégiés qui ne s'en sont guère mieux trouvés pour la continuation de leurs affaires.

Que faudrait-il pour pourvoir à l'établissement de 100,000 ménages agricoles ou horticoles, que l'on rendrait propriétaires de leurs petites habitations? 1,000 francs pour chacun, ou 100 millions; le dixième de ce milliard dont on a indemnisé les émigrés;

le cinquième des 500 millions dont on a dû surcharger le budget de la France à la suite des triomphes de juillet; le septième du fonds que représentaient les revenus de la liste civile ancienne, et le vingtième du fonds que représenteraient les économies annuelles qui pourraient être faites sur nos énormes dépenses, si la paix était assurée au dedans et au dehors, et si toutes les dépenses que nécessite le besoin de la maintenir étaient supprimées.

On a employé en France, depuis la révolution de juillet, plus de 10 millions de francs par an en ateliers de charité pour accorder de précaires et insuffisants secours à l'indigence; on a employé plus de 6 millions de francs en frais d'impression relatifs à l'établissement des gardes nationales et des colléges électoraux; on a supprimé sur le budget des départements 500,000 francs d'allocation au clergé; on a réduit les traitements des ministres, des préfets et des sous-préfets d'une forte somme; sur tout cela, et sur quelques autres choses, n'aurait-on pas pu trouver l'intérêt d'un emprunt de 100 millions destiné à faire fleurir le commerce, en faisant prospérer l'agriculture, et en détruisant l'indigence en France?

Le soulagement perpétuel de l'indigence est le plus sûr moyen d'assurer la tranquillité publique, qui en temps ordinaire n'est guère attaquée que par des gens qui n'ont rien à perdre à la solde d'ambitieux qui voudraient tout gagner. Les émeutes sont ainsi la plus funeste de toutes les parodies du grand dogme de la souveraineté du peuple, dogme qui ne peut s'exercer que par les formes représentatives. La liberté ne peut régner que quand la licence est inactive : nous qui voulons la liberté, compagne de l'ordre et de la tranquillité publique, la payerons-nous trop cher en employant quelques économies du trésor national, pour déplacer des lieux qu'ils encombrent 100,000 ouvriers trop peu occupés, dont l'ouvrage actuel réparti sur 400,000 autres, comme eux dans l'indigence, leur laisserait à eux-mêmes le travail nécessaire pour obtenir des salaires convenables à leurs besoins?

500,000 ouvriers des villes seraient donc secourus par le classement de 100,000 d'entre eux dans les campagnes; et comme ces 500,000 ouvriers représentent chacun une famille de cinq personnes suivant les calculs ordinaires de l'économie politique, 2,500,000 individus seraient soustraits à l'indigence par le mode de secours que nous proposons de leur appliquer. Ce nombre surpasserait de plus d'un cinquième celui des indigents que renfermait toute la France avant la révolution de juillet 1830.

Alors nos indigents recevaient des charités publiques ou particulières plus de 20 francs chacun par année, ce qui eût porté pour 2,500,000, à 50 millions de francs la dépense annuelle qu'ils occasionnent à la France. S'ils étaient convenablement classés comme nous l'indiquons, les secours à l'indigence seraient réduits tout au plus au cinquième de cette somme, qui ne comprenait pas les dépenses des hospices, comme celle que nous réclamons pour eux ne pourrait les comprendre encore: il y aurait donc une économie annuelle de 40 millions sur les secours de toute nature distribués à la classe indigente.

Ajoutons à cela que les 100 millions de dépenses foncières que nous proposons pour créer 100,000 petits propriétaires, dont les travaux seraient répandus dans toutes nos campagnes, ne resteraient pas improductifs pour le trésor lui-même; chaque établissement de 1,000 francs de valeur, compris le mobilier qui le garnirait, ne serait concédé en toute propriété que moyennant une rente de 50 francs par année, remboursable à la volonté du concessionnaire: cela seul produirait à l'État les 5 millions de rente de l'emprunt qu'il aurait fait, et il en retirerait 1 million de plus par année, à cause des impôts de toute nature dont les nouvelles habitations et leurs propriétaires deviendraient passibles à raison de 10 francs par habitation garnie d'une famille. Les contribuables auraient donc 40 millions de francs d'économie sur leurs aumônes volontaires ou forcées; l'État, 6 p. 0/0 d'intérêt de ses avances; les propriétaires fonciers, plus de bras à employer à la culture du sol voisin des habitations nouvelles; nos marchés seraient mieux approvi-

sionnés des denrées provenant de la petite culture; la grande culture produirait aussi davantage par le surcroît d'ouvriers dont elle pourrait disposer; l'industrie fleurirait en échangeant plus facilement ses produits contre ceux du sol national; 2,500,000 indigents seraient placés au-dessus des atteintes de la misère; la tranquillite publique étant assurée par l'impossibilité d'organiser des émeutes populaires, la France, sans craindre les agitateurs, serait gouvernée conformément à ses vœux; constamment en rapport avec les progrès de la raison, elle verrait la liberté se maintenir sans danger pour sa prospérité, et son industrie s'étendrait au dedans sans danger pour son bonheur, sa puissance et sa gloire.

Quand l'industrie, perfectionnant ses machines, congédierait des ouvriers auxquels elle ne pourrait offrir d'occupation nouvelle, il suffirait, pour obvier à ce mal, de défricher quelques hectares de bruyères, ou de créer quelques maisons de jardinier; les faibles dépenses nécessaires pour cela seraient-elles trop grandes pour payer la prospérité de la population et le maintien de la tranquillité publique? Le désir des richesses que multiplieraient les machines entretiendrait une émulation utile parmi les citoyens; ceux qui se trouveraient suffisamment riches consacreraient leur temps au service de leur patrie, en ne réclamant d'elle que l'honneur de la servir et celui de l'avoir servie. Ceux qui n'auraient que leurs bras pour vivre trouveraient un travail assuré au sein de nos campagnes; et quand, par leurs économies ou leurs talents, ils auraient accumulé quelques capitaux, ils pourraient, sans craindre d'aggraver la misère du peuple, les employer au profit de tous les citoyens en les appliquant au perfectionnement des arts industriels.

Voilà un beau rêve; il ne tient qu'à nos législateurs d'en faire une belle réalité.

MÉMOIRE

SUR

LES SURFACES ISOTHERMES

DANS LES CORPS SOLIDES HOMOGÈNES

EN ÉQUILIBRE DE TEMPÉRATURE;

PAR G. LAMÉ,

INGÉNIEUR DES MINES, PROFESSEUR DE PHYSIQUE À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

§ I.

Lorsqu'un corps solide homogène est en équilibre de température, sous l'influence de sources constantes de chaleur et de froid, contre lesquelles sa surface est immédiatement appliquée, la température (V), constante avec le temps, mais variable d'un point à l'autre de ce corps, est, comme l'on sait, une fonction des coordonnées x, y, z, qui satisfait à l'équation aux différences partielles

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0 \qquad (1)$$

Il existe alors dans ce corps des surfaces où la température reste la même dans toute l'étendue de chacune d'elles. Ces surfaces

d'égale température peuvent être conçues représentées par une même équation, contenant un paramètre variable de l'une à l'autre, et de la forme

$$F(x,y,z) = \lambda;$$

λ étant ce paramètre, ou la fonction des coordonnées dont la valeur numérique est constamment la même pour tous les points d'une surface individuelle.

Toute fonction F n'est pas propre à représenter des surfaces d'égale température pour un de tous les cas d'équilibre calorifique imaginables; elle doit satisfaire pour cela à une équation aux différences partielles qu'il est facile de trouver.

Si cette fonction (F ou λ) était connue, la température V devrait pouvoir être représentée par une équation de la forme

$$V = \varphi(\lambda),$$

puisque V et λ seraient constants ensemble, variables ensemble, dans toute l'étendue du corps proposé. On aurait d'après cela

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dx}, \quad \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \frac{dV}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dx^2},$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{dV}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dy}, \quad \frac{d^2V}{dy^2} = \frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \frac{dV}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dy^2},$$

$$\frac{dV}{dz} = \frac{dV}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dz}, \quad \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 + \frac{dV}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dz^2};$$

et par suite l'équation (1) pourrait être mise sous la forme

$$\frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right) + \frac{dV}{d\lambda}\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right) = 0.$$

Or, $\frac{dV}{d\lambda}$ et $\frac{d^2V}{d\lambda^2}$ ne contenant d'autre variable que λ, le quotient

$$\left[\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right) : \left(\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right)\right]$$

devrait jouir de la même propriété. Ainsi la fonction λ doit satisfaire à une équation différentielle de la forme

$$(2)\quad \frac{d^2\lambda}{dx^2}+\frac{d^2\lambda}{dy^2}+\frac{d^2\lambda}{dz^2}-\psi(\lambda)\left(\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right)=0.$$

(ψ étant une fonction arbitraire de λ), pour que l'équation ($\lambda = c$) puisse représenter un système de surfaces isothermes.

En remplaçant $\psi(\lambda)$ par $\frac{1}{\varphi(\lambda)}\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}$, on aura

$$\varphi(\lambda)\frac{d^2V}{d\lambda^2}+\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\frac{dV}{d\lambda}=0,$$

d'où en intégrant deux fois

$$V = A\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{\varphi(\lambda)}+A'.$$

Si le corps proposé est limité par deux surfaces représentées par les équations $\lambda = a$, $\lambda = a'$, entretenues à des températures données T et T', on aura, pour déterminer les deux constantes A et A', les deux équations

$$T = A\int_{\lambda_0}^{a}\frac{d\lambda}{\varphi(\lambda)}+A',\quad T' = A\int_{\lambda_0}^{a'}\frac{d\lambda}{\varphi(\lambda)}+A',$$

d'où

$$A = \frac{T'-T}{\int_{\lambda_0}^{a'}\frac{d\lambda}{\varphi}-\int_{\lambda_0}^{a}\frac{d\lambda}{\varphi}}$$

$$\text{et } A' = T-\frac{T'-T}{\int_{\lambda_0}^{a'}\frac{d\lambda}{\varphi}-\int_{\lambda_0}^{a}\frac{d\lambda}{\varphi}}\cdot\int_{\lambda_0}^{a}\frac{d\lambda}{\varphi};$$

en sorte que l'équation

$$(3)\quad V = T+\frac{T'-T}{\int_{\lambda_0}^{a'}\frac{d\lambda}{\varphi}-\int_{\lambda_0}^{a}\frac{d\lambda}{\varphi}}\left(\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{\varphi}-\int_{\lambda_0}^{a}\frac{d\lambda}{\varphi}\right)$$

donnera la température V, correspondante à une surface quelconque λ.

§ II.

On voit que dans le cas particulier d'une enveloppe solide, dont les parois intérieure et extérieure seraient entretenues à des températures constantes, mais différentes de l'une à l'autre, la loi des températures stationnaires serait connue, si l'on pouvait déterminer *à priori* l'équation générale des surfaces isothermes qui correspondent à ce cas.

Les surfaces des parois devant être deux d'entre elles, le problème consisterait à intégrer l'équation (2), et à déterminer les formes ou constantes arbitraires que contiendrait la fonction λ, de manière que pour deux valeurs numériques données au paramètre c, l'équation $\lambda = c$ représentât successivement les surfaces des parois. Mais la solution analytique de ce problème serait généralement aussi difficile à trouver que celle qui consisterait à intégrer directement l'équation (1), et à déterminer les fonctions arbitraires de l'intégrale V, de manière qu'elle devînt numériquement égale à T ou à T′ pour tous les points des parois de l'enveloppe.

Les cas simples d'une sphère creuse et d'un cylindre creux indéfini à base circulaire, dans lesquels l'épaisseur de l'enveloppe solide serait partout la même, sont les seuls où la détermination préalable des surfaces isothermes n'offre aucune difficulté. Pour tout autre cas, les parois, quoique toujours comprises parmi ces surfaces, doivent le plus souvent s'en distinguer par quelque propriété singulière, et en quelque sorte ombilicale, qui n'appartienne pas à toutes les autres surfaces d'égale température de l'intérieur de l'enveloppe.

Il ne suffirait pas, pour éloigner cette circonstance qui complique la recherche directe de l'équation générale de ces surfaces, que les parois appartinssent à la même famille, et que leurs équations, de même forme et du même degré, continssent le même nombre de paramètres; car, dans ce cas, qui paraît beaucoup plus

simple au premier abord que celui où les parois seraient dissemblables, on ne pourrait pas conclure, en général, que les surfaces d'égale température dussent être directement représentées par des équations de même forme et du même degré que celles des surfaces qui limitent l'enveloppe solide. Par exemple, dans un ellipsoïde creux, dont la paroi interne serait semblable à la surface extérieure, les surfaces isothermes ne seraient pas nécessairement des ellipsoïdes semblables aux parois, ni même des ellipsoïdes.

§ III.

Les conditions nécessaires pour que la forme commune des équations des deux parois soit réellement celle qui appartient aux surfaces d'égale température, peuvent se déduire analytiquement de la vérification de l'équation (2).

En prenant cette forme pour l'équation générale des surfaces cherchées, on regardera toutes les constantes qu'elle contient comme des fonctions inconnues du paramètre λ; on en déduira, par des différentiations convenables, les coefficients différentiels partiels de ce paramètre; après les avoir substitués dans l'équation (2), on posera les relations nécessaires pour qu'elle soit satisfaite, quelles que soient les coordonnées; si ces relations entre les variations des constantes arbitraires ne sont pas incompatibles, leurs intégrations feront connaître comment le paramètre λ doit entrer dans les constantes de la forme proposée, pour qu'elle puisse représenter les surfaces d'égale température; enfin, il faudra que deux valeurs numériques données à ce paramètre puissent rendre l'équation générale successivement identique avec les équations des deux parois.

Si cette vérification ne réussit pas, il faudra en conclure que, dans le cas considéré, les surfaces isothermes de l'intérieur de l'enveloppe doivent être exprimées par une équation différente, et probablement plus compliquée que celle des parois; et que ces dernières ne rentrent dans l'équation générale que par la dispa-

rition de certains termes, essentiels pour toute autre surface individuelle.

§ IV.

J'appliquerai cette méthode au cas où l'enveloppe est limitée par deux surfaces du second degré ayant même centre, leurs axes principaux étant de plus situés sur les mêmes droites. Leurs équations seront de la forme

$$mx^2 + ny^2 + pz^2 = 1. \tag{4}$$

Il s'agit de trouver comment les constantes $m, n, p,$ doivent contenir λ, pour que l'équation (4) puisse représenter, par la variation successive de ce paramètre, toutes les surfaces d'égale température de l'intérieur de l'enveloppe proposée.

On regardera donc $m, n, p,$ comme des fonctions inconnues de λ, ce qui donnera

$$2mx + (m'x^2 + n'y^2 + p'z^2)\frac{d\lambda}{dx} = 0,$$

$$\left(m' = \frac{dm}{d\lambda},\ m'' = \frac{d^2m}{d\lambda^2}, \dots\right),$$

$$2mx + 4m'x\frac{d\lambda}{dx} + (m''x^2 + n''y^2 + p''z^2)\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + (m'x^2 + n'y^2 + p'z^2)\frac{d^2\lambda}{dx^2} = 0, \text{ etc.}$$

et par suite

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 = 4\,\frac{m^2x^2 + n^2y^2 + p^2z^2}{(m'x^2 + n'y^2 + p'z^2)^2}$$

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2} = -\frac{\frac{m+n+p}{2}(m'x^2+n'y^2+p'z^2) - 2(mm'x^2+nn'y^2+pp'z^2)}{(m'x^2+n'y^2+p'z^2)^2} - \frac{(m^2x^2+n^2y^2+p^2z^2)(m''x^2+n''y^2+p''z^2)}{(m'x^2+n'y^2+p'z^2)^3}.$$

L'équation (2) devient alors, en faisant $\downarrow = \frac{\varphi'}{\varphi}$, et en posant, pour simplifier, $\frac{m+n+p}{2} = \mathrm{L}$:

$$\begin{aligned}
&\{\Phi((\mathrm{L}-2m)m'^2+m''m^2) + m^2m'\Phi'\}x^4\\
&+ \{\Phi((\mathrm{L}-2n)n'^2+n''n^2) + n^2n'\Phi'\}y^4\\
&+ \{\Phi((\mathrm{L}-2p)p'^2+p''p^2) + p^2p'\Phi'\}z^4\\
&+ \{\Phi(2(\mathrm{L}-m-n)m'n'+m''n^2+n''m^2)+(m^2n'+n^2m')\Phi'\}x^2y^2\\
&+ \{\Phi(2(\mathrm{L}-n-p)n'p'+n''p^2+p''n^2)+(n^2p'+p^2n')\Phi'\}y^2z^2\\
&+ \{\Phi(2(\mathrm{L}-p-m)p'm'+p''m^2+m''p^2)+(p^2m'+m^2p')\Phi'\}z^2x^2 = 0.
\end{aligned}$$

Cette dernière équation devant être satisfaite quelles que soient les valeurs des coordonnées, on devra avoir les six relations

$$\begin{aligned}
\Phi((\mathrm{L}-2m)m'^2+m''m^2) + m^2m'\Phi' &= 0,\\
\Phi((\mathrm{L}-2n)n'^2+n''n^2) + n^2n'\Phi' &= 0,\\
\Phi((\mathrm{L}-2p)p'^2+p''p^2) + p^2p'\Phi' &= 0,\\
\Phi(2(\mathrm{L}-m-n)m'n'+m''n^2+n''m^2) + (m^2n'+n^2m')\Phi' &= 0,\\
\Phi(2(\mathrm{L}-n-p)n'p'+n''p^2+p''n^2) + (n^2p'+p^2n')\Phi' &= 0,\\
\Phi(2(\mathrm{L}-p-m)p'm'+p''m^2+m''p^2) + (p^2m'+m^2p')\Phi' &= 0.
\end{aligned}$$

Ou bien, en posant $m = \frac{1}{a}$, $n = \frac{1}{b}$, $p = \frac{1}{c}$:

$$\begin{aligned}
\Phi\mathrm{L}a'^2 &= a''\Phi + a'\Phi',\\
\Phi\mathrm{L}b'^2 &= b''\Phi + b'\Phi',\\
\Phi\mathrm{L}c'^2 &= c''\Phi + c'\Phi',\\
\Phi\left(2\mathrm{L}a'b'+2(a'-b')\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)\right) &= (a''+b'')\Phi+(a'+b')\Phi',\\
\Phi\left(2\mathrm{L}b'c'+2(b'-c')\left(\frac{b'}{b}-\frac{c'}{c}\right)\right) &= (b''+c'')\Phi+(b'+c')\Phi',\\
\Phi\left(2\mathrm{L}c'a'+2(c'-a')\left(\frac{c'}{c}-\frac{a'}{a}\right)\right) &= (c''+a'')\Phi+(c'+a')\Phi'.
\end{aligned}$$

Les trois premières donnent, par l'élimination de $\frac{\varphi'}{\varphi}$, les relations

$$\mathrm{L}(a'-b') = \frac{a''}{a'} - \frac{b''}{b'},$$
$$\mathrm{L}(b'-c') = \frac{b''}{b'} - \frac{c''}{c'},$$
$$\mathrm{L}(c'-a') = \frac{c''}{c'} - \frac{a''}{a'};$$

en outre, si l'on retranche chacune des trois dernières d'un couple convenable des premières, Φ' et Φ se trouvent encore éliminés, et l'on a

$$\mathrm{L}(a'-b')^2 = 2(a'-b')\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right),$$
$$\mathrm{L}(b'-c')^2 = 2(b'-c')\left(\frac{b'}{b} - \frac{c'}{c}\right),$$
$$\mathrm{L}(c'-a')^2 = 2(c'-a')\left(\frac{c'}{c} - \frac{a'}{a}\right).$$

Or, il est aisé de voir que les six dernières relations ne peuvent admettre d'autre solution que celle indiquée par les équations

$$a' = b' = c', \quad \text{d'où} \quad a'' = b'' = c''.$$

Tout autre système de valeurs conduirait à des expressions indépendantes de λ pour m, n, p.

Ainsi, les constantes a, b, c, ou $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \frac{1}{p}$, doivent être égales à une même fonction quelconque de λ, augmentée ou diminuée de constantes différentes. On aura donc les valeurs les plus générales de m, n, p, en posant

$$m = \frac{1}{\lambda^2}, \quad n = \frac{1}{\lambda^2 - b^2}, \quad p = \frac{1}{\lambda^2 - c^2},$$

où b et c sont deux lignes déterminées et constantes. On peut

supposer, sans troubler cette généralité, que la constante c soit plus grande que b.

§ V.

Mais l'équation (4) représentant des surfaces très-différentes, suivant que λ sera plus grand que b et c, plus grand que b mais plus petit que c, ou à la fois plus petit que c et b, il convient de séparer ces trois cas différents. Désignons par μ, ν, ρ, les valeurs de λ qui leur correspondent, on aura les équations

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2-b^2} + \dfrac{z^2}{\mu^2-c^2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{\nu^2} + \dfrac{y^2}{\nu^2-b^2} - \dfrac{z^2}{c^2-\nu^2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{\rho^2} - \dfrac{y^2}{b^2-\rho^2} - \dfrac{z^2}{c^2-\rho^2} = 1, \end{cases}$$

pour représenter trois systèmes de surfaces isothermes compris sous la forme générale (4).

Toutes les surfaces de chaque système, et même celles des trois systèmes réunis, ont pour éléments constants de l'une à l'autre, les distances focales $2b$, $2c$, $2\sqrt{c^2-b^2}$, de leurs sections principales faites par les mêmes plans coordonnés.

Ainsi, lorsqu'on entretient à des températures constantes les parois d'une enveloppe solide, terminée par des ellipsoïdes, dont les sections principales ont les mêmes foyers, les surfaces d'égale température, dans l'intérieur de cette enveloppe, sont encore des ellipsoïdes ayant les mêmes foyers que les précédents.

Si l'enveloppe a pour limite deux hyperboloïdes à une nappe indéfinie, de mêmes foyers, ses surfaces isothermes seront encore des hyperboloïdes de même espèce et assujettis à la même condition.

Enfin, si les parois indéfinies de l'enveloppe sont les moitiés de

deux hyperboloïdes à deux nappes ayant mêmes foyers, ses surfaces d'égale température seront toutes des moitiés d'hyperboloïdes de la même famille.

On peut vérifier, comme on le verra plus bas, que dans chacun de ces trois cas, les parties homologues des surfaces isothermes du même système sont effectivement traversées par la même quantité de chaleur dans le même temps. Mais avant d'entreprendre cette vérification, il convient d'étudier de plus près le système des trois équations (5).

§ VI.

Si l'on imagine sur l'axe des x, quatre points B, B′, C, C′, distants du centre ou de l'origine O, de quantités $OB = OB' = b$, $OC = OC' = c$, les points B et B′ seront les foyers de toutes les courbes du second degré, traces sur le plan des $x\ y$ de toutes les surfaces représentées par les équations (5); et les traces de ces mêmes surfaces sur le plan des $x\ z$, auront toutes pour foyers les points C et C′. J'appelle les points B, B′, C, C′, les foyers des surfaces du second degré à axes inégaux, représentées par les équations (5). Ces foyers étant donnés, ainsi que le paramètre μ, ν, ou ρ, de l'une de ces surfaces, elle est entièrement connue de forme et de grandeur.

Un point quelconque de l'espace, correspondant aux coordonnées orthogonales x, y, z, sera situé sur trois surfaces appartenant respectivement aux trois systèmes (5), et ayant pour paramètres les valeurs de μ, ν, ρ, que l'on déduirait des équations (5), en fonction de x, y, z.

Il suit de là que l'on peut regarder les trois paramètres variables μ, ν, ρ, comme composant un nouveau genre de coordonnées. Un point de l'espace est alors donné par l'intersection d'un ellipsoïde et de deux hyperboloïdes, l'un à une nappe, et l'autre à deux nappes, ayant tous trois les mêmes foyers, B, B′, C, C′.

Je donnerai aux trois variables μ, ν, ρ, le nom de *coordonnées*

elliptiques; et j'appellerai *surfaces homofocales* toutes celles qui sont représentées par les équations (5).

Les trois coordonnées orthogonales $x, y, z,$ sont liées aux coordonnées elliptiques, $\mu, \nu, \rho,$ par l'équation (5), ou par les suivantes, que l'on obtient par des éliminations convenables :

$$(6)\qquad \begin{cases} bc\,.\,x = \mu\nu\rho, \\ b\sqrt{c^2-b^2}\,.\,y = \sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{b^2-\rho^2}, \\ c\sqrt{c^2-b^2}\,.\,z = \sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\rho^2}. \end{cases}$$

Ces formules démontrent que si l'on imagine, en un point quelconque de l'espace, les trois surfaces homofocales qui y passent, chacune des coordonnées orthogonales de ce point sera égale au produit des trois demi-axes de ces surfaces qui ont la même direction qu'elle, divisé par le rectangle des deux demi-distances focales correspondantes à toutes les sections principales de ces mêmes surfaces, dont les plans sont parallèles à cette coordonnée.

§ VII.

Des plans tangents aux trois surfaces (5), au même point $(x,y,z,)$ ou $(\mu, \nu, \rho),$ ont pour équations

$$\frac{xx'}{\mu^2} + \frac{yy'}{\mu^2-b^2} + \frac{zz'}{\mu^2-c^2} = 1,$$

$$\frac{xx'}{\nu^2} + \frac{yy'}{\nu^2-b^2} - \frac{zz'}{c^2-\nu^2} = 1,$$

$$\frac{xx'}{\rho^2} - \frac{yy'}{b^2-\rho^2} - \frac{zz'}{c^2-\rho^2} = 1.$$

Ces trois plans sont perpendiculaires entre eux, car les valeurs de $x, y, z,$ données en $\mu, \nu, \rho,$ par les équations (6) conduisent aux identités

$$\frac{x^2}{\mu^2\nu^2} + \frac{y^2}{(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)} - \frac{z^2}{(\mu^2-c^2)(c^2-\nu^2)} = 0,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2\rho^2} - \frac{y^2}{(\nu^2-b^2)(b^2-\rho^2)} + \frac{z^2}{(c^2-\nu^2)(c^2-\rho^2)} = 0,$$

$$\frac{x^2}{\rho^2\mu^2} - \frac{y^2}{(b^2-\rho^2)(\mu^2-b^2)} - \frac{z^2}{(c^2-\rho^2)(\mu^2-c^2)} = 0;$$

relations qui expriment que les cosinus des angles de ces plans sont nuls.

Ainsi, une surface quelconque de l'un des systèmes (5) coupe normalement toutes les surfaces des deux autres systèmes.

§ VIII.

Considérons particulièrement un des ellipsoïdes au paramètre μ, représenté par la première des équations (5). En un quelconque de ses points passent deux hyperboloïdes, l'un à une nappe et l'autre à deux nappes, ayant les mêmes foyers que cet ellipsoïde, qui sont perpendiculaires à sa surface, et qui se coupent conséquemment suivant une courbe à double courbure normale à l'ellipsoïde proposé. Soit M′ un point de cette intersection voisin de M, et situé sur un second ellipsoïde infiniment voisin du premier et ayant pour paramètre $\mu + \delta\mu$; soit $MM' = \delta s$, et représentons par δx, δy, δz, les projections de cet élément linéaire sur les trois axes. Il est évident qu'en passant de M à M′, ν et ρ restent constants; μ est donc la seule coordonnée elliptique qui varie. D'après cela les équations (6) donneront

$$bc\,\delta x = \nu\rho\,\delta\mu,$$

$$b\sqrt{c^2-b^2}\,.\,\delta y = \frac{\mu\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{b^2-\rho^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}},$$

$$c\sqrt{c^2-b^2}\,.\,\delta z = \frac{\mu\sqrt{c^2-\nu^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}}{\sqrt{\mu^2-c^2}}.$$

On en conclura facilement l'expression de l'élément linéaire $MM' = \delta s = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$; on trouve ainsi, toute réduction faite,

$$\delta s = \frac{\sqrt{\mu^2-\nu^2}\,\sqrt{\mu^2-\rho^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}}\,\delta\mu.$$

Pareillement, si on désigne par $\delta s'$ l'élément de la courbe d'intersection de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde à deux nappes aux mêmes foyers, qui passent en un même point, on aura

$$\delta s' = \frac{\sqrt{\mu^2-\nu^2}\,\sqrt{\nu^2-\rho^2}}{\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}}\,\delta\nu.$$

Enfin, si $\delta s''$ est l'élément de la courbe d'intersection de l'hyperboloïde à une nappe et de l'ellipsoïde homofocaux correspondants à un même point de l'espace, on aura

$$\delta s'' = \frac{\sqrt{\mu^2-\rho^2}\,\sqrt{\nu^2-\rho^2}}{\sqrt{b^2-\rho^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}}\,\delta\rho.$$

Si donc s, s', s'', représentent les longueurs finies variables des courbes d'intersection aux éléments δs, $\delta s'$, $\delta s''$, s variant avec μ seulement, s' avec ν, s'' avec ρ, on aura pour déterminer ces trois fonctions les trois intégrales suivantes :

$$(7)\qquad \begin{cases} s = \displaystyle\int_c^{\mu} \frac{\sqrt{\mu^2-\nu^2}\,\sqrt{\mu^2-\rho^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}}\,\delta\mu, \\ s' = \displaystyle\int_b^{\nu} \frac{\sqrt{\mu^2-\nu^2}\,\sqrt{\nu^2-\rho^2}}{\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}}\,\delta\nu, \\ s'' = \displaystyle\int_0^{\rho} \frac{\sqrt{\mu^2-\rho^2}\,\sqrt{\nu^2-\rho^2}}{\sqrt{b^2-\rho^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}}\,\delta\rho. \end{cases}$$

§ IX.

Toutes les courbes s', s'', suivant lesquelles un même ellipsoïde

est coupé par tous les hyperboloïdes ayant mêmes foyers que lui, ne sont autres que les lignes de courbure de sa surface. Il s'agit ici de vérifier ce théorème important: les équations de la normale à l'ellipsoïde, au point $(x,y,z,)$, sont

$$\mu^2 z(x'-x) = (\mu^2-c^2)x(z'-z),$$
$$\mu^2 y(x'-x) = (\mu^2-b^2)y(y'-y),$$

si cette droite est rencontrée en $(x',y',z',)$ par la normale infiniment voisine, correspondante au point $(x+dx, y+dy, z+dz)$, on devra avoir

$$\mu^2(z\,dx-x\,dz)x' + c^2x^2\,dz = 0,$$
$$\mu^2(y\,dx-x\,dy)x' + b^2x^2\,dy = 0;$$

car ces dernières équations s'obtiennent en combinant les équations de la normale, avec celles qu'on en déduit par la différentiation de x,y,z. L'élimination de l'abscisse x' du point de concours supposé des deux normales voisines conduit à la relation

$$b^2\left(\frac{z\,dx-x\,dz}{dz}\right) = c^2\left(\frac{y\,dx-x\,dy}{dy}\right),$$

ou

$$(8)\ldots\qquad b^2\left(\frac{z}{dz}-\frac{x}{dx}\right) = c^2\left(\frac{y}{dy}-\frac{x}{dx}\right),$$

à laquelle doivent satisfaire les différentielles dx, dy, dz, pour que les normales voisines soient dans le même plan. Cette relation, combinée avec l'équation différentielle de l'ellipsoïde, représente, comme on le sait, les lignes de courbure de sa surface.

Maintenant, lorsqu'on chemine sur une des courbes s', μ et ρ conservent les mêmes valeurs, et ν varie seul; alors on a par les équations (6)

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\nu}{\nu},\quad \frac{dy}{y} = \frac{\nu}{\nu^2-b^2},\quad \frac{dz}{z} = \frac{\nu}{\nu^2-c^2};$$

or ces valeurs de $\frac{dx}{x}$, $\frac{dy}{y}$, $\frac{dz}{z}$, rendent identique l'équation (8); les courbes s' forment donc un des systèmes de lignes de courbure de l'ellipsoïde.

Pareillement lorsqu'on suit une même courbe s'', μ et ν restent constants, et ρ varie seul; les équations (6) donnent alors

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\rho}{\rho}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{\rho}{\rho^2 - b^2}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{\rho}{\rho^2 - c^2};$$

expressions qui rendent encore identique l'équation (8); les courbes s'' forment donc le second système de lignes de courbure de l'ellipsoïde.

On peut énoncer ces propriétés d'une manière plus générale, en disant que *toutes les surfaces homofocales de deux quelconques des trois systèmes* (5), *rencontrent normalement une surface courbe quelconque du troisième système, et tracent sur elle toutes ses lignes de courbure.*

§ X.

Revenons maintenant à la question physique, et cherchons quelle sera la loi des températures stationnaires d'une enveloppe solide dans laquelle les surfaces d'égale température seront représentées par l'une des trois équations (5). Considérons d'abord le cas où ces surfaces sont des ellipsoïdes. Il faut d'abord trouver la valeur de la fonction $\downarrow(\lambda)$, qui rend identique l'équation (2). Si l'on pose dans l'équation (4), et dans les relations que nous en avons déduites par la différentiation

$$\lambda = \mu, \quad m = \frac{1}{\mu^2}, \quad n = \frac{1}{\mu^2 - b^2}, \quad p = \frac{1}{\mu^2 - c^2},$$

on trouve

$$m' = -\frac{2}{\mu^3}, \quad n' = -\frac{2\mu}{(\mu^2 - b^2)^2}, \quad p' = -\frac{2\mu}{(\mu^2 - c^2)^2},$$

$$m^2 = -\frac{1}{2\mu} m', \quad n^2 = -\frac{1}{2\mu} n', \quad p^2 = -\frac{1}{2\mu} p',$$

et par suite

$$(\mathrm{L}-2m)m'^2 + m''m^2 = m'^2\left(\frac{n+p}{2}\right),$$

$$(\mathrm{L}-2n)n'^2 + n''n^2 = n'^2\left(\frac{n+p}{2}\right),$$

$$(\mathrm{L}-2p)p'^2 + p''p^2 = p'^2\left(\frac{n+p}{2}\right),$$

$$2(\mathrm{L}-m-n)m'n' + m''n^2 + n''p^2 = 2m'n'\left(\frac{n+p}{2}\right),$$

$$2(\mathrm{L}-n-p)n'p' + n''p^2 + p''n^2 = 2n'p'\left(\frac{n+p}{2}\right),$$

$$2(\mathrm{L}-p-m)p'm' + p''m^2 + m''p^2 = 2p'm'\left(\frac{n+p}{2}\right);$$

d'où l'on conclut

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 = \frac{1}{\mu^2\left(\frac{x^2}{\mu^4} + \frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2} + \frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}\right)},$$

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2} = \left(\frac{1}{\mu^2-b^2} + \frac{1}{\mu^2-c^2}\right)\frac{1}{\mu\left(\frac{x^2}{\mu^4} + \frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2} + \frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}\right)},$$

ce qui donne, pour $\downarrow(\lambda)$ ou $(\downarrow)(\mu)$:

$$\downarrow(\mu) = \frac{\mu}{\mu^2-b^2} + \frac{\mu}{\mu^2-c^2}.$$

La fonction $\downarrow$ étant connue, on en déduira la fonction φ en intégrant l'équation

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{d\mu} = \downarrow = \frac{\mu}{\mu^2-b^2} + \frac{\mu}{\mu^2-c^2},$$

ce qui donne

$$\varphi(\mu) = \sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}.$$

La température V sera enfin donnée, soit par l'équation différentielle

$$(9)_0 \qquad \frac{dV}{d\mu}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2} = A,$$

soit par l'équation intégrale

$$(10)_0 \qquad V = A\int_c^{\mu}\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}} + B.$$

On trouvera aussi que pour le second des trois systèmes de surfaces d'égale température représentées par les équations (5), on a

$$\downarrow(\nu) = \frac{\nu}{\nu^2-b^2} - \frac{\nu}{c^2-\nu^2},$$

$$\Phi(\nu) = \sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2},$$

$$(9)_1 \qquad \frac{dV}{d\nu}\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2} = A,$$

$$(10)_1 \qquad V = A\int_b^{\nu}\frac{d\nu}{\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}} + B.$$

Enfin, dans le cas où l'enveloppe solide aurait pour surfaces d'égale température les hyperboloïdes à deux nappes représentés par la troisième des équations (5), on aura

$$\downarrow(\rho) = -\frac{\rho}{b^2-\rho^2} - \frac{\rho}{c^2-\rho^2},$$

$$\Phi(\rho) = \sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2},$$

$$(9)_2\ldots. \qquad \frac{dV}{d\rho}\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2} = A,$$

$$(10)_2\ldots. \qquad V = A\int_0^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}} + B.$$

Ainsi la température stationnaire, et variable d'un point à l'autre, dans les trois genres d'enveloppe dont les surfaces isothermes sont du second degré et homofocales, est exprimée par une transcen-

dante elliptique de la première espèce; et les trois variétés de cette transcendante correspondent respectivement aux trois cas que nous avons considérés.

§ XI.

Nous pouvons maintenant vérifier que dans chacun de ces cas toutes les surfaces isothermes sont traversées par la même quantité de chaleur dans le même temps, lorsque la température varie de l'une à l'autre, suivant les lois qui viennent d'être trouvées.

Considérons d'abord l'enveloppe ellipsoïdale. La quantité de chaleur qui traverse l'élément de volume compris entre deux ellipsoïdes infiniment voisins, ayant pour paramètres μ et $\mu + d\mu$, et les courbes s, correspondantes aux différents points du périmètre d'un élément $d\omega^2$, de la surface de l'ellipsoïde (μ), aura évidemment pour expression

$$K \frac{dV}{d\mu} \frac{\delta\mu}{\delta s} d\omega^2;$$

K étant le coefficient de la conductibilité intérieure, de la matière dont l'enveloppe est composée.

Il s'agit d'intégrer cette expression pour toute la surface de l'ellipsoïde μ; or, cette intégration peut se faire de deux manières : en exprimant l'élément $d\omega^2$ en coordonnées orthogonales, ou en coordonnées elliptiques.

En employant les coordonnées orthogonales, on remarquera d'abord que δs est égal à la partie de la normale à l'ellipsoïde (μ) comprise entre les deux ellipsoïdes qui limitent la couche considérée, en sorte que si δx, δy, δz, sont les projections de δs sur les axes, on a

$$\frac{z}{\mu^2 - c^2} \delta x = \frac{x}{\mu^2} \delta z, \quad \frac{y}{\mu^2 - b^2} \delta x = \frac{x}{\mu^2} \delta y,$$

d'où

$$\delta s = \frac{\mu^2}{x} \delta x \sqrt{\frac{x^2}{\mu^4} + \frac{y^2}{(\mu^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\mu^2 - c^2)^2}},$$

ou, en remarquant que $\frac{\delta x}{x} = \frac{\delta \mu}{\mu}$, comme l'indiquent les équations (6), puisque sur la courbe s, ν et ρ restent constants

$$\delta s = \mu \sqrt{\frac{x^2}{\mu^4} + \frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2} + \frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}}\, \delta \mu,$$

ce qui donnera

$$\frac{\delta \mu}{\delta s} = \frac{1}{\mu \sqrt{\frac{x^2}{\mu^4} + \frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2} + \frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}}}.$$

Quant à l'élément de surface $d\omega^2$, sa valeur est

$$d\omega^2 = \frac{\mu^2-c^2}{z}\, dx\, dy \sqrt{\frac{x^2}{\mu^4} + \frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2} + \frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}};$$

on peut donc poser

$$\mathrm{K} \frac{d\mathrm{V}}{d\mu} \frac{\delta \mu}{\delta s} d\omega^2 = \mathrm{K} \frac{d\mathrm{V}}{d\mu} \frac{\mu^2-c^2}{\mu} \frac{dx\,dy}{z}.$$

Ou bien, en remarquant que l'équation de l'ellipsoïde donne

$$\frac{z}{\sqrt{\mu^2-c^2}} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{\mu^2-b^2}},$$

on aura

$$\mathrm{K} \frac{d\mathrm{V}}{d\mu} \frac{\delta \mu}{\delta s} d\omega^2 = \mathrm{K} \frac{d\mathrm{V}}{d\mu} \frac{\sqrt{\mu^2-c^2}}{\mu} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{\mu^2-b^2}}}.$$

L'intégration de cette expression, par rapport à y, conduit à l'intégrale indéfinie

$$\mathrm{K} \frac{d\mathrm{V}}{d\mu} \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}}{\mu} \left(\arcsin \frac{\frac{y}{\sqrt{\mu^2-b^2}}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{\mu^2}}} + \text{const} \right) dx,$$

qui doit être prise de

$$\left(\frac{y}{\sqrt{\mu^2-b^2}} = -\sqrt{1-\frac{x^2}{\mu^2}}\right) \text{ à } \left(\frac{y}{\sqrt{\mu^2-b^2}} = +\sqrt{1-\frac{x^2}{\mu^2}}\right),$$

ce qui donne

$$\pi K \frac{dV}{d\mu} \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\ \sqrt{\mu^2-c^2}}{\mu} dx.$$

Enfin l'intégration par rapport à x, de $(x=-\mu)$ à $(x=+\mu)$, donne définitivement, en doublant le résultat, pour la quantité de chaleur cherchée

$$4\pi K \frac{dV}{d\mu} \sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2},$$

ou, en vertu de l'équation $(9)_0$

$$4\pi KA.$$

Cette quantité de chaleur est donc constante, quel que soit μ, ou quelle que soit la couche ellipsoïdale considérée.

§ XII.

En employant les coordonnées elliptiques, on substituera à l'élément $d\omega^2$, le rectangle $\delta s'\delta s''$, et l'on aura, (équations (7)),

$$K\frac{dV}{d\mu}\frac{\delta\mu}{\delta s}\delta s'\delta s''$$

$$= K\frac{dV}{d\mu}\sqrt{\mu^2-b^2}\ \sqrt{\mu^2-c^2}\ \frac{(\nu^2-\rho^2)\delta\nu\delta\rho}{\sqrt{\nu^2-b^2}\ \sqrt{c^2-\nu^2}\ \sqrt{b^2-\rho^2}\ \sqrt{c^2-\rho^2}}.$$

Cette expression devra être intégrée de $\nu=b$ à $\nu=c$, de $\rho=0$, à $\rho=b$, et ensuite multipliée par 8, pour avoir la quantité de chaleur cherchée, qui sera, en vertu de l'équation $(9)_0$,

$$8KA\int_0^b\int_b^c \frac{(\nu^2-\rho^2)\delta\nu\delta\rho}{\sqrt{\nu^2-b^2}\ \sqrt{c^2-\nu^2}\ \sqrt{b^2-\rho^2}\ \sqrt{c^2-\rho^2}}.$$

Sous cette forme cette quantité totale de chaleur est encore indépendante de μ, ou de la couche ellipsoïdale considérée.

Son expression différentielle

$$KA\frac{(\nu^2-\rho^2)\delta\nu\delta\rho}{\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}},$$

est elle-même indépendante de μ. Ainsi, si l'on considère à travers l'enveloppe proposée, un canal infiniment délié, ayant pour axe une courbe s, et pour section normale le rectangle $\delta s'\delta s''$, dont la grandeur varie avec μ, ou d'une couche ellipsoïdale à la suivante, ce canal laissera écouler une même quantité de chaleur dans le même temps, par toutes ses sections normales; et ses parois, qui appartiennent à quatre hyperboloïdes aux mêmes foyers, infiniment voisins deux à deux, ne seront traversés par aucune molécule calorifique. Sous ce point de vue, on peut appeler ce canal *un filet de chaleur*, et la différentielle qui précède donne la *dépense de ce filet* pendant l'unité de temps.

§ XIII.

Soit toujours $d\omega^2$ un élément de la surface de l'ellipsoïde (μ); la quantité (ΔQ) qui le traverse sera égale à la dépense du filet de section $\delta s'\delta s''$, multipliée par le rapport $\frac{d\omega^2}{\delta s'\delta s}$; elle est donc, d'après les équations (7), égale à

$$\Delta Q = \frac{KAd\omega^2}{\sqrt{\mu^2-\nu^2}\sqrt{\mu^2-\rho^2}}.$$

Si l'élément $d\omega^2$, conservant toujours la même grandeur, est successivement placé aux extrémités des trois axes de l'ellipsoïde (μ), l'expression précédente prendra les trois formes suivantes,

1° A une des extrémités du grand axe 2μ, où $x=\mu$, $y=0$, $z=0$, et $\nu=c$, $\rho=b$, elle devient

$$\Delta' Q = \frac{KA d\omega^2}{\sqrt{\mu^2-c^2}\,\sqrt{\mu^2-b^2}};$$

2° A l'extrémité de l'axe moyen, où $x=0$, $y=\sqrt{\mu^2-b^2}$, $z=0$, et $\nu=c$, $\rho=0$

$$\Delta'' Q = \frac{KA d\omega^2}{\mu\sqrt{\mu^2-c^2}};$$

3° Enfin à l'extrémité du petit axe, où $x=0$, $y=0$, $z=\sqrt{\mu^2-c^2}$, et $\nu=b$, $\rho=0$

$$\Delta''' Q = \frac{KA d\omega^2}{\mu\sqrt{\mu^2-b^2}}.$$

On déduit de là

$$\Delta' Q : \Delta'' Q : \Delta''' Q :: \mu : \sqrt{\mu^2-b^2} : \sqrt{\mu^2-c^2},$$

c'est-à-dire que *les flux de chaleur aux extrémités des axes d'une même surface ellipsoïdale d'égale température ont des intensités respectivement proportionnelles à ces axes.*

§ XIV.

En égalant les deux expressions trouvées pour la quantité totale de chaleur qui traverse une surface ellipsoïdale quelconque d'égale température, on obtient

$$\int_0^b \int_b^c \frac{(\nu^2-\rho^2)\,d\nu\,d\rho}{\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}\,\sqrt{b^2-\rho^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}} = \frac{\pi}{2},$$

ou

$$\int_0^b \frac{d\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}} \int_b^c \frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}} - \int_0^b \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}} \int_b^c \frac{d\nu}{\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}} = \frac{\pi}{2},$$

ou bien encore

$$\int_0^b \frac{d\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}} \int_b^c \frac{\sqrt{\nu^2-b^2}}{\sqrt{c^2-\nu^2}}\, d\nu + \int_0^b \frac{\sqrt{b^2-\rho^2}}{\sqrt{c^2-\rho^2}}\, d\rho \int_b^c \frac{d\nu}{\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Ces relations peuvent se démontrer directement (voyez la note placée à la fin de ce mémoire); toutefois la facilité avec laquelle elles se déduisent de l'analyse précédente mérite d'être remarquée.

Le genre de coordonnées μ, ν, ρ, auquel on est conduit en traitant la question physique qui nous occupe, paraît même devoir fournir les éléments d'une sorte de trigonométrie elliptique, dont l'objet serait de démontrer géométriquement, et d'une manière simple, quelques formules qui lient entre elles les différentes espèces de transcendantes elliptiques. Et, comme un autre exemple de ce nouveau mode de démonstration, on remarquera que le volume d'un ellipsoïde (μ), ou le produit $\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}$ de ses trois axes, multiplié par $\frac{4}{3}\pi$, doit être égal à huit fois l'intégrale triple $\iiint \delta s\, \delta s'\, \delta s$, prise entre les limites extrêmes des variables indépendantes μ, ν, ρ; ce qui conduit à l'intégrale suivante, définie en ν et ρ, indéfinie en μ,

$$\int_0^b\int_b^c\int_b^\mu \frac{(\mu^2-\nu^2)(\nu^2-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)\, d\mu\, d\nu\, d\rho}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}} = \frac{\pi}{6}\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2};$$

laquelle peut se décomposer en une somme algébrique de triples produits de transcendantes elliptiques.

§ XV.

Dans le cas de l'enveloppe dont les parois sont deux hyperbo-

loïdes à une nappe, ayant mêmes foyers, la quantité de chaleur qui traverse dans l'unité de temps le parallélipipède $\delta s \delta s' \delta s''$, compris entre deux surfaces d'égale température infiniment voisines, a pour expression

$$K \frac{dV}{d\nu} \frac{\delta \nu}{\delta s'} \delta s \delta s'' ;$$

ou, en substituant les valeurs de δs, $\delta s'$, $\delta s''$,

$$K \frac{dV}{d\nu} \sqrt{\nu^2 - b^2} \sqrt{c^2 - \nu^2} \frac{(\mu^2 - \rho^2) \delta\mu \delta\rho}{\sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - c^2} \sqrt{b^2 - \rho^2} \sqrt{c^2 - \rho^2}} ,$$

ou enfin, en ayant égard à l'équation $(9)_1$:

$$KA \frac{(\mu^2 - \rho^2) \delta\mu \delta\rho}{\sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - c^2} \sqrt{b^2 - \rho^2} \sqrt{c^2 - \rho^2}} ;$$

elle est donc indépendante de ν, et par conséquent de la surface isotherme considérée.

Ainsi, dans le canal infiniment délié dont l'axe et les arêtes sont des courbes s', les sections $\delta s \delta s''$, perpendiculaires à ses parois et de grandeur variable, sont toutes traversées par la même quantité de chaleur dans le même temps. Ce canal forme un filet de chaleur dont la différentielle qui précède exprime la dépense.

Enfin dans le cas de l'enveloppe terminée par deux moitiés d'hyperboloïdes à deux nappes aux mêmes foyers, la quantité de chaleur qui traverse, dans l'unité de temps, le parallélipipède $\delta s \delta s'$ est

$$K \frac{dV}{d\rho} \frac{\delta \rho}{\delta s''} \delta s \delta s'$$
$$= K \frac{dV}{d\rho} \sqrt{b^2 - \rho^2} \sqrt{c^2 - \rho^2} \frac{(\mu^2 - \nu^2) \delta\mu \delta\nu}{\sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - c^2} \sqrt{\nu^2 - b^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}} ,$$

ou enfin, d'après l'équation $(9)_2$:

$$KA\,\frac{(\mu^2-\nu^2)\,\delta\mu\,\delta\nu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}.$$

Cette quantité est indépendante de ρ, ou de ce qui particularise la surface isotherme. Ainsi, dans le canal aux arêtes s' toutes les sections $\delta s'\delta s$, quoique différentes, sont cependant toutes traversées par le même flux de chaleur. Ce canal est donc un filet de chaleur dont la dépense est exprimée par la différentielle précédente.

Il résulte de ces vérifications que les équations $(10)_0$, $(10)_1$, $(10)_2$, représentent réellement les températures stationnaires dans trois genres d'enveloppes dont les parois sont des surfaces du second degré ayant mêmes foyers, et entretenues chacune à une température constante dans toute son étendue, mais différente de l'une à l'autre de ces parois.

§ XVI.

Si l'espace solide en équilibre de température était terminé par deux paraboloïdes de même espèce, dont les axes seraient dirigés sur la même droite, et dont les sections principales auraient les mêmes foyers; il résulte évidemment des différents cas qui viennent d'être traités, et des transformations connues pour passer d'une espèce de surface du second ordre à une autre, que les surfaces d'égale température dans le solide proposé seraient des paraboloïdes de même espèce que les parois, et assujettis aux mêmes relations de forme et de position.

§ XVII.

Si $b=c$ dans les équations (5), la première représente des ellipsoïdes de révolution autour de leur grand axe, et les ellipses

méridiennes de tous ces ellipsoïdes ont les mêmes foyers; la troisième équation représente des hyperboloïdes de révolution à deux nappes ayant mêmes foyers; quant à la seconde, ν devant toujours être compris entre b et c, on posera $c^2 = b^2 + \Delta b^2$, $\nu^2 = b^2 + \Delta\nu^2$, $\Delta\nu^2$ et Δb^2 étant des quantités infiniment petites, dont le rapport fini peut varier avec $\Delta\nu^2$; la seconde des équations (5) deviendra alors

$$y^2 = z^2\left(\frac{1}{\frac{\Delta b^2}{\Delta\nu^2} - 1}\right),$$

et représentera deux plans méridiens quelconques des surfaces de révolution des deux autres systèmes.

En posant $b = c$ dans les équations $(9)_0$ et $(10)_0$, elles deviennent

$$\frac{dV}{d\mu}(\mu^2 - c^2) = A,$$

$$V = \frac{A}{c}\log\sqrt{\frac{\mu - c}{\mu + c}} + B,$$

pour la température stationnaire des différents points d'une enveloppe terminée par deux ellipsoïdes de révolution autour de leur grand axe, ayant mêmes foyers, et entretenus chacun à une température constante.

En faisant $b = c$ dans les équations $(9)_2$ et $(10)_2$, elles donnent

$$\frac{dV}{d\rho}(c^2 - \rho^2) = A,$$

$$V = \frac{A}{c}\log\sqrt{\frac{c + \rho}{c - \rho}} + B,$$

pour exprimer la température variable d'un point à l'autre d'une enveloppe solide terminée par les moitiés de deux hyperboloïdes de révolution à deux nappes, ayant mêmes foyers.

§ XVIII.

Si $b = 0$ dans les équations (5), la première représente des ellipsoïdes de révolution autour de leur petit axe, dont les ellipses méridiennes ont toutes les mêmes distances focales; la seconde représente des hyperboloïdes de révolution à une seule nappe, assujettis à la même relation de forme et de position; quant à la troisième, ρ devant toujours être moindre que b, on y substituera à b^2 et ρ^2 deux quantités infiniment petites Δb^2 et $\Delta\rho^2$; elle deviendra alors

$$\left(\frac{\Delta b^2}{\Delta\rho^2} - 1\right)x^2 = y^2,$$

et représentera deux plans méridiens quelconques des surfaces de révolution des deux autres systèmes.

En posant $b = 0$ dans les équations $(9)_0$ et $(10)_0$, elles deviennent

$$\frac{dV}{d\mu}\mu\sqrt{\mu^2 - c^2} = A,$$

$$V = \frac{A}{c}\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{c}{\mu}\right) + B.$$

Telle est la loi des températures dans une enveloppe solide terminée par deux ellipsoïdes de révolution autour de leur petit axe, dont les coupes méridiennes ont les mêmes foyers, lorsque chacune de ces parois est entretenue à une température constante, mais différente de l'une à l'autre paroi.

En faisant $b = 0$ dans les équations $(9)_1$ et $(10)_1$, elles donnent

$$\frac{dV}{d\nu}\nu\sqrt{c^2 - \nu^2} = A,$$

$$V = A\log\left(\frac{\nu}{c + \sqrt{c^2 - \nu^2}}\right) + B,$$

pour la loi des températures stationnaires d'une enveloppe solide terminée par deux hyperboloïdes de révolution à une nappe, assujettis aux mêmes relations de température et de forme que les parois du cas précédent.

Il est remarquable que dans l'enveloppe ellipsoïdale de révolution autour du grand axe, dont la surface est évaluable en arc de cercle, la température soit exprimée par un logarithme; tandis qu'au contraire, dans l'enveloppe formée par la révolution de deux ellipses homofocales autour de leurs petits axes, dont la surface est donnée par logarithmes, la température est inversement exprimée par un arc de cercle.

§ XIX.

Si l'on considère le cône comme la limite d'un hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes, on peut déduire de l'analyse précédente la loi des températures stationnaires de tous les points d'une enveloppe dont les parois seraient deux cônes obliques du second degré, ayant le même sommet et leurs sections principales situées sur les mêmes plans, lorsque ces deux parois, entretenues chacune à une température uniforme et constante, ont entre elles cette relation de forme, qu'elles sont assymptotiques à deux hyperboloïdes aux mêmes foyers. Les surfaces d'égale température seraient alors des cônes de la même famille, ou des cônes assymptotiques à des hyperboloïdes ayant les mêmes foyers que ceux avec lesquels les parois coniques se confondent infiniment loin du sommet.

Mais comme il est impossible de réaliser des circonstances physiques semblables, à cause du flux de chaleur qui devrait avoir lieu au sommet, sur une épaisseur nulle, et qui serait infiniment grand comparativement au flux qui traverserait toute autre partie de l'enveloppe, je me dispenserai de discuter plus longuement ce cas particulier; je ne l'offre ici que comme une limite offerte par l'analyse, et qui pourra jeter quelque jour sur la manière de

considérer le cône, toutes les fois qu'on voudra étudier l'équilibre et le mouvement des agents physiques dans son intérieur.

Pour représenter analytiquement ce cas singulier, il faut supposer b et c nuls dans les équations (5), sans que le rapport $\frac{b}{c}$ le soit; la première de ces équations représente alors des sphères concentriques, mais que l'on doit considérer ici comme les limites d'ellipsoïdes à axes inégaux, dont les quatre foyers sont infiniment rapprochés, sans se confondre cependant; la seconde et la troisième des équations (5), dans lesquelles on pourra remplacer ν, ρ, b, c, par $\varepsilon\nu_1$, $\varepsilon\rho_1$, εb_1, εc_1, ε étant infiniment petit ou nul, et ν_1, ρ_1, b_1, c_1, des longueurs finies, représenteront alors des cônes assymptotiques à des hyperboloïdes à une et à deux nappes, ayant les mêmes plans de sections principales et les mêmes foyers.

Il suit de là que si l'on imagine les deux séries d'hyperboloïdes à une et à deux nappes représentées par les deux dernières équations (5), les traces de leurs cônes assymptotiques sur une même surface sphérique, ayant son centre à leur sommet commun, formeront deux systèmes de courbes à double courbure qui se couperont à angle droit.

§ XX.

Pour traiter le cas de l'équilibre de température d'une enveloppe cylindrique, dont les parois et les surfaces isothermes, coupées perpendiculairement aux arêtes, donneraient des courbes du second degré, il faut chercher la relation qui doit exister entre les fonctions m et n du même paramètre variable λ, pour que l'équation

$$mx^2 + ny^2 = 1$$

représente un système de surfaces d'égale température. On est alors conduit aux deux systèmes suivants :

$$(5)_1 \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2 - c^2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{\nu^2} - \dfrac{y^2}{c^2 - \nu^2} = 1, \end{cases}$$

qui représentent deux séries de cylindres, les uns à base elliptique, les autres à base hyperbolique, qui ont cela de commun que leurs traces sur un même plan perpendiculaire à leurs arêtes sont toutes des courbes du second degré ayant les mêmes foyers. Les traces hyperboliques coupent à angle droit toutes les traces elliptiques, etc.

On trouve alors pour la loi des températures de l'enveloppe cylindrique indéfinie à base elliptique,

$$\frac{dV}{d\mu}\sqrt{\mu^2 - c^2} = A,$$

$$V = A \log\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - c^2}\right) + B;$$

et pour le cas de la base hyperbolique

$$\frac{dV}{d\nu}\sqrt{c^2 - \nu^2} = A,$$

$$V = A \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\nu}{c}\right) + B.$$

Je crois inutile d'entrer dans plus de détails sur ces nouveaux exemples; la discussion du cas plus général que j'ai traité le premier ne permet pas de douter de l'exactitude des lois indiquées par les équations précédentes.

SECONDE PARTIE.

§ XXI.

Les coordonnées elliptiques qui sont indiquées par l'analyse

mathématique de l'équilibre de la chaleur dans les corps que j'ai considérés donnent le moyen de traiter le cas plus général des températures stationnaires d'un corps plein ou d'une enveloppe solide creuse, dont les parois seraient des surfaces du second degré, auxquelles seraient immédiatement appliqués des foyers connus, mais variables d'un point à l'autre de ces parois; ainsi que le cas du refroidissement de ce corps ou de cette enveloppe, lorsqu'elle est exposée à des circonstances calorifiques de même nature.

En exprimant l'équation générale au moyen des coordonnées dont il s'agit, on parvient, comme dans les cas traités jusqu'ici, à ramener la solution complète de la question à l'intégration d'équations aux différences ordinaires; en sorte que la seule difficulté qui s'oppose encore à l'évaluation numérique des températures ne consiste plus qu'à intégrer ces dernières équations au moyen de séries suffisamment convergentes.

Ces équations aux différences ordinaires prennent leur forme la plus simple et la plus commode, en substituant aux coordonnées elliptiques un autre genre de coordonnées, qui a encore un rapport plus direct avec la question physique. Si l'on considère séparément les trois systèmes conjugués et orthogonaux de surfaces isothermes comprises parmi les surfaces du second degré, la température est exprimée, dans chacun de ces systèmes, par une transcendante elliptique de première espèce. Or, les nouvelles coordonnées dont il s'agit sont les trois transcendantes elliptiques qui expriment les températures stationnaires dans les trois cas.

L'objet de cette seconde partie est de démontrer les deux propositions que je viens d'énoncer.

§ XXII.

Je considérerai d'abord le cas général de l'équilibre des températures dans un corps solide homogène, terminé par des surfaces du second degré homofocales.

Soient ε, η, ξ, les intégrales qui constituent les parties variables de la température, dans les équations $(10)_0$, $(10)_1$, $(10)_2$, de la première partie de ce mémoire, lorsque les surfaces isothermes sont ou des ellipsoïdes, ou des hyperboloïdes à une nappe, ou des hyperboloïdes à deux nappes, tous ayant les mêmes foyers. Soit de plus $\mu_0 > c$, $\nu_0 > b$ et $< c$, $\rho_0 < b$, les limites inférieures des intégrales ε, η, ξ, ou les valeurs des variables pour lesquelles ces intégrales sont nulles, on aura

$$(11)\qquad \begin{cases} \varepsilon = \displaystyle\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}} \\ \eta = \displaystyle\int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}} \\ \xi = \displaystyle\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}} \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de prendre ε, η, ξ, pour les trois variables indépendantes de la température V, qui, rapportée aux coordonnées x, y, z, doit vérifier l'équation (1). Pour cela, il faut d'abord transformer cette dernière équation en coordonnées elliptiques, μ, ν, ρ.

On a, en regardant μ, ν, ρ, comme des fonctions de x, y, z,

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{d\mu}\frac{d\mu}{dx} + \frac{dV}{d\nu}\frac{d\nu}{dx} + \frac{dV}{d\rho}\frac{d\rho}{dx},$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d^2V}{d\mu^2}\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2 + \frac{d^2V}{d\nu^2}\left(\frac{d\nu}{dx}\right)^2 + \frac{d^2V}{d\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \frac{dV}{d\mu}\frac{d^2\mu}{dx^2} + \frac{dV}{d\nu}\frac{d^2\nu}{dx^2} + \frac{dV}{d\rho}\frac{d^2\rho}{dx^2},$$

et par suite

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2V}{dx^2}+\dfrac{d^2V}{dy^2}+\dfrac{d^2V}{dz^2}= \\ \dfrac{dV}{d\mu}\left(\dfrac{d^2\mu}{dx^2}+\dfrac{d^2\mu}{dy^2}+\dfrac{d^2\mu}{dz^2}\right)+\dfrac{d^2V}{d\mu^2}\left(\left(\dfrac{d\mu}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\mu}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\mu}{dz}\right)^2\right) \\ +\dfrac{dV}{d\nu}\left(\dfrac{d^2\nu}{dx^2}+\dfrac{d^2\nu}{dy^2}+\dfrac{d^2\nu}{dz^2}\right)+\dfrac{d^2V}{d\nu^2}\left(\left(\dfrac{d\nu}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\nu}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\nu}{dy}\right)^2\right) \\ +\dfrac{dV}{d\rho}\left(\dfrac{d^2\rho}{dx^2}+\dfrac{d^2\rho}{dy^2}+\dfrac{d^2\rho}{dz^2}\right)+\dfrac{d^2V}{d\rho^2}\left(\left(\dfrac{d\rho}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\rho}{dy}\right)+\left(\dfrac{d\rho}{dz}\right)^2\right)=0. \end{array}\right.$$

Or, les fonctions μ, ν, ρ, vérifient l'équation (2) en prenant pour $\downarrow(\mu)$, $\downarrow(\nu)$, $\downarrow(\rho)$ les expressions qui conduisent aux équations (9), et qui sont,

$$\downarrow(\mu)=\frac{\mu}{\mu^2-b^2}+\frac{\mu}{\mu^2-c^2},$$

$$\downarrow(\nu)=\frac{\nu}{\nu^2-b^2}-\frac{\nu}{c^2-\nu^2},$$

$$\downarrow(\rho)=-\frac{\rho}{b^2-\rho^2}-\frac{\rho}{c^2-\rho^2}.$$

On a donc

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2\mu}{dx^2}+\dfrac{d^2\mu}{dy^2}+\dfrac{d^2\mu}{dz^2}=\left(\dfrac{\mu}{\mu^2-b^2}+\dfrac{\mu}{\mu^2-c^2}\right) \\ \qquad\qquad \left(\left(\dfrac{d\mu}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\mu}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\mu}{dz}\right)^2\right), \\ \dfrac{d^2\nu}{dx^2}+\dfrac{d^2\nu}{dy^2}+\dfrac{d^2\nu}{dz^2}=\left(\dfrac{\nu}{\nu^2-b^2}-\dfrac{\nu}{c^2-\nu^2}\right) \\ \qquad\qquad \left(\left(\dfrac{d\nu}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\nu}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\nu}{dz}\right)^2\right), \\ \dfrac{d^2\rho}{dx^2}+\dfrac{d^2\rho}{dy^2}+\dfrac{d^2\rho}{dz^2}=-\left(\dfrac{\rho}{b^2-\rho^2}+\dfrac{\rho}{c^2-\rho^2}\right) \\ \qquad\qquad \left(\left(\dfrac{d\rho}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\rho}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\rho}{dz}\right)^2\right). \end{array}\right.$$

On a de plus

$$\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2 = \frac{1}{\mu^2\left(\frac{x^2}{\mu^4}+\frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}\right)},$$

et en vertu des équations (6)

$$\frac{x^2}{\mu^4}+\frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2} = \frac{(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-\rho^2)}{\mu^2(\mu^2-c^2)(\mu^2-b^2)},$$

d'où enfin

$$(14)\quad \begin{cases} \left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2 = \frac{(\mu^2-c^2)(\mu^2-b^2)}{(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-\rho^2)}, \\ \left(\frac{d\nu}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{dz}\right)^2 = \frac{(\nu^2-b^2)(c^2-\nu^2)}{(\mu^2-\nu^2)(\nu^2-\rho^2)}, \\ \left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 = \frac{(b^2-\rho^2)(c^2-\rho^2)}{(\mu^2-\rho^2)(\nu^2-\rho^2)}. \end{cases}$$

Les équations (13) et (14) donnent le moyen d'éliminer x, y, z, dans l'équation (12), qui devient alors

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\,\dfrac{d\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\,\frac{dV}{d\mu}}{d\mu}}{(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-\rho^2)} \\ \quad+\dfrac{\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\,\dfrac{d\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\,\frac{dV}{d\nu}}{d\nu}}{(\mu^2-\nu^2)(\nu^2-\rho^2)} \\ \quad+\dfrac{\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}\,\dfrac{d\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}\,\frac{dV}{d\rho}}{d\rho}}{(\mu^2-\rho^2)(\nu^2-\rho^2)} = 0. \end{cases}$$

Ou enfin, en rapportant la température V aux coordonnées ε, n, ξ,

$$(15)\,bis. \quad (\nu^2-\rho^2)\frac{d^2V}{d\varepsilon^2}+(\mu^2-\rho^2)\frac{d^2V}{dn^2}+(\mu^2-\nu^2)\frac{d^2V}{d\xi^2}=0.$$

On doit considérer dans cette équation μ, ν, ρ, comme des fonctions de ε, n, ξ, données par les formules (11). Il s'agit maintenant d'intégrer cette dernière équation (15) *bis*.

§ XXIII.

Les formules (11) donnent

$$\frac{d\mu}{d\varepsilon}=\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}, \quad \frac{d\sqrt{\mu^2-b^2}}{d\varepsilon}=\mu\sqrt{\mu^2-c^2}, \quad \frac{d\sqrt{\mu^2-c^2}}{d\varepsilon}=\mu\sqrt{\mu^2-b^2};$$

$$\frac{d\nu}{dn}=\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}, \quad \frac{d\sqrt{\nu^2-b^2}}{dn}=\nu\sqrt{c^2-\nu^2}, \quad \frac{d\sqrt{c^2-\nu^2}}{dn}=-\nu\sqrt{\nu^2-b^2};$$

$$\frac{d\rho}{d\xi}=\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}, \quad \frac{d\sqrt{b^2-\rho^2}}{d\xi}=-\rho\sqrt{c^2-\rho^2}, \quad \frac{d\sqrt{c^2-\rho^2}}{d\xi}=-\rho\sqrt{b^2-\rho^2}.$$

D'où l'on conclut les identités qui suivent, lesquelles sont importantes pour la question qui nous occupe :

$$(16)\quad \begin{cases} (\nu^2-\rho^2)\left(\frac{d\mu}{d\varepsilon}\right)^2+(\mu^2-\rho^2)\left(\frac{d\nu}{d\eta}\right)^2+(\mu^2-\nu^2)\left(\frac{d\rho}{d\xi}\right) \\ \qquad\qquad =(\nu^2-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)(\mu^2-\nu^2), \\ (\nu^2-\rho^2)\left(\frac{d\sqrt{\mu^2-b^2}}{d\varepsilon}\right)^2+(\mu^2-\rho^2)\left(\frac{d\sqrt{\nu^2-b^2}}{d\eta}\right)^2 \\ \qquad -(\mu^2-\nu^2)\left(\frac{d\sqrt{b^2-\rho^2}}{d\xi}\right)^2=(\nu^2-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)(\mu^2-\nu^2), \\ (\nu^2-\rho^2)\left(\frac{d\sqrt{\mu^2-c^2}}{d\xi}\right)^2-(\mu^2-\rho^2)\left(\frac{d\sqrt{c^2-\nu^2}}{d\eta}\right)^2 \\ \qquad -(\mu^2-\nu^2)\left(\frac{d\sqrt{c^2-\rho^2}}{d\xi}\right)^2=(\nu^2-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)(\mu^2-\nu^2). \end{cases}$$

Il résulte de là que si E, Y, X, sont des fonctions, la première de ε seulement, la seconde de η, la troisième de ξ, satisfaisant aux équations différentielles linéaires du second ordre suivantes :

$$(17)\quad \begin{cases} \frac{d^2E}{d\varepsilon^2}+\left(P\left(\frac{d\mu}{d\varepsilon}\right)^2+Q\left(\frac{d\sqrt{\mu^2-b^2}}{d\varepsilon}\right)^2\right. \\ \qquad\qquad \left.+R\left(\frac{d\sqrt{\mu^2-c^2}}{d\varepsilon}\right)^2\right)E=0, \\ \frac{d^2Y}{d\eta^2}+\left(P\left(\frac{d\nu}{d\eta}\right)^2+Q\left(\frac{d\sqrt{\nu^2-b^2}}{d\eta}\right)^2\right. \\ \qquad\qquad \left.-R\left(\frac{d\sqrt{c^2-\nu^2}}{d\eta}\right)^2\right)Y=0, \\ \frac{d^2X}{d\xi^2}+\left(P\left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)^2-Q\left(\frac{d\sqrt{b^2-\rho^2}}{d\xi}\right)^2\right. \\ \qquad\qquad \left.-R\left(\frac{d\sqrt{c^2-\rho^2}}{d\xi}\right)^2\right)X=0. \end{cases}$$

ou P, Q, R, sont des paramètres indéterminés et constants, l'équation (15) *bis* deviendra, en y posant $V=EYX$

$$(\nu^2-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)(\mu^2-\nu^2)(P+Q+R)=0,$$

et sera satisfaite si l'on établit entre P, Q, R, la relation

$$(18)\ldots \qquad P+Q+R = 0.$$

On pourra donc prendre pour une intégrale, la plus générale de l'équation (15) *bis*, une série de la forme

$$(19)\ldots \qquad V = \Sigma A.EYX,$$

A étant un coefficient constant, et chaque terme de cette série correspondant à un système particulier de valeurs de P, Q, R, vérifiant l'équation (18).

§ XXIV.

Les parois du corps solide proposé sont représentées par des équations très-simples dans le système de coordonnées actuel, puisque ces parois sont par hypothèse des surfaces sur lesquelles une des coordonnées est constante. L'intégrale (19) de V se prêtera donc facilement à l'introduction des conditions données de la surface.

Il est aisé de voir, d'après cela, que tous les cas d'équilibre de température des corps ou des enveloppes solides terminés par des surfaces du second degré soumises à des sources connues de chaleur et de froid, sont ramenés à l'intégration des équations aux différences ordinaires (17), qui, en vertu de l'équation (18), peuvent se mettre sous la forme

$$(17)\,bis \quad \begin{cases} \frac{d^2E}{d\varepsilon^2} + \left(Qb^2(\mu^2-c^2) + Rc^2(\mu^2-b^2)\right)E = 0, \\ \frac{d^2Y}{d\nu^2} + \left(Qb^2(c^2-\nu^2) - Rc^2(\nu^2-b^2)\right)Y = 0, \\ \frac{d^2X}{d\xi^2} + \left(-Qb^2(c^2-\rho^2) - Rc^2(b^2-\rho^2)\right)X = 0. \end{cases}$$

en y regardant μ, ν, ρ, comme respectivement fonction de ε, ν, ξ, d'après les formules (11); ou en μ, ν, ρ:

$$(17)\,ter\quad\begin{cases}(\mu^2-c^2)(\mu^2-b^2)\dfrac{d^2\mathrm{E}}{d\mu^2}+(\mu\sqrt{\mu^2-b^2}+\mu\sqrt{\mu^2-c^2})\dfrac{d\mathrm{E}}{d\mu}\\ \qquad+(\mathrm{Q}b^2(\mu^2-c^2)+\mathrm{R}c^2(\mu^2-b^2))\,\mathrm{E}=0,\\ (c^2-\nu^2)(\nu^2-b^2)\dfrac{d^2\mathrm{Y}}{d\nu^2}+(-\nu\sqrt{\nu^2-b^2}+\nu\sqrt{c^2-\nu^2})\dfrac{d\mathrm{Y}}{d\nu}\\ \qquad+(\mathrm{Q}b^2(c^2-\nu^2)-\mathrm{R}c^2(\nu^2-b^2))\,\mathrm{Y}=0,\\ (c^2-\rho^2)(b^2-\rho^2)\dfrac{d^2\mathrm{X}}{d\rho^2}+(-\rho\sqrt{b^2-\rho^2}-\rho\sqrt{c^2-\rho^2})\dfrac{d\mathrm{X}}{d\rho}\\ \qquad+(-\mathrm{Q}b^2(c^2-\rho^2)-\mathrm{R}c^2(b^2-\rho^2))\,\mathrm{X}=0.\end{cases}$$

§ XXV.

Le cas du refroidissement d'un corps solide homogène terminé par des surfaces du second degré homofocales, peut pareillement se ramener à l'intégration d'équations aux différences ordinaires.

La formule générale connue

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}+\frac{d^2\mathrm{V}}{dy^2}+\frac{d^2\mathrm{V}}{dz^2}=\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dt},$$

devient en μ, ν, ρ

$$\frac{\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\;\dfrac{d\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\;\dfrac{d\mathrm{V}}{d\mu}}{d\mu}}{(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-\rho^2)}$$

$$+\frac{\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{\nu^2-b^2}\;\dfrac{d\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{\nu^2-b^2}\;\dfrac{d\mathrm{V}}{d\nu}}{d\nu}}{(\mu^2-\nu^2)(\nu^2-\rho^2)}$$

$$+\frac{\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}\;\dfrac{d\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}\;\dfrac{d\mathrm{V}}{d\rho}}{d\rho}}{(\mu^2-\rho^2)(\nu^2-\rho^2)}=\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dt},$$

et en ε, η, ξ

$$(\nu^2-\rho^2)\frac{d^2V}{d\varepsilon^2}+(\mu^2-\rho^2)\frac{d^2V}{d\eta^2}+(\mu^2-\nu^2)\frac{d^2V}{d\xi^2}$$
$$=(\mu^2-\nu^2)(\nu^2-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)\,K\frac{dV}{dt};$$

en regardant ici μ, ν, ρ, comme respectivement fonction de ε, η, ξ, d'après les équations (11).

Or on satisfera évidemment à cette dernière équation, en posant

$$V=\Sigma Ae^{-\frac{\theta^2}{K}t}.EYX;$$

les fonctions E, Y, X, vérifiant les équations différentielles (17), dans lesquelles les constantes P, Q, R, seront liées au paramètre θ^2 par l'équation

$$P+Q+R+\theta^2=0.$$

Il est facile, si on le trouve convenable, de rétablir dans ces équations les coordonnées μ, ν, ρ; elles prennent alors des formes analogues aux équations (17) *ter*, les derniers termes sont seuls plus compliqués.

§ XXVI.

Dans l'état actuel de l'analyse mathématique, toutes les équations différentielles (17) ne sont pas intégrables d'une manière assez simple, ni assez commode, pour qu'il pût être intéressant de pousser ici plus loin la discussion des cas généraux qui précèdent. Je me contenterai d'avoir fait voir que l'analyse de ces questions physiques ne dépend plus que de l'intégration d'équations aux différences ordinaires linéaires et du second ordre.

§ XXVII.

Les équations aux différences ordinaires auxquelles on est conduit en cherchant à traiter les cas plus particuliers de l'équilibre et du mouvement de la chaleur dans les ellipsoïdes de révolution, ou dans un prisme à base elliptique, se déduisent facilement de calculs plus simples, mais analogues aux précédents; je me dispenserai de les présenter ici.

Je ferai remarquer toutefois que le cas de l'équilibre des températures de l'ellipsoïde de révolution autour de son grand axe, lorsque les foyers de chaleur et de froid auxquels il est exposé sont placés symétriquement par rapport à cet axe, est exprimé par l'équation

$$\frac{d(\mu^2-c^2)\frac{dV}{d\mu}}{d\mu}+\frac{d(c^2-\rho^2)\frac{dV}{d\rho}}{d\rho}=0,$$

qui peut s'intégrer assez facilement, comme M. Poisson l'a fait voir dans un de ses mémoires sur le son.

§ XXVIII

Le cas de l'équilibre calorifique d'un cylindre indéfini à base elliptique se présente sous une forme très-simple, en employant pour coordonnées les fonctions

$$\varepsilon=\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-c^2}},\qquad \eta=\int_{\nu_0}^{\nu}\frac{d\nu}{\sqrt{c^2-\nu^2}},$$

qui expriment les lois des températures stationnaires sur les cylindres elliptiques et hyperboliques, homofocaux et isothermes, que j'ai considérés à la fin de la première partie de ce mémoire; l'équation que la fonction V doit vérifier se réduit alors à

$$\frac{d^2V}{d\xi^2} + \frac{d^2V}{d\eta^2} = 0.$$

En sorte que le cas général du cylindre à base elliptique ou hyperbolique, en équilibre de température, peut se traiter avec la même facilité que celui correspondant du prisme à base triangulaire, dont la solution est connue.

§ XXIX.

Ainsi, la connaissance des surfaces isothermes du second ordre, et celle des lois qui lient les températures stationnaires sur ces surfaces, indiquent à l'analyse le genre de coordonnées qu'il convient d'employer pour traiter les cas plus généraux de l'équilibre et du mouvement de la chaleur, dans les corps ou les enveloppes solides, terminés par des surfaces du second ordre en contact avec des sources constantes de chaleur et de froid. C'est ce que je m'étais proposé de démontrer dans cette seconde partie.

NOTE DE M. POISSON

RELATIVE AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

La première équation du paragraphe XIV, savoir :

$$(1)\qquad \int_o^b \int_c^b \frac{(y^2-x^2)dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \tfrac{1}{2}\pi,$$

peut d'abord se changer en celle-ci,

$$(2)\qquad \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} \int_b^c \frac{y^2dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} - \int_0^b \frac{x^2dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} \int_b^c \frac{dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Pour la vérifier, je fais d'abord

$$x = b\sin\varphi, \qquad dx = b\cos\varphi d\varphi, \qquad b = ac;$$

les limites relatives à φ, qui répondent à $x = 0$ et $x = b$, seront $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; et d'après les notations connues de Legendre, il en résultera

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} = \frac{1}{c}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} = \tfrac{1}{c}F_1a,$$

$$\int_0^b \frac{x^2dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} = c\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} - c\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = c(F_1a-E_1a).$$

Je fais ensuite

$$\frac{y^2-b^2}{c^2-y^2} = \cot^2\theta, \qquad y^2 = c^2 - (c^2-b^2)\sin^2\theta,$$

$$dy = -\frac{(c^2-b^2)\sin\theta\cos\theta d\theta}{\sqrt{c^2-(c^2-b^2)\sin^2\theta}}, \qquad c^2 = b^2 = c^2\alpha^2;$$

les limites relatives à y, qui répondent à $y = b$ et $y = c$, seront $\theta = \frac{1}{2}\pi$ et $\theta = 0$; en les intervertissant et changeant le signe de l'intégrale, on aura

$$\int_b^c \frac{dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \frac{1}{c}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}} = \tfrac{1}{c}\mathrm{F}_1\alpha,$$

$$\int_b^c \frac{y^2\,dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = c\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}\; d\theta = c\mathrm{E}_1\alpha.$$

Au moyen de ces transformations, l'équation (2) devient

$$3) \qquad \mathrm{F}_1a\mathrm{E}_1\alpha + \mathrm{F}_1\alpha\mathrm{E}_1a - \mathrm{F}_1a\mathrm{F}_1\alpha = \tfrac{1}{2}\pi;$$

et en observant que les modules a et α sont complémentaires, on voit qu'elle coïncide avec une équation trouvée par Legendre (*).

La dernière équation du paragraphe XIV devant subsister pour toutes les valeurs de μ, et ayant lieu évidemment pour $\mu = 0$, il suffira de vérifier sa différentielle par rapport à μ, ou, ce qui est la même chose, l'équation

$$\int_0^b\int_b^c \frac{(\mu^2-x^2)(\mu^2-y^2)(y^2-x^2)dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \tfrac{1}{3}\pi\mu^3 - \tfrac{1}{2}\pi\mu^2(b^2+c^2) + \tfrac{1}{8}\pi b^2c^2.$$

Elle se décompose en trois autres, savoir :

$$\int_0^b\int_b^c \frac{(y^2-x^2)dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \tfrac{1}{3}\pi,$$

$$\int_0^b\int_b^c \frac{(y^4-x^4)\,dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \tfrac{1}{2}\pi(b^2+c^2),$$

$$\int_0^b\int_b^c \frac{x^2y^2(y^2-x^2)dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \tfrac{1}{8}\pi b^2c^2.$$

La première est la même que l'équation (1), qu'on vient de vérifier; les deux autres peuvent s'écrire ainsi :

(*) *Traité des fonctions elliptiques*, tome I^er^, page 60.

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} \int_b^c \frac{y^4dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} \\ \displaystyle -\int_0^b \frac{x^4dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} \int_b^c \frac{dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \tfrac{1}{4}\pi\,(b^2+c^2), \\ \displaystyle\int_0^b \frac{x^2dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} \int_b^c \frac{y^4dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} \\ \displaystyle -\int_0^b \frac{x^4dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} \int_b^c \frac{y^2dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \tfrac{1}{6}\pi b^2c^2. \end{cases}$$

D'après les transformations précédentes, on a

$$\int_0^b \frac{x^4dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} = a^4c^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4\varphi d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}},$$

$$\int_b^c \frac{y^4dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = c^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1-\alpha^2\sin^2\theta)^{\frac{5}{2}}\, d\theta.$$

En intégrant par parties, et ayant égard aux limites, on a aussi

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4\varphi d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(1-2\sin^2\varphi)(1-a^2\sin^2\varphi)d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{2(1+a^2)}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} - 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4\varphi d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}},$$

d'où l'on déduit

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4\varphi d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} = \frac{2(1+a^2)}{3a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{3a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{2+a^2}{3a^4}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} - \frac{2(1+a^2)}{3a^4}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

En même temps, on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1-\alpha^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\, d\theta = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}} - 2\alpha^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}} + \alpha^4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4\theta d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4\theta d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}} = \frac{2(1+\alpha^2)}{3\alpha^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}} - \frac{1}{3\alpha^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}};$$

d'où l'on conclut

$$\int^{\frac{1}{2}\pi} (1-\alpha^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\, d\theta = \frac{3-\alpha^2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}} + \frac{2\alpha^2(\alpha^2-2)}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{2(1+a^2)}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}\, d\theta - \frac{a^2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{a|\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}}.$$

Cela étant, en employant les notations de Legendre, on aura

$$\int_0^b \frac{x^4 dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} = \frac{c^3(2+a^2)}{3}\mathrm{F}_1 a - 2\frac{c^3(1+a^2)}{3}\mathrm{E}_1 a,$$

$$\int_b^c \frac{y^4 dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \frac{2c^3(1+a^2)}{3}\mathrm{E}_1\alpha - \frac{a^2 c^3}{3}\mathrm{F}_1\alpha;$$

et comme on a trouvé précédemment

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} = \frac{1}{c} F_1 a,$$

$$\int_0^b \frac{x^2 dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} = c\,(F_1 a - E_1 a),$$

$$\int_b^c \frac{dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \frac{1}{c} F_1 \alpha,$$

$$\int_b^c \frac{y^2 dy}{\sqrt{(y^2-b^2((c^2-y^2)}} = c\,E_1 \alpha;$$

les équations (4) deviendront

$$\frac{c^2}{3}(1+a^2)(F_1 a E_1 \alpha + F_1 \alpha E_1 a - F_1 a F_1 \alpha) = \tfrac{1}{8}\pi(b^2+c^2),$$

$$\frac{c^4 a^2}{3}(F_1 a E_1 \alpha + F_1 \alpha E_1 a - F_1 a F_1 \alpha) = \tfrac{1}{8}\pi b^2 c^2;$$

ce qui coïncide, à cause de $b = ac$, avec l'équation (3) citée plus haut.

MÉMOIRE

SUR

L'INFLUENCE DE CERTAINES PROFESSIONS

SUR LE DÉVELOPPEMENT

DE LA PHTHISIE PULMONAIRE,

À L'OCCASION D'UNE INDUSTRIE PARTICULIÈRE À LA COMMUNE DE MEUSNES, DÉPARTEMENT DE LOIR-ET-CHER;

PAR M. BENOISTON DE CHATEAUNEUF.

LU À L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, LE 20 SEPTEMBRE 1830.

Il existe en France un genre d'industrie dont les produits sont répandus dans le monde entier. Il n'est pas une ville, un bourg, un hameau, où l'on n'en trouve. Il s'en fait dans certains endroits des dépôts considérables. On croirait, d'après cela, que cette industrie a de nombreux ateliers, occupe des milliers de bras, et demande des capitaux immenses. A cinquante lieues de Paris, dans une commune de douze cents habitants tout au plus, trois cents familles environ se livrent à ce genre de commerce qui leur donne à peine de quoi vivre.

Cette commune est celle de Meusnes, dans le département de Loir-et-Cher, et cette industrie est celle de la fabrication des pierres à fusil.

Il faut faire connaître en peu de mots ses procédés.

Le seul silex ou caillou propre à cet usage, et qui, pour cette raison, est distingué des autres par le nom de *silex pyromachus*, se trouve en abondance aux environs de la commune de Meusnes, dans une plaine de plus d'une lieue carrée d'étendue. C'est ordinairement à quarante ou cinquante pieds de profondeur qu'on le rencontre disposé en couches horizontales, que recouvre un sol d'une qualité médiocre, dont la surface sablonneuse n'est guère propre qu'à la culture de la vigne.

Pour ouvrir ce sol et pénétrer jusqu'au silex, quatre ou cinq ouvriers, rarement plus, se réunissent et mettent en commun leurs travaux et leurs espérances. Ils creusent d'abord un puits dont l'ouverture a trois pieds de largeur, autant de longueur, et dont la profondeur n'excède pas neuf pieds.

Ce premier puits terminé, ils pratiquent au fond une espèce de niche, à l'extrémité de laquelle ils ouvrent un second puits, dont les dimensions sont les mêmes que celles du premier, et qui communique à un troisième par un procédé semblable. Ils répètent ainsi la même opération jusqu'à ce qu'ils soient arrivés au banc de caillou. On peut donc se représenter tous ces puits comme formant une espèce d'escalier, dont chaque degré a pour hauteur la profondeur d'un puits, et dont la surface est formée par le fond ou terre-plein de chacun.

Les ouvriers descendent dans ces puits qu'ils appellent caves ou crocs, de la même manière que les ramoneurs montent dans les cheminées, à l'aide des épaules et des genoux.

Parvenus à la carrière, ils percent en différents sens des galeries horizontales, et si basses, que l'on n'y peut travailler qu'à genoux. Quand ils ont détaché un certain nombre de morceaux de silex, un ouvrier, placé au fond de chaque puits, les jette à celui qui est au-dessus; ainsi lancés de main en main, les cailloux arrivent à l'entrée de la carrière, où on les met en un seul tas. Le travail, ou, comme on l'appelle, *la bordée* finie, et elle ne dure jamais plus de deux à trois heures en été, et de quatre à cinq en hiver, son produit se par-

tage en autant de lots qu'il y a d'ouvriers, et chacun emporte le sien chez lui.

Alors commence en famille un second travail, celui de la taille des pierres à fusil proprement dites.

Un petit nombre d'instruments suffit à cette opération. Une masse de fer à tête carrée, qui ne pèse pas deux livres; un marteau d'acier à deux pointes, qui n'en pèse pas une; une roulette de fer, de deux pouces de diamètre et de quatre lignes d'épaisseur, fixée à un manche long de six pouces; enfin, un ciseau ressemblant à celui des menuisiers, et enfoncé dans un bloc de bois, ou fixé à une table qui sert tout à la fois à l'ouvrier d'établi et de point d'appui, tels sont ses instruments. Voici comme il s'en sert:

Lorsqu'il a fait choix d'un bon bloc de silex, il s'assied à terre, le place sur sa cuisse gauche, et le frappe à petits coups de sa masse de fer pour le rompre en plusieurs morceaux.

Il obtient ainsi des éclats d'une livre à une livre et demie environ, dont la cassure est large et présente une surface plane. Prenant alors dans sa main gauche, qu'il tient élevée en l'air, un de ces morceaux, il en détache avec son marteau à deux pointes des écailles d'un pouce et demi de largeur à peu près, de deux pouces et demi de longueur, et de deux lignes d'épaisseur vers le milieu. Elles sont un peu convexes en dessous, et laissent à découvert, en se séparant du bloc, une surface légèrement concave, terminée de chaque côté par une ligne ou arête longitudinale. Les seules écailles où se trouvent ces arêtes peuvent servir à faire des pierres à fusil.

Le caillouteur prend une de ces écailles, examine lequel des deux bords en biseau est le plus propre à faire la mèche (le côté destiné à frapper la batterie). Il appuie successivement sur le tranchant de son ciseau les parties de la pierre qui doivent en former les flancs, et frappe dessus de petits coups avec sa roulette. La pierre se détache sur-le-champ d'elle-même: elle est faite; il n'y a plus qu'à la raffiler, c'est-à-dire à rendre son tranchant plus vif, à l'aide de cinq ou six coups de roulette donnés sur les bords de la mèche.

Les écailles trop épaisses ou trop encroûtées de terre calcaire sont réservées pour les pierres à briquet : on les appelle des *grolles*.

Tels sont les procédés faciles de cette fabrication, à laquelle les femmes et les enfants prennent part, et qui occupe, comme nous l'avons déjà dit, environ trois cents familles de la commune de Meusnes, et quelques autres de celle de Couffy, qui en est voisine. Leur travail suffit pour fournir aux besoins de l'armée, des places fortes, et pour tenir toujours pleins les magasins de Saint-Aignan. Quand on pense qu'il n'y a point de villes de guerre dont l'approvisionnement en pierres à fusil n'en exige plusieurs millions ; que le gouvernement en enlève dix millions par an, et que l'on en envoie près de deux cent quatre-vingts millions en Allemagne, en Espagne, en Hollande, en Suisse, en Italie, en Turquie, on reconnait là un nouvel exemple des grands effets produits par les petites causes, et de ce que peut un faible travail, mais qui ne s'arrête jamais.

L'exploitation de Meusnes, qui paraît dater de plus d'un siècle, c'est-à-dire de l'époque où l'on substitua la pierre à la mèche dans les armes à feu, est la plus considérable, l'on doit même dire la seule qu'il y ait en France. Celles de Lye (Indre), de Maysse (Ardèche), de Cerilly (Yonne), de Bougival et de la Rocheguyon (Seine-et-Oise), méritent à peine ce nom.

On estime qu'un seul ouvrier peut fabriquer par jour huit ou neuf cents pierres de différentes grosseurs ; mais comme il ne consacre à cette industrie qu'une partie de son temps, et qu'il emploie l'autre à cultiver son champ, ou à ne rien faire, il faut réduire ce nombre de beaucoup.

Le cent de pierres, dont on distingue une vingtaine d'espèces, telles que celles de munition, de chasse, de pistolets d'arçon et de poche, de rempart, les boucanières à deux mèches, les boucanières rondes, etc., se vend cinquante à soixante centimes. Le gouvernement paye douze francs le millier celles qu'il achète ; mais comme il exige des proportions régulières, et qu'elles sont toutes

vérifiées à l'aide d'une mesure en fer, la difficulté de les obtenir cause l'élévation du prix [1].

Les produits de cette industrie sont, pour ainsi dire, répandus dans le monde entier ; le débit en est immense ; les procédés en sont faciles, les gains avantageux. Cependant l'acquisition d'une carrière et les frais de son exploitation sont si coûteux, que le caillouteur en mourant ne laisse rien, ou peu de chose, à sa famille. Mais il y a plus, par une espèce de fatalité qui semble attachée à tout ce qui tient à l'art de la guerre, cette industrie tue ceux qui l'exercent ; elle les fait mourir longtemps avant l'âge, et pour eux il n'est pas de vieillesse. Soit qu'on interroge sur la cause d'une mortalité si précoce les médecins ou l'autorité, la réponse est la même, elle signale la phthisie pulmonaire produite par l'inspiration continuelle de la poussière qui s'échappe du silex quand on le taille en pierres à fusil. Le maire actuel de Meusnes, M. Dauvergne, dont la complaisance s'est plu à me fournir tous les renseignements que je pouvais désirer sur sa commune, ne m'a point indiqué d'autres raisons, et je tiens de M. le docteur Villermé un mémoire fort bien fait de M. Bourgoin, médecin de Celles-sur-Cher, sur l'exploitation du silex à Meusnes, où l'on trouve ce qui suit :

De 1680 à 1709, c'est-à-dire pendant un espace de 30 ans, la population moyenne de Meusnes a été de 415 habitants.

Les naissances étaient alors avec la population dans le rapport..... :: 1 : 24.08.

Et les décès..... :: 1 : 33.24.

Une génération ne se trouvait réduite à la moitié qu'au bout de 18 ans, et la vie moyenne était de 24 ans 3 mois.

La fabrique n'existait pas encore.

Depuis son établissement, et de 1760 à 1790, la population moyenne de la commune a été de 850 habitants. Dans cette seconde période de temps, également composée de 30 ans, comme la

[1] Voyez, pour de plus amples détails, le n° 33 du *Journal des mines.* (Prairial an V)

première, le rapport des naissances avec cette population a été . . . . . :: 1 : 22.78.

Celui des décès . . . . . :: 1 : 23.60 au lieu de 33.24.

Une génération était réduite à la moitié avant 5 ans au lieu de 18, et la vie moyenne, raccourcie de 5 ans, n'allait pas au delà de 19 ans 2 mois.

Ces calculs sont extraits de deux tableaux nécrologiques que M. le docteur Bourgoin a ajoutés à son mémoire, et qui représentent le mouvement de la population de Meusnes, aux deux différentes époques qu'embrasse son travail. Ils confirment les ravages de la phthisie dans cette commune; mais ils seraient encore bien plus concluants si M. Bourgoin avait indiqué les époques des recensements sur lesquels il a établi la population, et s'il n'en eût pas déduit les variations d'après celles que lui présentait l'excédant des naissances sur les décès.

Quoi qu'il en soit, il paraît malheureusement prouvé que la phthisie est, pour ainsi dire, devenue endémique dans la commune de Meusnes, depuis l'établissement de la fabrication des pierres à fusil, et je me suis assuré qu'aujourd'hui même encore l'ordre de mortalité de ses habitants en est sensiblement affecté.

Ici s'élève une question de médecine encore obscure, et par cela même difficile à traiter.

On lit dans Amatus Lusitanus le passage suivant, que nous abrégeons beaucoup : « La vertu dessiccative du plâtre produit la phthisie « chez ceux qui le travaillent; » et Morgagni, dans son ouvrage *de Sedibus et Causis morborum*, Epist. 15, § 17, parle des tubercules pierreux, qu'il regarde comme cause de la phthisie chez les plâtriers, les tailleurs de pierres, les cardeurs, chez tous ceux enfin qui respirent continuellement un air chargé de molécules pulvérulentes.

Ramazzini, dans son *Traité des maladies des artisans*, publié quelques années après l'ouvrage de Morgagni, se contente de dire, d'après sa propre expérience, que l'inspiration du plâtre, de la

farine, de l'amidon, aussi bien que la poussière qui s'élève de la laine que l'on carde, ou des pierres que l'on taille, produit non pas la phthisie, mais l'asthme. *Tussiculosi, anhelosi, rauci, ac demum fiunt asthmatici, trachæa et pulmonaribus viis incrustatis, liberoque aeris commercio impedito* (1).

M. Portal cite plusieurs garçons perruquiers qui rendaient des concrétions pierreuses, et qui n'ont échappé à la funeste maladie dont ils présentaient déjà les premiers symptômes, qu'en renonçant à leur état, et en s'éloignant ainsi de l'atmosphère poudreuse au milieu de laquelle ils vivaient (2).

M. Maygrier dit avoir vu pendant plusieurs années la plupart des garçons boulangers de l'établissement de Scipion, que l'on apportait à l'hospice Cochin, y mourir de la phthisie; et que depuis quinze ans qu'il n'est plus chargé du service de cet hôpital il s'est assuré que rien n'est changé à cet égard (3).

Leblanc, Baumes, M. Mérat, et beaucoup d'autres médecins, n'hésitent point à attribuer la phthisie dont sont attaqués les carriers et les tailleurs de pierres, phthisie bien connue de ces ouvriers, qui la désignent sous le nom de *maladie des grès*, ou *maladie de saint Roch*, aux particules qui se détachent de ces pierres, et qui pénétrant avec l'air dans les cellules du poumon, les irritent, les déchirent, et provoquent ainsi la toux, les crachements de sang, et l'ulcération de cet organe.

Enfin, je tiens de mon excellent ami, M. le docteur Faye, médecin des eaux de Bourbon-l'Archambault, que dans la maison centrale de Riom beaucoup de jeunes détenus que l'on y occupe à carder la laine meurent de la consomption pulmonaire entre 18 et 30 ans, et de M. le docteur Villermé, qu'il a vu succomber de la même maladie dans la prison de Saint-Lazare, à Paris, beaucoup de femmes qui s'y occupaient à couper le poil des peaux de lapin.

(1) Cap. XXI. *De pistorum et malleatorum morbis.*

(2) *De la phthisie pulmonaire*, tome I, page 192, à la note.

(3) *Dictionnaire des sciences médicales*, article *Phthisie*, tome LXII.

On voit que les médecins français et italiens se réunissent pour regarder l'introduction sans cesse renouvelée de débris végétaux ou minéraux dans les voies de la respiration, comme une cause directe et fréquente de la phthisie. Toutefois, il serait permis de croire que le même effet n'a point lieu en Angleterre, d'après ce passage fort remarquable de Cullen : « Dans ce pays, dit-il, de pareils cas « de phthisie sont rares; mais, sur la foi de Morgagni, Ramazzini et « de quelques autres écrivains, nous devons croire qu'ils sont fré- « quents dans les pays du midi (1) ». Il est également digne de remarque que Morton, autre médecin anglais, au milieu des causes nombreuses de phthisie qu'il a rassemblées dans son traité sur cette maladie, ne parle point de celle-ci (2).

Mais ce n'est pas seulement l'action irritante d'une poussière quelconque introduite dans les cellules pulmonaires qui produit la désorganisation de leur tissu; les émanations des égouts, des chiffons réduits en pâte, fermentant dans la cuve, les vapeurs du mercure en fusion, la provoquent également chez les égoutiers, les papetiers, les doreurs, au rapport de Baumes, de Pecq-de-la-Cloture, et de plusieurs autres médecins.

Ce sont encore toutes les professions dont l'exercice exige une attitude courbée qui diminue l'ampleur de la poitrine et cause la gêne de la respiration, en s'opposant au libre développement des poumons. Stoll dit avoir remarqué que les cordonniers, les tailleurs étaient plus sujets que d'autres à de grandes et mortelles inflammations de ces organes (3); et Retz, médecin à Arras, assure que les ouvrières en dentelles de cette ville meurent presque toutes de la poitrine.

Enfin, beaucoup de médecins regardent comme cause de la phthisie qui attaque les forts de la halle, les boulangers, les paveurs, les efforts violents et répétés chez ces ouvriers, des muscles qui

(1) *Médecine pratique*, Phthisie.

(2) *Phthisiolog.*, lib. II, cap. 1.

(3) *Rat. medend.*, sect. XIV, pag. 135.

environnent le thorax, et de ceux des extrémités qui viennent y prendre leur point d'appui.

Voilà des faits qui paraissent positifs : ceux qui les ont observés sont des hommes graves, instruits, chez lesquels la science s'unit à la bonne foi. Il est bien difficile de ne pas les croire ; et cependant il l'est encore plus de ne pas croire à des observations, à des travaux modernes qui semblent démentir complétement quelques-uns de ces mêmes faits, et resserrer beaucoup les conséquences que l'on a tirées des autres.

C'est ainsi que le beau travail de M. Parent-Duchâtelet, sur les égoutiers, a prouvé, contre l'opinion de Baumes, que leur séjour dans les conduits souterrains et les vapeurs infectes qu'ils y respirent n'enflamment pas plus souvent leur poitrine que ne le ferait l'exercice de toute autre profession ; et ses dernières observations sur les ouvriers en tabac ont également démontré l'erreur de Ramazzini, qui avait cru reconnaître chez eux une disposition particulière à des maladies causées, selon lui, par l'âcreté de la plante qu'ils manient sans cesse.

On a pensé longtemps, et l'on croit encore, qu'un air doux, légèrement humide, que ne troublent pas à tout moment de rapides courants, était celui dont s'accommodaient le mieux des poumons délicats. Cependant on ne trouve que peu ou point de phthisiques au milieu des Alpes, où l'air est si sec et si vif ; et l'on voit tous les jours des phthisies commençantes, ou des maladies qui les simulent, guérir au milieu des mers où les vents et les tempêtes tourmentent si horriblement l'atmosphère. On croit même que cette maladie est beaucoup moins commune sur les côtes que dans l'intérieur des terres.

Aujourd'hui que les moyens d'observer sont meilleurs et plus nombreux, et les résultats plus certains, c'est un travail nécessaire que de soumettre à un nouvel examen beaucoup de faits regardés jusqu'ici comme prouvés, et qui cependant sont loin de l'être. Détruire une erreur, c'est ajouter à la somme des vérités ; c'est être utile aux hommes comme à la science.

J'ai cru que plusieurs des causes assignées à la phthisie étaient au nombre de ces faits qui demandent à être vérifiés de nouveau, et mon travail sur la commune de Meusnes en fournissait l'occasion. Le moyen était bien simple. Il suffisait de prendre, dans chacune des professions accusées de nuire à la poitrine, le plus grand nombre possible d'individus malades d'une affection quelconque et de noter avec soin, parmi eux, tous ceux qui mourraient de la phthisie. Comme les cas de guérison de cette cruelle maladie sont malheureusement aussi rares qu'elle est fréquente, le nombre des décès devait représenter exactement celui des phthisiques, et en montrer ainsi la proportion avec les autres malades.

MM. Desportes et Jourdan, administrateurs des hôpitaux de Paris, ayant bien voulu mettre à ma disposition les registres d'entrée de l'Hôtel-Dieu, de la Charité, de la Pitié et de l'hospice Cochin, j'ai pu y relever tous les malades qui exerçaient une des professions dont l'exercice est regardé comme funeste aux poumons. J'ai cru devoir me contenter d'un espace de cinq années (de 1821 à 1826) pour toutes celles qui ont fourni un nombre d'individus suffisant au but que je me proposais; dans le cas contraire, j'ai pris dix ans (de 1817 à 1827).

Ces professions, au nombre de quarante-deux, ont donné dans cet espace de temps 43,000 malades de toute espèce, savoir:

26,045 hommes;
16,955 femmes;

43,000.

Sur ce nombre, 1,554 sont morts de la poitrine. C'est 3,61 sur 100, ou près d'un vingt-huitième de la totalité. Mais si l'on sépare les hommes des femmes, et si l'on examine ensuite lequel des deux sexes est le plus atteint par la phthisie, la proportion change tout à coup.

On trouve que les 1,554 décès se partagent entre 745 hommes et 809 femmes, et que dès lors les premiers succombent dans le

rapport d'un trente-cinquième, et les secondes dans celui d'un vingt et unième, ou de 2,86 contre 4,77 sur 100. M. le docteur Louis, dans un ouvrage qu'il a publié récemment (1), dit que, sur un nombre déterminé de phthisiques pris au hasard, il meurt 92 femmes pour 70 hommes, ou un tiers de plus. Nous devons sans doute à des nombres plus grands une proportion moins forte, mais nos calculs confirment encore les siens.

On peut donc, d'après ce premier résultat, regarder comme prouvé, contre l'opinion de Bayle, par le témoignage des anciens et par les observations des modernes, que les femmes sont plus sujettes à la phthisie que les hommes, dans une proportion qui peut s'élever du douzième au tiers.

Cette disposition à la phlegmasie des poumons dans la première moitié de la vie s'explique chez l'homme par la tendance du sang à se porter vers les parties supérieures du corps durant la jeunesse et le commencement de l'âge viril, tendance qu'excitent encore chez lui les travaux ou les plaisirs auxquels il se livre alors. Mais à cette cause, commune aux deux sexes, se joignent, chez la femme, des phénomènes particuliers à son organisation, qui paraissent avec la puberté, et dont les retours réguliers ne doivent plus cesser qu'avec l'âge. Les précautions qu'ils exigent toujours, les troubles qu'ils éprouvent souvent, les orages de la grossesse, les accidents qui la suivent, montrent assez pourquoi la phthisie doit être plus fréquente chez les femmes depuis l'âge de quinze ans jusqu'à cinquante, et pourquoi c'est aussi dans cette période de leur existence qu'on les voit succomber à cette affection en plus grand nombre que les hommes. Passé ce terme, la différence disparaît, ou se réduit à peu de chose; et plus l'âge avance, plus il ramène les deux sexes à des chances égales de mortalité.

Il est encore un autre fait qu'il faut consigner ici, parce qu'il tend à détruire une opinion généralement accréditée. On est persuadé que l'automne est de toutes les saisons la plus funeste aux phthisi-

(1) *Recherches sur la phthisie pulmonaire.*

ques, et que leur vie s'éteint à la chute des feuilles. « L'automne est « funeste aux phthisiques, » a dit Hippocrate (1).

Il faut honorer le père de la médecine, et recueillir les faits. Voici ce qu'ils m'ont appris :

Sur 12,668 décès phthisiques relevés à Milan, à Paris et dans les campagnes qui environnent cette capitale, on trouve qu'il y en a eu,

En automne,	3,001	12,668.
En hiver,	3,109	
Au printemps,	3,482	
En été,	3,076	

Il serait à désirer que l'on multipliât ces observations dans des pays où les printemps sont moins aigres et moins froids qu'à Paris, et les hivers moins tristes, moins rigoureux qu'à Milan.

Il faut maintenant examiner l'influence des professions sur la phthisie. Je rangerai dans l'ordre suivant celles que l'on regarde généralement comme les plus capables de la produire :

1re CLASSE. Professions qui exposent les poumons à l'action d'un air chargé de molécules végétales.

Hommes.	*Femmes.*
Amidonniers.	«
Boulangers.	«
Charbonniers.	«
Forts de la halle.	«
Chiffonniers.	Chiffonnières.
Cotonniers.	Cotonnières.
Fileurs.	Fileuses.
Dévideurs.	Dévideuses.

(1) Sect. III, aphor. 10.

2e CLASSE. Professions qui exposent les poumons à l'action d'un air chargé de molécules minérales.

Carriers.	«
Plâtriers.	«
Maçons.	«
Tailleurs de pierres.	«

3e CLASSE. Professions qui exposent les poumons à l'action d'un air chargé de molécules animales.

Brossiers.	Brossières.
Cardeurs et matelassiers.	Cardeuses et matelassières.
Chapeliers.	Chapelières.
Plumassiers.	Plumassières.

4e CLASSE. Professions qui exposent les poumons à l'action d'un air chargé de vapeurs nuisibles.

Doreurs.	Doreuses.
Fumistes.	«
Peintres.	«

5e CLASSE. Professions qui soumettent le corps et surtout les extrémités inférieures à l'action de l'humidité.

Blanchisseurs.	Blanchisseuses.

6e CLASSE. Professions qui soumettent les muscles de la poitrine et des extrémités supérieures à un exercice pénible et continuel.

Forgerons.	«
Porteurs d'eau.	«
Serruriers.	«
Scieurs de long.	«
Tisserands.	Tisserandes.
Gaziers.	Gazières.

7ᵉ CLASSE. Professions qui soumettent les muscles de la poitrine et des bras à un mouvement continuel, et le corps à une attitude gênante.

Écrivains.	«
Bijoutiers.	Bijoutières.
Tailleurs.	Tailleuses et culotières.
Cordonniers.	Cordonnières et bordeuses.
Frangiers, passementiers.	Frangières, passementières.
Polisseurs.	Polisseuses.
«	Couturières.
«	Dentellières.
«	Fleuristes.
«	Gantières.
«	Lingères.
«	Ravaudeuses.
«	Brodeuses.

Telles sont les professions que j'ai cru devoir examiner plus particulièrement. On les regarde depuis longtemps comme funestes à ceux qui les exercent, et capables de déterminer chez eux l'ulcération des poumons. Il faut voir jusqu'à quel point les faits sont d'accord avec cette opinion, et surtout il ne faut pas oublier que, comme aucun métier, aucun état, aucune condition de la vie n'est épargné par la phthisie, il ne peut s'agir ici que d'un danger relatif, dont la chance la plus heureuse n'est pas d'en être exempt, mais d'y être exposé le moins possible.

On a déjà vu que les médecins anciens et modernes signalent l'introduction dans les voies aériennes des particules végétales, minérales ou animales, comme une cause déterminante de phthisie, chez les amidonniers, les boulangers, les perruquiers, charbonniers, cotonniers, brossiers, cardeurs, dévideurs, plumassiers, etc.

Quant aux premiers de ces artisans, les amidonniers, et surtout

les boulangers, comme sur 2,800 il n'en est mort, en dix ans, que 57 de la poitrine, ou 1/49e, il n'est pas possible de reconnaître dans une si faible proportion l'effet d'une cause fortement délétère, et il faut bien dès lors regarder comme très-exagéré ce que l'on trouve écrit à ce sujet dans les ouvrages anciens et nouveaux.

L'usage de la poudre dans les cheveux n'existant plus depuis quarante ans, on ne peut vérifier aujourd'hui le danger qu'il y avait pour les perruquiers à s'en servir. Mais s'il était vrai que les nuages de poudre qui s'élevaient sans cesse de leur houppe leur fussent nuisibles, il faudrait dans ce cas applaudir à cette union de la mode et du bon sens, avec d'autant plus d'empressement qu'il est plus rare de la rencontrer.

Plusieurs médecins ont placé les charbonniers parmi les ouvriers soumis à l'influence dangereuse des poussières; d'autres ont récemment écrit que celle qu'ils respiraient n'avait aucune influence nuisible sur leurs poumons; qu'elle provoquait seulement une toux légère, qui n'avait rien de grave. Cependant comme il en meurt 3,73 sur 100 ou 1/27e de la phthisie, on pourrait en conclure que la poussière du charbon est moins innocente pour eux que celle de la farine pour les boulangers, et regarder comme vraie l'observation de Skragge, qui dit positivement que les charbonniers sont sujets à la phthisie (1).

D'après l'inspection cadavérique qui a révélé dans les poumons de quelques plâtriers l'existence de calculs et de concrétions pierreuses, on n'a point hésité à regarder leur profession comme la cause productrice de ces corps étrangers, ainsi que de la phthisie qui en avait été la suite; et l'on a étendu cette opinion aux maçons et à leurs manœuvres, aux carriers, etc.

Examinons les faits :

La phthisie attaque les plâtriers dans la proportion de deux et demi sur cent. Cette proportion est plus faible chez les maçons,

(1) Carbonarii, à pulvere carbonum irresolubili intra pulmones recepto, tussiculosi, asthmatici, phthisici. *Amœnitat. Linn.* vol. VII, pag. 84.

où on la trouve de 2,1/4 seulement, et plus encore chez les carriers, où elle atteint à peine un et demi (1,46) (1). Ce résultat conduit à penser que tout ce que l'on a dit jusqu'à présent sur ce sujet est au moins très-inexact.

On a trouvé des tubercules, des concrétions pierreuses dans les poumons de plusieurs lapidaires, de quelques plâtriers, et l'on en a conclu que ces corps étrangers étaient dus à la poussière que ces ouvriers avaient respirée pendant leur vie. Les conducteurs de voitures, les charretiers, les postillons, sont continuellement plongés, sur les grandes routes, dans les nuages d'une poussière bien autrement épaisse que celle qui s'élève du plâtre des bâtiments ou d'un sac de charbon : ces hommes en avalent plus en un seul jour que les maçons, les charbonniers, en un mois. Certes, si les poussières inspirées forment dans les poumons des concrétions, des tubercules, qui doit plus en ressentir les atteintes que les postillons et les charretiers? et l'on ne voit pas cependant qu'ils meurent de cette maladie plus fréquemment que les autres.

On pourrait demander pour quelle raison la farine ne produit pas sur les poumons le même effet que le plâtre et le charbon : on répondra sans doute que l'enduit gélatineux que celle-ci dépose lentement dans l'intérieur des bronches est loin de les agacer, de les irriter comme les molécules charbonneuses et calcaires; mais comment se fait-il alors que la poussière fétide qui s'élève du triage des chiffons produise, sur les organes de ceux qui les épluchent, si peu d'irritation, que les chiffonniers meurent de la poitrine dans une proportion qui n'atteint pas deux pour cent (1,68), et ce sont seulement les femmes?

Les concrétions pulmonaires, dont on rapporte la formation aux poussières, devraient, dans ce cas, participer de la nature des corps dont elles proviennent. Ainsi, chez les plâtriers, elles devraient être formées par le plâtre, et par le charbon chez les charbonniers; cependant il n'en est rien; partout, quelle que soit la profession, leur aspect est le même, et leur nature identique.

(1) Voyez le tableau à la fin de ce mémoire.

Il y a plus encore : ces calculs, ces amas pétriformes qui paraissent crier sous le scalpel comme la pierre sous la scie qui la divise, ont été trouvés chez des phthisiques qui n'avaient jamais manié le plâtre, ni vécu sous l'influence d'aucune poussière. On en a observé chez les enfants, et dans tous les viscères, dans le foie, le cerveau, le mésentère, etc. ; on en a trouvé dans les vaches mêmes, etc. Il y a donc encore une autre cause qui peut les produire.

Et maintenant, si l'on donne quelque valeur à l'opinion de ceux qui croient que l'air continuellement introduit et chassé des poumons entraîne avec lui, dans l'expiration, les corps qu'il y apporte dans l'inspiration, on n'expliquera plus la formation des tubercules par le dépôt lent et successif de la matière qui les forme dans les tuyaux bronchiques, mais l'on reconnaîtra combien les faits viennent appuyer ici les paroles d'un médecin savant et d'un observateur habile à la fois, de Laennec, qui ne niait pas, disait-il, qu'une certaine quantité de plâtre, d'amidon, de poussière, ne pût occasionner momentanément de la difficulté à respirer, mais bien rarement une maladie des poumons, le séjour des corps étrangers dans les bronches n'étant jamais long (1); et l'on regardera également comme très-près de la vérité M. le docteur Villermé, qui pense que de tous les dangers réels auxquels les maçons se trouvent le plus exposés par leur profession, ce sont les chutes fréquentes qui les précipitent du haut de leurs échelles et des échafauds qu'ils élèvent (2).

D'après les idées adoptées sur l'influence des poussières, on leur attribuait encore un mode d'action différent suivant leur différente nature. Si l'on croyait, par exemple, les particules des substances végétales capables de produire des tubercules, on regardait aussi les parcelles légères qui s'échappent des grès et des pierres que l'on taille, comme autant de corps anguleux,

(1) *De l'auscultation*, tome Ier, page 270 et suivantes.

(2) *Dictionnaire des sciences médicales*, article *Maçon*

piquants, qui déchiraient les cellules aériennes, causaient l'hémoptisie, et par suite l'ulcère des poumons.

Il est vrai que, par une cause qu'il n'est pas facile d'expliquer, mais qui sans doute n'est pas celle que l'on suppose, la maladie de saint Roch, si fréquente, dit-on, parmi les ouvriers qui taillent le grès, et la mort prématurée des caillouteurs de la commune de Meusnes, semblent justifier cette opinion. Voici cependant d'autres faits qui paraissent aussi la détruire.

Sur 887 carriers, 13 sont morts de la phthisie, ou 1,46 sur 100.

Sur 551 tailleurs de pierre, 5 ou 0,90 sur 100.

Sur 168 marbriers, 2 ou 1,25 sur 100 (1).

La commune des Molières, située dans le département de Seine-et-Oise, est renommée depuis longtemps pour la fabrication des meules de moulin. J'ai comparé sa mortalité avec celle de Meusnes, sur une suite de dix-sept années (1812—1829), et j'ai reconnu qu'aux Molières tout se passe comme ailleurs. La jeunesse et l'âge viril n'éprouvent annuellement que la perte commune à tous les lieux, à tous les pays. Le rapport qui l'exprime n'atteint 2 sur 100 que vers cinquante ans, et 24 1/4 individus arrivent à 60 ans, sur ce même nombre de 100. En France ce rapport est de 24,60; dans les Pays-Bas, de 23,89; en Suède, de 24,23, etc.

Dans la commune des Molières, comme dans beaucoup d'autres, la perte des enfants est très-forte. Elle s'élève, de 0 à 5 ans, à 45,66 sur 100; aussi une génération qui naît se trouve-t-elle réduite à moitié vers quinze ans. Mais dans quel village, dans quelle ville, dans quel pays, l'enfance n'est-elle pas moissonnée dès son entrée dans la vie?

Ces lois de la mort n'ont donc ici, comme on le voit, rien que d'ordinaire; et que deviennent alors les corpuscules pierreux et leurs angles aigus, coupants? Les caillouteurs, dira-t-on, travaillent chez eux, tandis que les tailleurs de pierre et les marbriers tra-

(1) Voir le tableau à la suite de ce mémoire.

vaillent à l'air libre. Mais le carrier au fond de sa mine est privé de cet avantage, et il ne paraît pas que sa poitrine en souffre beaucoup plus. Vouloir tout expliquer, c'est s'exposer à beaucoup d'erreurs, et mon but n'est ici que de recueillir des faits qui puissent conduire à les éviter.

Quant aux substances animales, telles que les poils, les plumes, la laine, le crin, le chanvre, dont les légers débris suspendus dans l'air sont entraînés avec lui au fond des bronches, chez les brossiers, les chapeliers, les plumassiers, les cardeurs, la mortalité phthisique de ces ouvriers étant représentée par un rapport moyen de 4 1/2 sur 100, dont les termes extrêmes sont 3,10 chez les cardeurs, 7,69 chez les plumassiers, et 11,47 chez les plumassières, on doit reconnaître ici une influence morbifique très-prononcée.

Pour achever de donner une idée plus précise de l'effet des différentes poussières sur les organes de la respiration, il faut résumer en peu de mots les faits qui précèdent.

Chez les individus qui respirent un air chargé de molécules végétales, comme les boulangers, charbonniers, etc. (professions de la première classe), la moyenne générale des décès phthisiques est de 2,07 sur 100 ou 20,70 sur 1,000.

Les termes extrêmes sont 0,84 (chiffonniers), 3,73 (charbonniers).

Chez les individus qui respirent un air chargé de molécules minérales, tels que les carriers, marbriers, etc. (professions de la seconde classe), la moyenne générale des décès phthisiques est de 1,95 sur 100 ou 19,50 sur 1,000.

Les termes extrêmes sont 0,90 (tailleurs de pierres), et 2,53 (plâtriers).

Chez les individus qui respirent un air chargé de molécules animales, comme les cardeurs, brossiers, plumassiers (professions de la troisième classe), la moyenne générale des décès phthisiques est de 4,46 sur 100 ou 44,60 sur 1,000.

Les termes extrêmes sont 3,10 (cardeurs), et 7,69 (plumassiers).

Enfin le danger d'être attaqué de la phthisie pour les ouvriers soumis à l'action des poussières prises en général est dans la proportion de 2,29 sur 100 ou 22,90 sur 1,000 (12,187 malades — 280 morts) (1).

Telles sont donc, en général, les chances de mortalité phthisique qui affectent ces professions. De toutes les molécules végétales, minérales et animales, introduites avec l'air dans les poumons, les premières et les secondes sont plus innocentes que les troisièmes, qui paraissent les plus dangereuses. Cela tiendrait-il à la nature même des corps d'où s'échappent ces molécules? S'il est vrai qu'on ait trouvé chez un plumassier les bronches tapissées d'un léger duvet, qui les remplissait en partie, l'expérience serait ici d'accord avec le bon sens, qui regarde les débris de plumes, de laine ou de crin, comme plus irritants pour la trachée-artère que l'espèce d'enduit pâteux qu'y dépose le plâtre ou la farine. Mais il n'existe d'un pareil fait, qui contredit nettement l'opinion de Laennec, rapportée plus haut, qu'une seule observation. Ce n'est point assez.

Au reste, le danger qu'il y a pour la poitrine dans la respiration continuelle des poussières, devant se mesurer par le nombre des décès phthisiques qui en sont le résultat, et ce nombre étant pour les hommes de 280 sur 12,187, et pour les femmes de 83 sur 3,350, ce qui donne une mortalité moyenne de 2 1/3 (2,29) pour les premiers, et de 1 1/2 (2,47) pour les secondes; on voit, en tenant toujours compte des ravages ordinaires de la phthisie dans les autres conditions qui ne sont soumises à aucune influence étrangère, ce que cette influence ajoute à ces ravages.

De toutes les maladies dont sont affligés les doreurs sur métaux, et qui ne reconnaissent d'autres causes que les vapeurs dégagées du mercure échauffé pendant l'opération de la dorure même, telles que les vertiges, les spasmes de la poitrine, la paralysie, aucune n'a plus attiré l'attention des médecins que le tremblement convulsif

(1) Il n'est ici question que des hommes.

et l'espèce de cachexie mercurielle auxquels sont si souvent exposés ces ouvriers. On en trouve des descriptions très-détaillées dans plusieurs auteurs, et l'on connaît les deux histoires qu'en a rapportées Fourcroy dans sa traduction de Ramazzini. Il semble cependant que ces auteurs auraient dû comprendre au nombre des maux cruels qui tourmentent les do eurs la phthisie pulmonaire, puisqu'elle en fait périr constamment plus d'un dixième chez les hommes, et d'un dix-septième chez les femmes; une pareille mortalité, qui l'emporte de beaucoup sur celle duc à l'action des poussières, méritait bien d'être remarquée. Ici le danger est réel. Mais quand on respire des poisons, on doit en ressentir les atteintes. Ces atteintes sont bien différentes selon les agents qui les produisent. Les vapeurs du mercure font périr de la phthisie les doreurs dans la proportion de 73 sur 1,000, tandis que sur un même nombre de peintres les émanations du plomb n'en font succomber que 21 3/4. Mais, à leur tour, ils sont fréquemment attaqués de la maladie que l'on désigne sous le nom de colique des peintres. Ainsi, l'action du mercure est plus funeste à la poitrine, celle du plomb l'est davantage aux intestins.

Une opinion s'est accréditée depuis quelque temps, qui attribue le développement de la phthisie chez certains ouvriers aux mouvements continuels des extrémités supérieures, ainsi qu'aux contractions fortes et répétées des muscles de ces parties, qui prennent leur point d'attache à la poitrine. Beaucoup de médecins éclairés regardent aujourd'hui les efforts violents que nécessitent, chez les boulangers, les carriers, le pétrissage de la pâte et l'extraction des pierres, ainsi que les secousses multipliées qui en résultent pour les poumons, comme bien plus capables d'en altérer les fonctions et le tissu, que l'action des poussières, à laquelle ils attachent d'ailleurs peu d'importance.

Toute opinion, par cela seul qu'elle est celle d'hommes instruits et habiles, se recommande à l'attention, et mérite d'être examinée avec soin. On a déjà vu que les carriers et les boulangers étaient très-peu sujets à la phthisie, bien que l'on croie tout le contraire

à leur égard; mais ce fait n'était point encore assez, il fallait en aller chercher la confirmation chez les ouvriers qui, par état, soulèvent sans cesse d'énormes fardeaux, ou dont les bras font mouvoir toute la journée de lourds instruments. Voici dans quelle proportion ils sont atteints de phthisie.

	Nombre de malades.	Décès.	Rapport sur 0/0.
Maréchaux et forgerons.....	214	2	0,93
Serruriers.....	668	5	0,74
Tailleurs de pierre.....	551	5	0,90
Scieurs de long et de pierre....	702	4	1,19
Carriers.....	887	8	1,13
Rapport moyen.....	3,022	24	0,79

Ainsi l'on trouve 24 phthisiques seulement sur 3,000 ouvriers malades, et tous obligés par leur profession à des contractions violentes des muscles de la poitrine et des bras. C'est, en terme moyen, un cent vingt-sixième de la totalité, mortalité qui n'est point en proportion avec le danger que semblent faire craindre d'aussi pénibles efforts, et que n'atteignent même pas ceux de ces ouvriers dont les travaux sont les plus rudes, tels que les serruriers, les maréchaux, les forgerons, les tailleurs de pierres.

Ce qui est se trouve donc encore ici en contradiction avec ce qu'on dit être. De quel côté vient l'erreur? Tant d'hommes habiles n'auraient-ils occupé leurs veilles qu'à donner l'explication d'un fait qui n'existe pas? Plein de respect pour leur personne, mais plein de confiance aussi dans les faits que j'ai recueillis, j'honore leur mérite, et dis ce que j'ai vu.

Les deux dernières classes qui restent à examiner renferment des professions dont l'exercice soumet le corps, et surtout les extrémités inférieures, à l'action continuelle de l'humidité, ou place la poitrine dans une attitude gênante pour la respiration.

Les blanchisseuses composent la première de ces deux classes. Les auteurs mettent au nombre des maladies auxquelles leur état les expose les rhumatismes, les catarrhes, les coliques. Ramazzini assure que lorsqu'elles parviennent à un âge avancé, elles meurent hydropiques. D'autres redoutent pour elles les ulcères et les varices des jambes, les gerçures des mains, les maladies contagieuses causées par les miasmes empoisonnés qui s'échappent des linges souillés de sang et d'humeurs, que ces ouvrières touchent sans cesse.

Tous ces maux peuvent en effet les atteindre, mais beaucoup moins qu'on ne le dit : tandis qu'il en est un dont on parle à peine, et qui cependant leur est aussi funeste, si même il ne l'est davantage, c'est la phthisie. Sur 2,800 blanchisseuses, 125 ou un vingt-deuxième (4 1/2 sur 100) en sont mortes. Cette proportion est forte; mais en rapprochant la nature des travaux des blanchisseuses de l'organisation particulière à leur sexe, on s'étonne qu'elle ne le soit pas encore plus. Il faut sans doute en chercher la raison dans l'habitude, qui diminue pour elles l'impression dangereuse de l'eau froide, au milieu de laquelle leurs jambes sont continuellement plongées, mais surtout dans l'application récente au blanchissage du linge de procédés mieux entendus.

Enfin la dernière classe embrasse toutes les professions dont l'exercice, courbant le corps en avant, ramène la poitrine sur elle-même, refoule vers cette cavité le diaphragme et les viscères du bas-ventre, et comprime ainsi les poumons, que l'air tend sans cesse à développer. Telle est la position habituelle de ceux qui manient la plume ou l'aiguille, des écrivains, des cordonniers, tailleurs, passementiers, des couturières, lingères, brodeuses, culottières, gantières, dentellières, ravaudeuses; position que tous les auteurs ont signalée comme funeste et disposant à la phthisie. Leur observation est vraie; leur pronostic est juste. On a beaucoup parlé des cancers de l'estomac, des squirres du foie chez les cordonniers (M. Mérat). On a dit que les écrivains étaient attaqués d'obstructions, de paralysie des jambes (Ramazzini, que

les tailleurs étaient sujets aux anévrismes du cœur et des gros vaisseaux (Corvisart); mais on n'a point assez insisté sur la remarque de Skragge, que les hommes studieux, les gens de lettres, sont exposés à devenir phthisiques. *Litterati et studiosi, theologi, professores, sæpius phthisici* (1); sur celle de Stoll, qui dit avoir observé que les cordonniers et les tailleurs étaient plus sujets que d'autres à de grandes et mortelles inflammations de la poitrine : sur celle de Retz, qui assure que la plus grande partie des ouvrières en dentelles d'Arras mouraient de la poitrine; enfin, sur les observations de M. Brioude qui, dans sa topographie médicale de la haute Auvergne (2), dit avoir remarqué que toutes les jeunes personnes de Saint-Flour, d'Aurillac, de Murat, de Mauriac et de quelques paroisses de campagne, qui travaillent à faire de la dentelle, contractaient une mauvaise santé, et finissaient par avoir toutes les cachexies qu'une vie sédentaire, une attitude courbée et une mauvaise nourriture produisent. Toutes ces assertions sont vraies, très-vraies. Ici ce n'est plus seulement par deux et trois sur cent que l'on compte les victimes; c'est par quatre et six chez les hommes, et par quatre, six, huit, et au delà chez les femmes. Certes, pour quiconque a vu travailler les passementiers, suspendus à leur métier par deux bretelles, la poitrine penchée en avant et les bras dans un mouvement continuel, ou les tailleurs, les jambes croisées sous les cuisses et la tête courbée sur leur ouvrage, il y a dans ces attitudes pénibles, et dans toutes celles qui s'en rapprochent, une cause toujours agissante, une tendance manifeste au développement de la phthisie; et, comme dans les autres états, les femmes sont plus frappées que les hommes. Mais le tribut que cette maladie prélève sur elles est tellement hors de proportion avec celui qu'elle demande aux autres professions, qu'il faut en rechercher la cause avec quelque attention.

Dans tous les métiers exercés en commun par les deux sexes,

(1) In Amœnitatib. Linn. loc. cit.

(2) Insérées dans les mémoires de la société royale de médecine, années 1782 et 1783.

on a déjà dit que les femmes sont plus exposées à la phthisie que les hommes; ainsi chez les cordonniers, s'il en meurt quatre un quart sur cent, chez les cordonnières il en succombe cinq et demi, et près de deux chez les chiffonnières (1,68), quand sur 600 chiffonniers il n'en périt pas un (0,84). On pourrait multiplier ces exemples d'une mortalité plus grande chez les femmes dans les classes ouvrières; mortalité qui, toutes les fois qu'elle n'excède pas certaines bornes, est suffisamment expliquée par la faiblesse même du sexe qui l'éprouve.

Mais d'où vient que chez les couturières, lingères, brodeuses, fleuristes, gantières, ces bornes sont tout à coup franchies dans un excès que l'on n'observe pas ailleurs?

Cette faiblesse native des femmes, triste et doux apanage de leur sexe, qui, dans les travaux qu'elles exécutent en commun avec les hommes, les expose à une part plus grande dans des dangers communs; cette même faiblesse encore a cela de funeste, qu'en les réduisant à un moindre travail, elle les condamne aussi à des gains moins forts; d'où résulte pour elles un état de gêne et de misère; et cette misère, qui déjà est un mal, produit à son tour d'autres maux.

Elle oblige l'ouvrière à se mal nourrir, ce qui ajoute à sa faiblesse naturelle comme femme, et rend sa constitution moins capable de résister à une influence nuisible toujours agissante.

Ensuite, comme la misère, en privant des jouissances de la vie, n'en éteint ni le goût ni les désirs, et ne fait même que les rendre plus vifs, ces souhaits ardents et continuels d'un état meilleur précipitent celles qui les éprouvent dans une suite d'imprudences et d'écarts, dont les tristes effets achèvent de détruire des organes déjà délabrés par un travail pénible et des privations plus pénibles encore.

Ainsi, d'une part, une constitution moins forte, des gains modiques et la pauvreté qui s'en suit; de l'autre, des passions vives, et pour les satisfaire des excès de tout genre, conduisent rapidement au tombeau des êtres faibles égarés par des rêves trompeurs.

Et si l'on n'observe pas dans les autres professions une mortalité si grande des femmes, c'est qu'il y a pour chaque état un ensemble de conditions particulières, comme le genre de travail, le gain, l'âge, le sexe, la position, qui y attache, pour ainsi dire, une sorte de fatalité, de destinée inévitable, et explique pourquoi les couturières, lingères, brodeuses, modistes, etc., fournissent toujours plus à la classe des filles publiques, que les brossières, les cotonnières, les chiffonnières et les ravaudeuses.

Ces raisons n'existent pas pour les hommes, aussi les voit-on dans tous les métiers être moins attaqués de la phthisie que les femmes.

Maintenant de tout ce qui précède ne peut-on pas tirer les conclusions suivantes?

Le moindre danger d'être attaqué de la phthisie dans certaines professions que l'on regarde comme devant la produire plus fréquemment, étant représenté par la proportion de 0,74 sur 100, 7,40 sur 1,000 (les serruriers), et la respiration des poussières végétales, minérales et animales, dans les métiers d'amidonniers, boulangers, carriers, maçons, plâtriers, cardeurs, brossiers, élevant cette proportion à 2,29 sur 100 ou 22,90 sur 1,000, on voit qu'il y a trois fois plus de chances contraires pour ces derniers que pour les premiers, sans toutefois que l'on puisse dire pour cela que deux décès un tiers sur cent individus soient la preuve d'une mortalité très-forte dans une maladie quelconque.

Celle de 33,40 et de 53,20 sur 1,000 chez les fumistes et les doreurs présente un danger relatif beaucoup plus grand et qui doit dès lors faire regarder ces professions comme plus dangereuses sous le rapport de la léthalité phthisique que les précédentes.

On doit en dire autant de l'humidité qui porte à 45 sur 1,000 le nombre des blanchisseuses qui succombent à cette affection.

Le rapport de 9 sur 1,000 chez les tailleurs de pierres, de 9,30 chez les maréchaux et les forgerons, de 11,90 chez les scieurs de long, de 11,30 chez les carriers, de 7,40 chez les

serruriers, enfin de 7,90 sur la totalité de ces ouvriers, doit faire regarder comme encore peu confirmée par les faits, et dès lors comme douteuse, l'opinion qui trouve dans les contractions violentes et répétées des muscles de la poitrine et des bras, une cause active de phthisie chez ces ouvriers.

Mais quand à ces mêmes mouvements des bras, bien que modérés, se joint une attitude du corps telle qu'en le courbant en avant elle rétrécit la poitrine et gêne le jeu des poumons, alors on voit tout à coup, dans les professions qui exigent cette attitude, la phthisie se déclarer avec une intensité remarquable, qui porte le nombre de ces victimes à 55, 62, 86 et 133 sur mille chez les femmes, et à près de 50 chez les hommes.

On a dit plus haut que la misère et les désordres de tout genre où elle entraîne devaient entrer pour beaucoup dans cette élévation de la mortalité; mais comme on la rencontre aussi chez les hommes où les mêmes causes n'existent pas, ou existent à un degré moindre, il faut bien, après avoir fait la part de l'inconduite, en accorder une au moins égale à la profession.

On sera sans doute étonné de ne rien trouver ici sur celles de crieurs publics, chanteurs, musiciens, qui passent pour être si fatales à la poitrine. La réponse sera facile. En dix années, je n'ai pu relever sur les registres de quatre hôpitaux que 18 chanteurs et 6 chanteuses, parmi lesquels aucun probablement n'était attaqué de la phthisie, puisque aucun n'en est mort. L'opinion commune s'éloigne donc encore ici de la vérité: on l'exagère beaucoup. Il est incontestable que l'exercice de la voix, du chant, des instruments à vent, peut nuire à la poitrine, mais chez ceux-là seulement qui l'ont faible, délicate, et alors ce n'est pas seulement la musique ou la déclamation qui leur est contraire : la course, la danse, les mouvements violents du corps, les agitations de l'âme, tout leur est funeste, tout réagit sur un organe débile, l'affecte, l'endommage, le détruit. Mais une poitrine bien constituée ne redoute point l'exercice même fréquent de ces fonctions. On ne voit point en effet dans la chaire, au théâtre, au barreau, les prédicateurs,

les avocats, les comédiens, être moissonnés par la phthisie; et cette foule d'acteurs qui, depuis trente ans, déclament et chantent sous nos yeux, prouvent assez que le chant et même les cris sont sans danger pour de robustes poumons.

Ce qui paraît vraiment leur nuire, c'est cette position pénible du corps dans laquelle ils tendent sans cesse à se dilater pour recevoir l'air qui se précipite dans leurs cellules, et où la cage osseuse qui les enveloppe, rendue plus étroite par une attitude forcée, les comprime de toutes parts, et résiste à leur développement. Il naît alors de ce combat d'efforts opposés, de cette mauvaise conformation factice, une gêne de la respiration, un malaise de l'organe pulmonaire, qui y développe à la longue tous les désordres, suite inévitable de cette même conformation, quand malheureusement elle est originelle. Le métier, l'état qui exige de l'ouvrier cette dangereuse attitude, fait alors pour lui ce que la nature n'avait pas fait; il lui donne les maux dont celle-ci l'avait exempté.

On voit par là combien est dangereux l'usage de tout ce qui peut ralentir, diminuer le jeu des poumons, comme les liens, les ceintures, les corsets; combien il faut être attentif à modérer chez les jeunes personnes, qui ont une poitrine étroite, l'exercice des arts du dessin, de la broderie, de la tapisserie, de la couture et même des devoirs religieux, s'il est vrai, comme on croit l'avoir observé à Montélimart, que la phthisie attaque surtout, dans cette ville, les jeunes filles qui se livrent à des prières longtemps prolongées à genoux (1). Mais les avis les plus sages, les exhortations les plus pressantes sont à peine écoutés, et de tous les ennemis qui menacent l'existence de l'homme, le plus dangereux, le plus inévitable pour lui sera toujours lui-même.

Si l'on tient compte en même temps de l'influence d'une vie pauvre et pénible, de la fatigue, de la mauvaise nourriture, des

(1) Les registres de Milan ne m'ont point révélé une pareille cause de mort; mais j'y ai trouvé, comme à Paris, une quantité considérable de couturières et de fileuses (*cucitrice e filatrice*) mortes de l'ulcère des poumons.

privations, des chagrins, de la misère, reconnue si propre au développement des affections tuberculeuses du poumon; si l'on y joint, chez le sexe le plus faible, les effets de l'inconduite et du libertinage; si l'on réfléchit ensuite que parmi les ouvriers qui périssent de la phthisie, un grand nombre étaient déjà nés scrofuleux, rachitiques, ou de parents phthisiques eux-mêmes, et que dans quelque condition qu'ils eussent été placés, le genre de mort eût été le même pour eux; si l'on pense enfin que toutes les classes de la société, tous les rangs, tous les états, payent à cette cruelle maladie un tribut plus ou moins grand, on se fera alors une idée juste de la part que peut avoir dans sa production tel ou tel genre d'occupation; et l'on trouvera peut-être qu'à l'exception de quelques cas particuliers indiqués dans ce mémoire il y a au moins beaucoup d'exagération dans ce que les auteurs anciens et modernes ont écrit à ce sujet.

Ces recherches n'apprennent point à guérir la phthisie, mais elles en éclairent l'histoire. Je suis bien loin de les regarder comme complètes, et je désire vivement qu'elles en appellent d'autres (1). Il faudrait examiner pourquoi les tailleurs de pierres et les tailleurs de grès, bien que travaillant tous également en plein air, éprouvent de ce genre d'occupation des effets si différents, que les premiers sont à peine atteints de la phthisie, tandis qu'elle a reçu des seconds le nom de maladie de saint Roch ou des grès, dénomination qui semble attester à la fois sa fréquence et ses ravages parmi eux. Il faudrait surtout, pour apprécier la valeur de l'opinion qui les fait se regarder comme dévoués par leur état à mourir de la poitrine avant l'âge, constater combien, sur un nombre connu de ces ouvriers, il en périt de l'ulcère des poumons. La table de mortalité que j'ai dressée de la commune des Molières,

(1) C'est ce qui vient d'arriver. Tandis que je composais ce mémoire, M. Lombard, médecin à Genève, s'occupait dans cette ville de recherches semblables, et il vient d'écrire à l'Académie des Sciences que plusieurs de ses résultats confirment les miens. La science et la vérité ne peuvent que gagner à ce double travail, entrepris dans des lieux et sur des populations différentes.

et qui se rapporte si bien avec le petit nombre de décès phthisiques observés parmi les tailleurs de pierres est un motif de plus pour douter de cette excessive mortalité parmi les tailleurs de grès.

Et pour rappeler, en finissant, la cause et l'origine de ce mémoire, il y aurait encore à rechercher si les caillouteurs de la commune de Meusne, étant ensevelis pendant deux à trois heures en hiver, et quatre à cinq en été, dans des espèces de boyaux souterrains tellement bas, qu'ils ne peuvent y travailler qu'à genoux, le corps penché et les bras portés en avant, tellements étroits, que l'air y circule à peine, que la respiration y devient bientôt impossible et que la lampe s'éteint à côté de l'ouvrier, ce ne serait pas à ces causes réunies si capables de la produire, et à quelques autres encore, qu'il serait raisonnable de rapporter la fréquence de la phthisie chez ces mêmes caillouteurs, bien plutôt qu'à la poussière du silex introduite dans leurs poumons.

Il faudrait vérifier de nouveau si les débris des plumes, du crin, du chanvre, s'attachent en effet aux parois des bronches, et n'en sont point expulsés avec l'air qui les y a introduits, recherche qui ajouterait de nouveaux éléments à l'histoire physiologique de la respiration, de nouveaux faits à celle des maladies du poumon. Elle apprendrait si les chapeliers doivent bien moins à cette dernière cause qu'aux émanations du mercure, la mortalité phthisique excessive que l'on observe parmi eux (4,78 sur 100), tandis qu'elle n'est pas même d'un chez les chapelières (0,55). Et dans le cas où la poussière qui s'élève du chanvre quand on le travaille serait reconnue avoir une action nuisible à la poitrine, elle déciderait le gouvernement à en supprimer le peignage et les autres préparations dans les ateliers de détenus, ou du moins à les faire exécuter à l'air libre. Le petit nombre de cordiers et brossiers inscrits sur les registres des quatre hôpitaux que j'ai vérifiés rend ici très-douteuse l'évaluation des rapports, en même temps qu'il ôte les moyens de la constater. Il est à croire que de nouvelles recherches la feraient baisser. Il arrive souvent, par un effet du hasard ou des localités, qu'un hôpital présente plusieurs phthisiques sur peu de malades,

tandis qu'une plus grande quantité en donne à peine quelques-uns, dans un autre établissement. Si l'on ne réunissait pas ensemble ces deux éléments on s'exposerait à de graves erreurs. De là naît la nécessité, surtout pour quelques professions peu exercées, ou qui semblent se plaire de préférence dans certains quartiers, de ne pas s'en tenir aux registres d'un seul hôpital, d'en consulter plusieurs. Je l'ai fait, mais peut-être ai-je manqué de persévérance ou de sagacité.

Enfin il est une dernière observation sur laquelle je crois devoir insister particulièrement, parce que je la regarde comme très-propre à bien faire juger le degré d'influence que l'exercice de certaines professions peut avoir sur le développement de la phthisie pulmonaire; c'est de ne pas trop s'attacher à les examiner en détail, et à les comparer pour ainsi dire une à une. Une infinité de causes, telles que les doubles emplois provenant de rechutes et de rentrées des malades à l'hôpital, les décès à domicile qui sont peu considérables sans doute, mais que l'on ne connaît pas, des indications de professions mal données, fautives, inexactes, l'impossibilité pour quelques-unes d'atteindre à un nombre suffisant de malades, attendu que le peu d'ouvriers qui les exercent demanderait, pour obtenir ce nombre, que l'on consultât une suite d'années bien antérieures à celles dont on a les registres; des erreurs inséparables d'un travail long et minutieux : toutes ces causes à la fois peuvent égarer le jugement et conduire à un résultat qui manquerait de cette exactitude que désirent les bons esprits. Il y a pour y arriver, autant du moins qu'il est possible, une méthode plus sûre : c'est de partager toutes les professions en groupes de métiers semblables, au lieu de les isoler, et d'observer sur des quantités très-fortes, où les erreurs de détail disparaissent dans les masses, leur tendance plus ou moins prononcée à altérer les organes de la respiration. Ainsi la position courbée du corps produisant la phthisie chez 837 individus des deux sexes, sur 15,550, ce qui donne une proportion de 53,80 sur mille, tandis que les vapeurs du mercure n'en font périr que 53, l'humidité 45, et les poussières 22,90, on est fondé à regarder comme suffisamment prouvé que de toutes les professions qui

peuvent nuire à la poitrine, celles dont l'exercice exige une attitude du corps telle qu'elle diminue sa capacité et gêne les mouvements des poumons sont les plus dangereuses de toutes ; les vapeurs viennent après ; l'humidité chez les femmes tient le troisième rang ; enfin, les poussières, surtout les végétales et les minérales, sont les moins nuisibles.

Les artisans, les ouvriers dont l'existence est si précaire, dont la misère est quelquefois si grande, dont les excès sont toujours trop fréquents, ont seuls fourni les observations qui composent ce mémoire. Il eût été curieux de leur en opposer de semblables, prises dans les classes aisées de la société ; d'opposer ainsi l'aisance au besoin, le loisir au travail, et les passions du riche à l'inconduite du pauvre ; mais il m'a été impossible, malgré tout le désir que j'en avais, d'établir cette comparaison. Je ne possède qu'une seule observation de ce genre que je dois à l'obligeance de M. Egret, médecin distingué des Montils près de Blois, département de Loir-et-Cher. Bien qu'elle soit unique et toute spéciale pour ainsi dire, puisqu'elle ne s'applique qu'à des personnes vivant habituellement à la campagne, je la publie ici avec d'autant plus de plaisir que c'est un moyen pour moi de lui témoigner ma reconnaissance, et ensuite parce qu'elle peut engager d'autres médecins à en faire de semblables dans leur pratique particulière.

Sur 730 malades de la classe aisée qui ont reçu les soins de M. Egret, dans la période de dix ans qui vient de finir, sept seulement, deux hommes et cinq femmes, sont morts de la phthisie. Leur âge se trouve compris entre vingt et vingt-huit ans. Le rapport donné par ces nombres est de 0,95 sur 100 ou 9,50 sur mille. Ce rapport existe déjà dans le tableau qui est joint à ce mémoire (forgerons et maréchaux 0,93); mais réunit-il toutes les conditions nécessaires pour indiquer réellement une des expressions les plus faibles de la mortalité phthisique? Je ne le pense pas. Il faut donc multiplier encore les recherches, et recueillir de nouveaux faits. La science et l'humanité y gagneront également.

NOTE.

J'ai dit, en parlant de l'influence des professions sur le développement de la phthisie, que le nombre des musiciens portés aux registres des hôpitaux de Paris, comme morts de cette maladie, était trop insignifiant pour fournir la moindre conjecture favorable ou contraire à l'opinion qui regarde l'exercice fréquent des instruments à vent comme dangereux pour la poitrine. Aujourd'hui les décès de 6,000 musiciens ne jouant que de ces derniers instruments, les seuls, comme on le sait, qui composent la musique militaire, peuvent aider à résoudre cette question (1).

Sur ces 6,000 musiciens, on compte, de 1820 à 1826, 102 morts, parmi lesquels il y a 17 phthisiques. En prenant la moyenne des sept années, 857 musiciens ont donné 15 décès par an, dont 2 de la poitrine; c'est 1 sur 7. Cette proportion est plus faible que celle que Sydenham assignait à la ville de Londres (1 sur 5 décès); et plus forte que celle qui existe à Paris (1 sur 8 , ou 9 tous les âges réunis). Elle semble conduire à la conclusion suivante : le danger de mourir de la phthisie, pour ceux qui jouent des instruments à vent, n'étant pas plus grand que dans les autres professions réunies qui composent la société, la probabilité qu'il y a d'en mourir paraît devoir se calculer plutôt d'après les dispositions naturelles plus ou moins prononcées à contracter cette maladie, que d'après la tendance de cette profession à la faire naître. Cette assertion, qui est vraie, ainsi exprimée d'une manière générale, cesse de l'être, si l'on compare la mortalité phthisique de ces 6,000 musiciens à celle d'une profession quelconque prise isolément : cette mortalité est alors beaucoup plus forte. Mais il faut observer que ce sont ici des militaires, dont le genre de vie ne ressemble point à celui des habitants des villes. M. Lom-

(1) *De la mortalité dans l'armée française*, dans les *Annales d'hygiène*, tome XI, 1re partie, année 1834.

bard, dans le mémoire qu'il vient de publier sur ce sujet (1), trouve comme moi que les professions qui nécessitent un usage fréquent de la voix ne sont pas plus affectées de la phthisie que les autres, et le sont même un peu moins; mais il faut faire des efforts plus soutenus pour pousser le vent dans une flûte ou un cor, que pour chanter, déclamer, commander l'exercice, ou faire une classe. De nouvelles observations sont encore nécessaires avant de prononcer sur la mortalité phthisique des musiciens, et en particulier de ceux qui jouent des instruments à vent.

(1) *De l'influence des professions sur la phthisie*, dans les *Annales d'hygiène*, tome XI, 1re partie, année 1834.

TABLEAU

Des décès causés par la phthisie dans les professions regardées comme les plus capables de la produire, d'après un relevé des malades entrés à l'Hôtel-Dieu, à la Charité, à la Pitié et à l'hospice Cochin, de 1817 à 1827.

PROFESSIONS.	ENTRÉS.	DÉCÉDÉS.	RAPPORT sur 100.	PROFESSIONS.	ENTRÉES.	DÉCÉDÉES.	RAPPORT sur 100.
	HOMMES ENTRÉS.				FEMMES ENTRÉES.		
1° PROFESSIONS QUI SOUMETTENT LES POUMONS À L'ACTION D'UN AIR CHARGÉ DE PARTICULES VÉGÉTALES.							
Amidonniers.....	98	1	1,02	//	//	//	//
Boulangers.....	2,702	56	2,07	//	//	//	//
Charbonniers.....	375	14	3,73	//	//	//	//
Forts de la halle....	246	6	2,43	//	//	//	//
Chiffonniers.....	590	5	0,84	Chiffonnières.....	237	4	1,68
Cotonniers.....	319	6	1,88	Cotonnières.....	882	24	2,72
Dévideurs.....	//	//	//	Dévideuses.....	263	9	3,42
Fileurs.....	594	14	2,35	Fileuses.....	1,173	19	1,61
	4,924	102			2,555	56	
Rapport moyen..	.....	.....	2,07	Rapport moyen..	.....	.....	2,19
1° PROFESSIONS QUI SOUMETTENT LES POUMONS À L'ACTION D'UN AIR CHARGÉ DE PARTICULES MINÉRALES							
Carriers.....	887	13	1,46	//	//	//	//
Maçons et manœuvr.	4,071	90	2,22	//	//	//	//
Marbriers.....	162	2	1,25	//	//	//	//
Plâtriers.....	158	4	2,53	//	//	//	//
Tailleurs de pierres.	551	5	0,90	//	//	//	//
	5,829	114			//	//	
Rapport moyen..	.....	.....	1,95	//	//	//	//

PROFESSIONS.	ENTRÉS.	DÉCÉDÉS.	RAPPORT sur 100.	PROFESSIONS.	ENTRÉES.	DÉCÉDÉES.	RAPPORT sur 100.
	HOMMES ENTRÉS.				FEMMES ENTRÉES.		
3° PROFESSIONS QUI SOUMETTENT LES POUMONS À L'ACTION D'UN AIR CHARGÉ DE MOLÉCULES ANIMALES.							
Brossiers	283	10	3,53	Brossières	103	8	7,76
Cardeurs et matelass.	129	4	3,10	Cardeuses et matelas.	451	11	2,43
Chapeliers	983	47	4,78	Chapelières	130	1	0,55
Plumassiers	39	3	7,69	Plumassières	61	7	11,47
	1,434	64			745	27	
Rapport moyen	.....	.....	4,46	Rapport moyen	.....	.....	3,62
4° PROFESSIONS QUI EXPOSENT LES POUMONS À L'ACTION D'UN AIR CHARGÉ DE VAPEURS NUISIBLES.							
Doreurs	545	29	5,32	Doreuses	285	16	5,61
Peintres en décors.	2,160	47	2,17	//	//	//	//
Fumistes	389	13	3,34	//	//	//	//
	3,094	89			285	16	
Rapport moyen	.....	.....	2,87	Rapport moyen	.....	.....	5,61
5° PROFESSION QUI EXPOSE LE CORPS ET SURTOUT LES EXTRÉMITÉS INFÉRIEURES À L'ACTION DE L'HUMIDITÉ.							
Blanchisseurs	218	4	1,83	Blanchisseuses	2,775	125	4,50
6° PROFESSIONS QUI SOUMETTENT LES MUSCLES DE LA POITRINE ET DES EXTRÉMITÉS SUPÉRIEURES À UN EXERCICE PÉNIBLE ET CONTINUEL.							
Tisserands	935	20	2,13	Tisserandes	163	3	1,84
Gaziers	251	8	3,18	Gazières	253	8	3,16
Charpentiers	268	4	1,49	//	//	//	//
Menuisiers	1,716	53	3,08	//	//	//	//
Forger. et maréch.	214	2	0,93	//	//	//	//
Serruriers	668	5	0,74	//	//	//	//
Porteurs d'eau	373	9	2,41	//	//	//	//
Scieurs de p. et de l.	702	8	1,13	//	//	//	//
	5,127	109			416	11	
Rapport moyen	.....	.....	2,12	Rapport moyen	.....	.....	2,64

PROFESSIONS.	ENTRÉS.	DÉCÉDÉS.	RAPPORT sur 100.	PROFESSIONS.	ENTRÉES.	DÉCÉDÉES.	RAPPORT sur 100.
	HOMMES ENTRÉS.				FEMMES ENTRÉES.		
7° PROFESSIONS QUI SOUMETTENT LES MUSCLES DE LA POITRINE ET DES BRAS À UN MOUVEMENT CONTINUEL ET LE CORPS À UNE ATTITUDE COURBÉE.							
Écrivains	908	43	4,73	//	//	//	//
Bijoutiers	715	46	6,43	Bijoutières	39	4	13,33
Tailleurs	1,048	49	4,67	Tailleuses et culot...	1,069	49	4,58
Cordonniers	1,818	78	4,29	Cordonnières-bord..	397	22	5,54
Frangiers-passem...	426	20	4,69	Frangières-passem..	534	25	4,68
Tailleurs de cristaux	244	15	6,14	//	//	//	//
Polisseurs	270	12	4,44	Polisseuses	548	21	3,83
//	//	//	//	Brodeuses	593	51	8,60
//	//	//	//	Couturières et ling..	5,392	296	5,48
//	//	//	//	Fleuristes	357	31	//
//	//	//	//	Dentellières	258	16	6,20
//	//	//	//	Gantières	402	26	6,46
//	//	//	//	Ravaudeuses	540	33	6,11
	5,429	263			10,129	574	
Rapport moyen..	.....	.....	4,84	Rapport moyen..	.....	.....	5,66
RELEVÉ GÉNÉRAL DES PROFESSIONS.							
Première	4,924	102	2,07		2,555	56	2,19
Deuxième	5,829	114	1,95		//	//	//
Troisième	1,434	64	4,46		765	27	3,62
Quatrième	3,094	89	2,87		285	16	5,61
Cinquième	218	4	1,83		2,775	125	4,50
Sixième	5,127	109	2,12		416	11	2,64
Septième	5,429	263	4,84		10,129	574	5,66
	26,055	745			16,905	809	
Rapport moyen..	.....	.....	2,85	Rapport moyen	.....	.....	4,78

TOTAL des malades..... 43,010 TOTAL des décès..... 1,554.

RAPPORT des décès aux malades..... 3,61 sur 100.

NOTE

SUR LA MÉTHODE

DES

TANGENTES DE ROBERVAL,

PAR M. J.-M.-C. DUHAMEL,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Le problème des tangentes a tellement occupé les grands géomètres du XVII^e^ siècle, et a si puissamment contribué aux progrès de l'analyse infinitésimale, que rien de ce qui s'y rattache ne saurait être étranger à l'histoire philosophique de la science. La première méthode un peu générale qui ait été donnée pour la solution de ce problème est celle de Roberval; il la possédait, dit-il, en 1636; et la communiqua à Fermat, en 1640; on la trouve exposée en détail et avec de nombreuses applications dans le 6^e^ volume des anciens Mémoires de l'Académie des sciences.

Cette méthode est fondée sur le principe incontestable de la composition des vitesses. Mais faute d'avoir bien conçu ce principe, ce géomètre célèbre a donné des règles fausses pour la détermination des tangentes aux courbes engendrées par des rayons vecteurs dirigés vers des centres fixes. Il appliqua ces règles à des cas particuliers où elles réussissaient; il retrouva ainsi les cons-

tructions données par les anciens dans le cas de l'ellipse, de la parabole et de l'hyperbole. Montucla, après avoir exposé cette méthode, dans son *Histoire des mathématiques,* en a fait l'application à un cas moins simple, et est tombé dans une erreur grave. Monge en a commis une semblable, dans sa géométrie descriptive, dans le cas de la courbe d'intersection de deux ellipsoïdes de révolution qui ont un foyer commun. Ces erreurs n'ayant pas encore été remarquées, et pouvant se renouveler encore sur la foi de ces grands géomètres, j'ai pensé qu'il n'était pas inutile de les signaler, et de faire connaître les véritables règles qu'il faut substituer à celles de Roberval.

Lorsque les points d'une courbe sont déterminés par leurs distances à des pôles fixes, la règle de Roberval consiste à *porter sur les rayons vecteurs, à partir du point de la courbe que l'on considère, et dans le sens de leurs variations respectives des lignes proportionnelles aux vitesses avec lesquelles ces rayons tendent à croître ou à décroître, et à déterminer la direction de la résultante des forces qui seraient représentées en grandeur et en direction par ces lignes; cette direction doit être celle de la tangente.*

Avant de montrer en quoi pèche cette règle, je vais faire connaître la construction qui doit réellement déterminer la tangente.

Soient r', r'', r''', etc.... les rayons vecteurs qui déterminent le point que l'on considère sur la courbe, et qui pourraient être réduits à trois seulement. Désignons par δr, $\delta r'$, $\delta r''$, etc., les accroissements infiniment petits que subissent ces rayons, quand on passe à un point de la courbe, infiniment près du premier; il est clair que ce second point sera l'intersection de sphères décrites des différents pôles, comme centres, avec les rayons respectifs, $r+\delta r$, $r'+\delta r'$, $r''+\delta r''$, etc.; or, ces sphères peuvent, dans une étendue infiniment petite, être réduites à leurs plans tangents, perpendiculaires aux extrémités des rayons vecteurs du point donné, augmentés respectivement de δr, $\delta r'$, etc.: si donc on joint par une droite le point donné de la courbe avec le point d'intersection de ces plans, la tangente sera la limite vers laquelle tendra cette droite, lorsque

les accroissements δr, $\delta r'$, $\delta r''$, tendront vers zéro. Mais la direction de cette droite serait la même si on portait sur les rayons vecteurs des quantités finies proportionnelles à δr, $\delta r'$, $\delta r''$, etc., et qu'on menât les plans perpendiculaires à l'extrémité de ces lignes; on peut donc poser la règle suivante :

Portez sur les rayons vecteurs, à partir du point de la courbe, et dans le sens des variations respectives, des longueurs finies dont les rapports soient les limites des rapports des accroissements infiniment petits des rayons vecteurs; aux extrémités de ces lignes, élevez des plans perpendiculaires aux rayons vecteurs respectifs; joignez le point de concours de ces plans au point donné de la courbe, vous aurez la direction de la tangente.

Il est évident qu'on peut se borner à considérer trois de ces rayons vecteurs, pourvu qu'ils ne soient pas dans un même plan.

Soient donc a, b, c, trois longueurs proportionnelles aux accroissements infiniment petits des rayons vecteurs, ou, pour me servir des expressions de Roberval, proportionnelles aux vitesses avec lesquelles le point s'éloigne des trois pôles; la règle de ce géomètre conduirait à former sur les trois arêtes a, b, c, un parallélipipède, et à prendre la direction de la diagonale pour celle de la tangente.

Examinons dans quels cas cette construction donne la même direction pour la tangente, que celle qui résulte de la règle incontestable que je viens d'établir. D'après cette règle on voit facilement que la tangente fait avec les directions des arêtes a, b, c, des angles dont les cosinus sont entre eux comme ces mêmes arêtes; cela résulte immédiatement de ce que les plans perpendiculaires aux extrémités de ces arêtes se rencontrent sur la tangente. Il reste donc à chercher les conditions nécessaires pour que la diagonale du parallélipipède construit sur ces arêtes fasse avec elles des angles dont les cosinus leur soient respectivement proportionnels : et comme ces cosinus sont entre eux comme les projections de la diagonale sur les arêtes respectives, les conditions cherchées seront exprimées par les équations,

$$\frac{a+b\cos ba+c\cos ca}{a}=\frac{b+a\cos ab+c\cos cb}{b}=\frac{c+a\cos ac+b\cos bc}{c},$$

lesquelles se réduisent facilement aux deux suivantes :

$$a(b^2+c^2-a^2)\cos ab=c(a^2+b^2-c^2)\cos bc,$$
$$b(a^2+c^2-b^2)\cos ab=c(a^2+b^2-c^2)\cos ac.$$

La règle de Roberval sera donc en défaut toutes les fois que les vitesses $a, b, c,$ et les angles des rayons vecteurs ne satisferont pas à ces deux conditions.

Si les trois rayons vecteurs sont perpendiculaires entre eux, les trois cosinus sont nuls, et les équations sont satisfaites quelles que soient les vitesses ; la règle de Roberval donne donc alors la tangente : et il est facile de voir qu'elle coïncide dans ce cas avec la nôtre.

Si les trois vitesses $a, b, c,$ sont égales, abstraction faite des signes, les équations de condition nécessitent que les rayons vecteurs fassent entre eux des angles égaux ou suppléments.

Il résulte de là qu'il y a erreur dans la construction donnée par Monge pour la tangente à la courbe d'intersection de deux ellipsoïdes de révolution qui ont un foyer commun. En effet, dans ce cas, les trois vitesses $a, b, c,$ sont égales aux signes près, et, par conséquent, il serait nécessaire que les trois rayons vecteurs fissent entre eux des angles égaux ou suppléments ; ce qui ne saurait avoir lieu que pour certains points particuliers.

Nous avons considéré le cas le plus général d'une courbe quelconque dans l'espace. Il est facile d'en déduire le cas d'une courbe plane, dans le plan de laquelle sont situés les pôles, qui peuvent être réduits à deux : il suffit alors de porter sur les deux rayons des lignes $a, b,$ proportionnelles aux vitesses avec lesquelles croissent ces rayons, d'élever aux extrémités de ces lignes des perpendiculaires aux rayons ; la droite qui joindra le point de la courbe au point de rencontre de ces perpendiculaires sera la tangente.

L'angle des rayons vecteurs, sur les côtés duquel on a porté les longueurs a et b, se trouve ainsi partagé en deux autres, dont les cosinus sont proportionnels à ces longueurs : pour que la règle de Roberval ne soit pas en défaut, il est nécessaire que la diagonale du parallélogramme construit sur a et b fasse avec ces deux lignes des angles dont les cosinus soient proportionnels aux longueurs a et b; ce qui donne la condition unique,

$$\frac{a+b\cos ab}{a} = \frac{b+a\cos ab}{b},$$

ou $$(b^2-a^2)\cos ab = 0;$$

équation qui exige que les deux vitesses soient égales, ou que l'angle des rayons soit droit.

La règle est donc applicable à l'ellipse et à l'hyperbole, parce que alors les deux vitesses se trouvent égales.

Montucla l'a appliquée au cas où les deux rayons vecteurs seraient dans un rapport constant. Les vitesses étant alors dans le même rapport que les rayons, il porte sur ces rayons deux longueurs qui leur soient proportionnelles; il construit le parallélogramme sur ces deux lignes, et prend la diagonale pour la tangente. Cette construction est évidemment erronée, puisque l'équation ci-dessus n'est pas satisfaite, excepté pour les deux points particuliers où l'angle des rayons vecteurs est droit.

Au lieu de déterminer les points d'une courbe par leurs distances à trois pôles, on pourrait les déterminer par leurs distances à deux pôles et à un plan fixe, ou à un pôle et deux plans fixes, ou enfin à trois plans fixes. Si l'on joint le point de la courbe aux pôles ou qu'on abaisse des perpendiculaires sur les plans fixes, on a, dans tous les cas, les lignes dont les vitesses d'accroissement sont censées connues; la règle que j'ai donnée ci-dessus s'y applique directement; et celle de Roberval n'est exacte que dans les cas particuliers qui satisfont aux équations ci-dessus.

Les mêmes considérations s'appliquent aux courbes planes.

On voit ainsi que la règle de Roberval peut être appliquée sans erreur à la parabole, lorsqu'on détermine ses points par leurs distances au foyer et à la directrice, parce que les vitesses avec lesquelles ces distances croissent sont égales.

Si la distance des points de la courbe à un plan ou une droite fixe n'était pas comptée sur une perpendiculaire à ce plan ou à cette droite, mais parallélement à une droite fixe quelconque, ce cas se ramènerait facilement au précédent. En effet, l'accroissement de la perpendiculaire est la projection de l'accroissement de la distance oblique sur la perpendiculaire; on obtient donc la vitesse avec laquelle croît la perpendiculaire, en multipliant la vitesse d'accroissement de la distance oblique par le sinus de l'angle que fait sa direction avec le plan fixe.

Au lieu de porter sur la perpendiculaire la projection de la vitesse relative à l'oblique, on pourrait porter sur celle-ci la vitesse qui s'y rapporte et mener par l'extrémité un plan parallèle au plan fixe; ce plan se confondrait avec celui qu'on aurait obtenu en considérant la vitesse relative à la perpendiculaire.

Il résulte de là que la règle de Roberval est exacte toutes les fois que les points sont déterminés par leurs distances à des plans ou des droites fixes, et que ces distances sont comptées parallèlement à ces droites, ou aux intersections mutuelles de ces plans.

Le principe sur lequel Roberval a fondé sa règle étant incontestable, puisqu'il n'est au fond qu'une identité, l'erreur de ce géomètre tenait à une fausse décomposition de la vitesse du point générateur, dans le sens des rayons vecteurs ou des lignes de direction constante qui se coupent en ce point. Il est facile de calculer ces composantes, et l'on retrouvera les mêmes conditions que ci-dessus pour l'exactitude de la construction de Roberval.

Considérons, par exemple, une courbe plane engendrée par l'intersection successive de deux droites dirigées vers des pôles fixes. Soient r, r', les longueurs des deux rayons relatifs à un point quelconque de la courbe, δr, $\delta r'$, les accroissements infini-

ment petits que prennent ces rayons quand on passe à un point infiniment voisin sur la même courbe ; on aura les composantes de la vitesse suivant les rayons vecteurs, en menant par ce second point des parallèles à ces rayons ; les parties de ces parallèles comprises entre leur point de départ et leurs points de rencontre avec les rayons représenteront les grandeurs des composantes ; représentons par v, v', ces lignes infiniment petites, portées respectivement sur r, r', et par Φ l'angle des rayons vecteurs.

On obtiendra immédiatement

$$v = \delta r - v' \cos \Phi, \qquad v' = \delta r' - v \cos \Phi,$$

et par suite

$$\frac{v}{v'} = \frac{\delta r - v' \cos \varphi}{\delta r' - v \cos \varphi}.$$

Les composantes v et v' ne sont donc pas entre elles comme les vitesses avec lesquelles croissent les rayons vecteurs ; or, c'est là ce que supposait Roberval, et c'est ce qui fait que l'emploi d'un principe vrai l'a conduit à une règle fausse.

Voyons maintenant dans quel cas particulier on pourra avoir

$$\frac{v}{v'} = \frac{\delta r}{\delta r'},$$

il faudra pour cela poser

$$\frac{\delta r - v' \cos \varphi}{\delta r' - v \cos \varphi} = \frac{\delta r}{\delta r'}.$$

Retranchant terme à terme ces deux fractions égales, on aura encore une fraction égale ; il est donc nécessaire et suffisant qu'on ait

$$\frac{v' \cos \varphi}{v \cos \varphi} = \frac{\delta r}{\delta r'} = \frac{v}{v'},$$

ce qui ne peut arriver que si l'on a $v = \pm v'$, ou cos $\Phi = 0$, conditions identiques avec celles qui ont été trouvées ci-dessus.

Il en serait de même dans le cas de trois pôles, et dans les autres cas dont il a été question; je crois inutile d'entrer dans de plus grands détails à cet égard.

Dans le cas où l'on connaît la vitesse du point sur le rayon, et la vitesse angulaire de ce rayon, la méthode de Roberval est exacte, parce qu'il considère alors les véritables composantes de la vitesse du point générateur.

Je rappellerai à cette occasion une méthode donnée par M. Poinsot, pour mener la normale à une surface courbe dont les points sont déterminés par leurs distances à des centres fixes. Cette méthode est indiquée rapidement dans son mémoire sur l'équilibre et le mouvement des systèmes. (*Journal de l'École polytechnique*, tome VI, 13ᵉ cahier.)

Si l'on désigne les rayons vecteurs des points de la surface par r, r', r'', etc..... et qu'on ait entre eux l'équation générale

$$F(r, r', r' \ldots) = 0,$$

sans compter les relations qui ont lieu entre ces rayons, s'ils sont en nombre supérieur à trois; on obtiendra la normale en portant sur les rayons respectifs, à partir du point de la surface, et dans le sens indiqué par le signe, des lignes proportionnelles aux différences partielles,

$$\frac{dF}{dr}, \quad \frac{dF}{dr'}, \quad \frac{dF}{dr''},$$

et en déterminant la direction de la résultante des forces, qui seraient représentées en grandeur et en direction par ces lignes. Cette direction est celle de la normale à la surface.

Cette règle s'applique immédiatement à la normale à une courbe plane, et elle s'accorde avec celle que j'ai donnée dans ce cas pour la tangente.

Supposons, en effet, une courbe plane donnée par l'équation

$$F(r, r') = 0;$$

on en tire

$$\frac{dF}{dr}\,\delta r + \frac{dF}{dr'}\,\delta r' = 0,$$

ou

$$\frac{\delta r}{\delta r'} = -\frac{\frac{dF}{dr'}}{\frac{dF}{dr}}.$$

Les dérivées sont donc dans le rapport inverse des vitesses avec lesquelles croissent les rayons vecteurs, et de plus ces rapports sont de signes contraires. Il résulte de cette différence de signe que dans les deux règles en question on fait la construction sur les côtés de deux angles adjacents des rayons vecteurs; il reste à démontrer que les deux lignes qui en résultent sont perpendiculaires l'une sur l'autre.

Soient AM, BM, les deux rayons vecteurs r, r'; prenons $MD = \delta r$, $MC = \delta r'$, et élevons les perpendiculaires CT, DT; la droite MT sera la tangente. Prenons ensuite $MF = \delta r'$, $ME = \delta r$, et menons les droites EN, FN, parallèles aux rayons vecteurs, MN sera la normale, d'après la règle de M. Poinsot. Or, la ligne MT partage l'angle DMC en deux parties, dont les cosinus sont dans le rapport de δr à $\delta r'$; et la ligne MN partage l'angle adjacent AMB en deux parties, dont les sinus sont dans le rapport de δr à $\delta r'$; on a donc

$$\frac{\sin \text{NME}}{\sin \text{NMF}} = \frac{\cos \text{CMT}}{\cos \text{DMT}}.$$

Or, il est évident qu'il n'y a que la perpendiculaire à MT qui partage ainsi le supplément de l'angle DMC; les deux règles s'ac-

cordent donc dans le cas des courbes planes, et pourraient se déduire l'une de l'autre.

La méthode de M. Poinsot pourrait encore être employée à la détermination de la tangente à la courbe d'intersection de deux surfaces; il suffirait d'élever une perpendiculaire au plan passant par les deux normales à ces surfaces. On reconnaîtrait facilement que cette construction s'accorde avec la règle que nous avons établie.

MÉMOIRE

SUR

LA COMPRESSION DES LIQUIDES,

PAR MM. D. COLLADON ET C. STURM.

(CE MÉMOIRE A REMPORTÉ LE PRIX PROPOSÉ PAR L'ACADÉMIE.)

SÉANCE PUBLIQUE DU 11 JUIN 1827.

Nous exposerons dans ce mémoire les principaux résultats de nos expériences sur la compressibilité des liquides et sur la vitesse de propagation du son dans l'eau.

Un corps liquide soumis à un accroissement de pression diminue de volume, et ne reprend son état primitif qu'au moment où la compression cesse d'agir; ces différences de volume sont toujours très-petites si on les compare à celles qu'éprouvent les gaz; elles croissent à peu près proportionnellement à l'augmentation de pression, et il n'en résulte pour la température et la conductibilité électrique de ce corps que des changements presque inappréciables.

Les divers liquides ne se compriment pas également sous des accroissements égaux de pression, mais la compressibilité de chacun d'eux a une valeur constante, et qui ne varie qu'avec sa

température; en sorte qu'on pourrait reconnaître la nature d'un liquide en mesurant son volume sous diverses pressions.

Cette compressibilité spécifique est une propriété essentielle de ces corps, et sa détermination doit servir à compléter le tableau de leurs qualités élémentaires; elle peut en outre conduire à la solution de plusieurs problèmes très-importants de mécanique et de physique; nous citerons comme exemples la théorie des moteurs et la mesure de la vitesse du son dans les corps liquides.

La chaleur, en pénétrant les corps et en écartant leurs molécules, produit dans l'intérieur de ces corps un travail qui peut être transmis, et dont la valeur dépend à la fois de l'étendue de la dilatation et de l'intensité de la pression que le corps peut exercer en se dilatant. On a souvent proposé d'employer dans ce but la dilatation des corps liquides comme on utilise celle des vapeurs et des gaz; mais on ne pouvait calculer les avantages qui peuvent résulter de ces nouveaux moteurs sans connaître préalablement la résistance que chaque liquide oppose à la compression.

Quant à la vitesse de propagation du son, on sait, depuis les recherches de Young, de Laplace et de M. Poisson, sur ce sujet, que la mesure de cette vitesse dans une masse liquide peut se déduire de la densité de ce liquide et de sa compressibilité.

Nous avons entrepris de vérifier, par des expériences directes faites sur la vitesse du son dans l'eau d'un lac, les résultats de la formule qui sert à calculer cette vitesse : l'accord que nous avons trouvé entre les résultats déduits du calcul et ceux de l'expérience est un des faits les plus remarquables de la science.

Les premières expériences sur la compression des liquides ont été faites à la fin du dix-septième siècle par des physiciens florentins (1). A cette époque les découvertes de Galilée et de Torri-

(1) Plusieurs auteurs ont cité les résultats de l'expérience faite à Florence avec une sphère

celli avaient attiré l'attention des savants sur les recherches de physique expérimentale; les académiciens d'el Cimento qui travaillaient en commun à des expériences sur les propriétés des corps et des fluides impondérables, firent plusieurs tentatives pour déterminer si l'eau était sensiblement compressible. Le premier appareil qu'ils construisirent dans ce but était composé d'un long tube capillaire recourbé en U renversé, et terminé par deux boules très-épaisses *a* et *b*. La boule *b* et la partie adjacente du tube capillaire contenaient l'eau à comprimer; une échelle fixée au tube devait servir à mesurer cette compression; la seconde boule *a* était aussi remplie d'eau, et l'appareil était exactement fermé; on faisait l'expérience de la manière suivante : la boule *b* était placée dans un vase rempli de glace, puis on chauffait fortement la boule *a;* le liquide en se dilatant diminuait le volume de l'air contenu dans le tube capillaire, et l'eau contenue dans la branche *b* supportait une forte pression. Cette expérience prolongée jusqu'à la rupture des appareils ne donna aucune diminution sensible de volume.

D'autres essais furent faits avec un appareil semblable à celui que l'on emploie pour vérifier la loi de Mariotte, et au moyen d'une colonne comprimante de mercure de vingt-quatre pieds de hauteur sans donner de résultats plus marqués.

Les académiciens d'el Cimento firent alors fabriquer une sphère d'argent à parois très-épaisses. Cette sphère ayant été remplie d'eau et hermétiquement bouchée, ils la soumirent à des chocs violents; la compression ayant déformé la sphère et diminué le volume intérieur, le liquide traversa les parois et parut en rosée sur la surface. Les savants florentins conclurent de ces expériences que la

d'argent, mais nous n'avons trouvé dans aucun ouvrage élémentaire français les détails des autres expériences tentées par les savants florentins, non plus que la description des appareils ingénieux au moyen desquels Canton découvrit le premier la compressibilité de l'eau et de quelques autres liquides; nous avons pensé faire acte de justice envers ce savant physicien anglais, en reproduisant avec quelques détails les dispositions principales de l'appareil qu'il avait employé dans ses expériences.

compressibilité de l'eau ne pouvait être rendue appréciable, et cette opinion fut partout adoptée.

En 1761, J. Canton, physicien très-exact, découvrit le premier et essaya de mesurer la compression de l'eau et de quelques autres liquides (1); la méthode d'expérience qu'il imagina dans ce but est susceptible d'une grande précision, et elle a été adoptée depuis par tous ceux qui se sont occupés de recherches semblables.

Canton plaçait les liquides qu'il voulait comprimer dans des instruments en verre ou *piézomètres*, ressemblant à de gros thermomètres dont le tube serait ouvert; pour éviter l'altération de forme qui aurait pu résulter d'une pression inégale sur les parois intérieures et extérieures de cet instrument, il eut l'ingénieuse idée de l'introduire dans un récipient entièrement clos, dans lequel il comprimait de l'air; la pression se communiquait au liquide de l'instrument par l'extrémité de son tube. Les parois de cet appareil étaient ainsi comprimées exactement de la même manière sur leur face intérieure et extérieure, et ne subissaient aucune déformation. On évitait l'influence des changements de température, en plongeant la boule de l'instrument dans un réservoir d'eau placé sous le récipient.

Les expériences de cet habile physicien suffiraient pour démontrer que les liquides sont des corps compressibles; mais comme il n'avait opéré que pour des différences de pression de deux ou trois atmosphères et sur un très-petit nombre de liquides, qui tous n'étaient pas parfaitement purs, les mesures de compressibilité qu'il a données ne sont pas suffisamment précises.

Aucune autre expérience remarquable sur la compressibilité des liquides n'a été publiée pendant le XVIII^e^ siècle; ce n'est qu'en 1819 que de nouveaux essais de M. Perkins ont attiré l'attention sur ce sujet. Ces essais, publiés dans les *Transactions philosophiques* pour l'année 1820, ont démontré que l'eau est encore compres-

(1) *Transactions philosophiques*, 1762 et 1764.

sible sous de très-fortes pressions, mais les valeurs qu'on en pourrait déduire pour la contraction absolue ne peuvent pas être admises comme exactes. De l'aveu même de M. Perkins les résultats obtenus dans deux expériences différentes ont varié du simple au double, et l'instrument à index qui devait servir à mesurer la compression ne pouvait l'indiquer qu'approximativement.

L'année suivante, M. le professeur Œrsted s'étant occupé de répéter les expériences sur la compressibilité de l'eau, apporta quelques perfectionnements à l'appareil de Canton (1); au lieu de comprimer de l'air dans le récipient qui contient le piézomètre, M. Œrsted a imaginé de le remplir complétement d'eau; on évite ainsi l'influence du réchauffement de l'air sur le liquide du piézomètre. Ce savant ayant comprimé l'eau dans cet appareil depuis une pression d'un tiers jusqu'à celle de six atmosphères, a trouvé que la diminution de volume est constante entre ces limites de pression, et que la température du corps liquide n'éprouve pas de changement notable lorsque son volume diminue.

La compressibilité de l'eau d'après ces expériences serait de 45 millionièmes par atmosphère à 15°. Cependant l'exactitude de ce nombre nous semble fort douteuse, et nous présenterons au sujet de cette expérience de M. Œrsted quelques remarques critiques qui nous paraissent fondées.

Ainsi, M. Œrsted s'est servi, pour déterminer les degrés de pression, d'un manomètre à air fort court, et l'air de ce manomètre était comprimé directement par l'eau du récipient. La propriété que l'eau possède d'absorber des quantités variables d'air lorsque la pression augmente devait influer nécessairement sur les indications de ce manomètre, et donner pour la compressibilité du liquide un nombre trop petit. M. Œrsted a aussi méconnu l'influence qu'exerce sur la contraction apparente du liquide la diminution de volume du piézomètre, dont les parois formées d'une

(1) *Annales de chimie et de physique*, tome XXII.

substance compressible sont aussi contractées par l'accroissement de pression; en sorte que le changement de volume que l'on observe sur le liquide du piézomètre n'est que la différence entre la contraction réelle du liquide et celle d'un volume égal de la matière qui sert d'enveloppe.

On peut concevoir facilement cette influence en imaginant que le piézomètre dont on se sert pour ces mesures a un réservoir prismatique à base rectangulaire; chaque parois de ce prisme devant se contracter en tous sens proportionnellement à ses trois dimensions, le volume intérieur occupé par le liquide sera diminué, et si ce liquide était incompressible, la colonne dans le tube capillaire augmenterait de longueur par l'effet de la compression.

Nous avons étendu nos recherches à la plupart des liquides dont la composition chimique est exactement ou à peu près exactement déterminée, et pour presque tous ces liquides nous avons opéré avec des pressions successivement croissantes et décroissantes, depuis une jusqu'à vingt-quatre et même trente-deux atmosphères. Les nombres que nous donnons dans ce mémoire pour la compressibilité spécifique de ces liquides ont été corrigés de l'influence de la contraction du verre, que nous avons conclue d'expériences faites avec soin sur l'allongement que cette substance éprouve par la traction d'un poids.

Quelques mesures, sur l'exactitude desquelles nous avions conservé des doutes, ont été omises dans ce mémoire. Dans ce nombre plusieurs se rapportaient à des expériences sur la compressibilité de l'eau, de l'alcool, de l'éther sulfurique et du sulfure de carbone, pris à des températures très-voisines des points d'ébullition de ces liquides, et distantes de ces points d'un même nombre de degrés. Ces expériences, destinées à confirmer une loi que nous n'avons pas cru devoir énoncer dans ce mémoire, nous ont présenté des obstacles si difficiles à surmonter, que nous avons dû renvoyer à un autre temps la suite de ces recherches.

La mesure de la compression des liquides est un des sujets d'expériences qui exercent le plus la patience des observateurs.

Lorsque l'on veut expérimenter à de très-hautes pressions, on s'expose à faire rompre des appareils dont la préparation exige beaucoup de temps. Les variations les plus légères dans la température du piézomètre ont une telle influence, qu'on doit attendre pour chaque mesure que cette température et celle d'une grande partie de l'appareil soit devenue parfaitement stable; enfin quelques liquides résistent à toutes ces précautions, et ne peuvent être soumis que très-difficilement à ces expériences de mesures. On peut citer comme exemples quelques éthers et le carbure de soufre. Nous avons pris des précautions nombreuses pour éviter toutes ces causes d'erreur, et nous avons cherché à n'opérer que sur des liquides très-purs. Le temps considérable que nous avons mis à ces expériences, qui nous ont exclusivement occupés pendant plusieurs mois, est la meilleure garantie de la précision de nos mesures. Le nombre de nos observations n'est pas très-étendu, mais nous les avons vérifiées à plusieurs reprises, persuadés que quelques mesures exactes sont plus utiles pour l'avancement de la science que des résultats nombreux et mal observés. C'est à la patience et à la précision de quelques expérimentateurs modernes que sont dus en grande partie les progrès vastes et rapides que les sciences physiques ont faits depuis le commencement de ce siècle.

Ce mémoire sera divisé en TROIS PARTIES.

La PREMIÈRE contiendra la description de l'appareil employé pour mesurer la compression des liquides, les expériences relatives à la compressibilité du verre, et les tableaux des résultats trouvés pour le mercure, l'eau pure et saturée d'air, l'alcool, l'éther sulfurique, l'éther hydrochlorique, l'éther acétique, l'éther nitreux, l'acide sulfurique, l'acide nitrique ou azotique, l'acide acétique,

l'essence de térébenthine, le sulfure de carbone, l'eau en partie saturée de gaz ammoniac et l'eau de mer.

La SECONDE PARTIE traitera des expériences faites pour mesurer la chaleur que dégagent les liquides par l'effet de pressions fortes et rapides, ainsi que des essais que nous avons faits pour connaître l'influence d'une compression mécanique sur la conductibilité électrique de quelques liquides bons conducteurs.

Dans la TROISIÈME PARTIE nous donnerons le détail d'une série d'expériences faites par l'un de nous sur la propagation du son dans l'eau, et nous comparerons les nombres obtenus par cette mesure expérimentale avec ceux qui résultent de l'application de nos mesures de compressibilité à la formule donnée par M. Poisson.

PREMIÈRE PARTIE.

§ I.

DESCRIPTION DE L'APPAREIL DE COMPRESSION.

La mesure de la compressibilité d'un liquide ne peut être obtenue que par deux observations différentes, qui doivent être faites simultanément; par l'une de ces observations on détermine quel est l'accroissement de pression que l'on fait supporter au liquide, et par l'autre on mesure la diminution de volume produite par cet excès de pression.

Les appareils employés pour ces mesures se composent par conséquent de deux instruments principaux : l'un de ces instruments, destiné à mesurer la pression, sera appelé le *manomètre*, et l'autre, servant à indiquer la variation du volume liquide, sera appelé le *piézomètre*.

C'est de la bonne disposition de ces deux instruments que dépend l'exactitude des résultats observés; et comme ces mesures portent sur des variations de volume excessivement petites, comme elles peuvent être influencées par des causes d'erreur très-puissantes, la construction des appareils et l'emploi de ces instruments exigent des précautions nombreuses et une précision extrême.

Nous allons décrire les procédés qui nous ont servi pour la construction et la graduation de notre appareil de compression, et la méthode d'expérience que nous avons adoptée dans l'emploi de cet appareil.

DESCRIPTION DU PIÉZOMÈTRE.

Le liquide dont on veut mesurer la compression est renfermé

dans un instrument de verre assez semblable à un thermomètre à gros réservoir; cet instrument est représenté dans les figures 2 et 3, planche I; il est formé d'un long tube capillaire *uy*, à une des extrémités duquel est soudé un réservoir *r*, terminé par une pointe effilée; à l'autre extrémité du tube capillaire est un tube cylindrique *yz*, dont le diamètre intérieur est égal à quatre ou cinq millimètres.

Pour la construction de cet instrument il convient de choisir un tube capillaire qui soit parfaitement cylindrique sur une longueur de deux ou trois décimètres; on parvient à se procurer ces tubes en en calibrant un très-grand nombre au moyen d'une petite goutte de mercure que l'on fait glisser le long du tube, et en mesurant sa longueur sur une petite échelle d'ivoire très-mince, interposée entre la bulle et le jour.

Lorsqu'on est parvenu à trouver un de ces tubes dont une partie est cylindrique, on y introduit par tâtonnement une goutte de mercure, qui occupe sensiblement toute la longueur de cette partie cylindrique, puis avec un léger pinceau trempé dans une solution de résine on marque d'un trait fin les deux extrémités de la colonne de mercure; en inclinant ensuite le tube, on fait glisser cette colonne jusqu'à ce qu'elle soit arrivée à l'extrémité de cette première division; on marque alors une seconde division parfaitement égale en volume à la première, et on continue cette opération aussi longtemps que la longueur du tube le permet. La somme de ces divisions forme donc un volume multiple de celui de la portion cylindrique du tube. On remplit alors, toujours par une suite de tâtonnements, le tube capillaire d'une goutte de mercure, d'une grosseur telle qu'elle remplisse exactement la somme de toutes les divisions du tube, puis on verse cette goutte dans une petite capsule en papier, que l'on place sur une balance d'essai. Son poids sert à déterminer exactement le volume qu'elle occupait dans le tube capillaire; en divisant ce volume par le nombre des divisions tracées sur le tube on a d'une manière très-précise le volume de la fraction de ce tube, que l'on peut considérer

comme parfaitement cylindrique. Si maintenant on place le long de cette partie cylindrique une échelle divisée en parties égales, chaque division ou chaque degré correspondra à un volume parfaitement connu du tube capillaire.

Toutes ces précautions sont indispensables dans la construction de cet instrument, destiné à indiquer des fractions de millionièmes de volume du liquide employé.

On soude ensuite, à l'une des extrémités du tube capillaire, un réservoir r, terminé par une pointe effilée ouverte, et à l'autre extrémité un petit tube yz, de quelques millimètres de diamètre. Pour déterminer le volume du réservoir, on le remplit de mercure en le plongeant dans une cloche renversée remplie de mercure bouilli à l'avance. Le mercure s'introduit très-promptement, par l'effet de la différence de niveau, dans le réservoir, en y pénétrant par la pointe effilée qui le termine. On achève alors de remplir la portion du tube capillaire placée entre l'échelle divisée et le réservoir, et l'on marque par un point i l'extrémité de la masse de mercure du côté de la pointe du réservoir, en ayant soin d'opérer à une température uniforme. Le mercure contenu dans le piézomètre est ensuite vidé dans une coupe, et on le pèse très-exactement. Cette seconde pesée sert à déterminer le rapport entre le volume total du piézomètre et le volume des divisions de son tube capillaire.

Cette opération terminée, on remplit le piézomètre du liquide dont on veut mesurer la compressibilité, en l'introduisant également par la pointe ouverte du réservoir, puis lorsqu'il est entièrement plein, on ferme à la lampe l'extrémité du réservoir au point i (voyez figure 3).

Ce procédé est extrêmement commode, et il est souvent le seul que l'on puisse employer, soit lorsqu'on veut mesurer la compression de liquides saturés de gaz, soit lorsqu'on opère sur des liquides qui se décomposent facilement par la chaleur.

Le tube yz qui termine le piézomètre est ouvert et plein d'air; cet air sert d'intermédiaire entre l'eau qui environne le piézomètre

et le liquide qui y est contenu, et empêche le contact des deux liquides.

Canton et M. Œrsted se sont servis d'un index de mercure pour empêcher ce contact et marquer l'extrémité de la colonne dans le tube capillaire. Nous avons trouvé que l'emploi de cet index est sujet à plusieurs inconvénients. Quelques liquides, tels que le carbure de soufre, l'essence de térébenthine, divisent cet index en un grand nombre de petits globules, et passent facilement entre les parois du tube et l'index; lorsque l'on fait varier la pression d'une manière subite, l'index, par suite de la vitesse acquise et de la différence de la masse, pénètre dans la colonne liquide avec laquelle il est en contact. Enfin, l'on sait qu'une bulle de mercure logée dans un tube très-capillaire ne s'y meut que par une différence de pression de quelques centimètres de mercure; ainsi l'emploi d'un index de ce métal occasionne une différence de pression nuisible contre les parois intérieures et extérieures du piézomètre.

Tous ces inconvénients nous ont fait renoncer à l'emploi de cet index; nous avons préféré observer directement l'extrémité de la colonne liquide, qu'il est toujours facile de distinguer; pour les liquides très-hygrométriques, nous avons employé un très-petit index de sulfure de carbone.

D'après la méthode de Canton, adoptée par M. Œrsted, nous avons placé le piézomètre ouvert dans un vase plein d'eau, et nous avons comprimé directement l'eau de ce vase avec une pompe de compression; la figure 1, planche I, représente cette disposition.

AB est le vase plein d'eau contenant le piézomètre; c'est un fort cylindre de verre terminé à son extrémité B par une virole en cuivre à laquelle on visse la pompe CD; un petit treuil F fixé sur cette pompe sert, au moyen de la corde *cc* et de la tige EE, à faire avancer le piston lorsque l'on veut comprimer l'eau du vase AB.

Nous avons placé le cylindre AB dans une position horizontale, afin d'éviter les mouvements du liquide contenu dans ce cylindre,

dont toutes les parties n'avaient point toujours la même température.

Un piézomètre construit comme nous venons de le dire, peut être considéré comme un thermomètre extrêmement sensible, et sur lequel de légères variations de température produiraient des variations dans la longueur de la colonne capillaire qui altéreraient complétement les résultats de compression : cette cause d'erreur est tellement puissante, que pour le mercure, par exemple, une variation de température de $\frac{1}{53}$ de degré centigrade occasionne une variation de longueur égale à celle que produirait une différence de pression d'une atmosphère.

Les expériences de compression sur les liquides doivent donc être faites avec assez de soin pour que l'on puisse éviter l'influence des variations de température sur le piézomètre, ou du moins sur le réservoir de cet instrument; et comme quelques-unes de ces expériences doivent se prolonger pendant plusieurs minutes, l'appareil doit être construit de telle sorte que le liquide en expérience ne puisse varier de température pendant tout ce temps.

Pour y parvenir nous avons introduit l'extrémité A du cylindre de verre AB dans une caisse en métal M pleine d'eau légèrement épaissie par une solution d'empois, afin d'en rendre les mouvements moins faciles. Le vase M, d'une capacité d'environ 50 litres, était muni de thermomètres, dont l'un *tt* était appliqué immédiatement sur l'extrémité A du cylindre. L'appareil était renfermé dans une petite chambre n'ayant qu'une seule fenêtre; on élevait ou on abaissait la température de cette chambre suivant le degré de température auquel on voulait opérer, de manière à avoir autant que possible la même température dans l'eau du réservoir M et dans l'air environnant. Lorsque l'extrémité de la colonne du piézomètre indiquait par son immobilité que la température de cet instrument était parfaitement fixe ainsi que celle du thermomètre *tt*, on comprimait le liquide du vase AB en faisant tourner le petit treuil F, l'eau du cylindre AB communiquait sa

pression au liquide du piézomètre à travers le tube *yz*, et l'on observait avec une petite lunette les mouvements du sommet de la colonne liquide le long de l'échelle *nn*.

L'expérience terminée, on observait de nouveau la longueur de la colonne du piézomètre et l'indication du thermomètre *tt;* si ces deux indications n'avaient pas changé, on était certain que la température du piézomètre n'avait pas varié pendant la durée de l'expérience.

Pour des mesures prises à des températures plus élevées nous avons logé le vase cubique dans une seconde enveloppe plus grande, et l'espace intermédiaire a été rempli d'une poussière peu conductrice; on échauffait peu à peu l'eau de la caisse M, et on saisissait pour l'expérience l'instant où la température de l'eau de ce vase atteignait un maximum.

Outre les variations de température, trois autres causes d'erreur pourraient encore influer sur les indications du piézomètre, savoir: l'adhérence d'une portion du liquide aux parois du tube capillaire, la diminution de pression due au frottement de la colonne liquide dans ce tube, enfin les petites quantités d'air adhérentes aux parois intérieures du piézomètre.

On remédie aux deux premières causes en faisant deux séries d'expériences, l'une pour des pressions croissantes et la seconde pour des pressions décroissantes; on évite presque complétement l'influence de la dernière cause, soit en faisant bouillir à l'avance le liquide du piézomètre, soit en employant des pressions très-puissantes.

DESCRIPTION DU MANOMÈTRE.

La partie de l'appareil destinée à mesurer l'intensité de la pression doit être aussi construite avec soin, et ses indications doivent être mises à l'abri des variations de température et des influences diverses qui tendent à les altérer. La construction d'un bon manomètre n'est point une chose facile, surtout lorsque

ce manomètre doit servir pour des expériences à de hautes pressions.

Le manomètre dont nous nous sommes servis est représenté dans les figures 1, 4 et 5, planche I; il est formé de trois tubes d'inégal diamètre *pq*, *qr* et *rs*, figure 5, et il est muni dans toute sa longueur d'une échelle divisée en parties égales.

Ce manomètre fermé à sa partie supérieure se place dans un cylindre de verre vertical KL, figures 1 et 4. Ce cylindre de verre est fermé dans sa partie inférieure, et son extrémité supérieure L se visse à un tube recourbé GGG, par l'intermédiaire duquel le cylindre KL communique avec le cylindre AB.

Le cylindre de verre KL contient dans sa partie inférieure du mercure jusqu'en *m*, et dans ce mercure plonge l'extrémité inférieure ouverte du manomètre *ps*.

Lorsque l'appareil est ainsi disposé, on ouvre le robinet *o*, placé au sommet du tube recourbé GG, et on remplit d'eau tout l'appareil; l'air qu'il contenait se dégage peu à peu par cette ouverture supérieure; on ferme ensuite le robinet *o*, et si l'on fait marcher la pompe, la compression se transmet à l'air du manomètre par l'intermédiaire de la colonne liquide GGLK, et le mercure s'élève dans cet instrument.

La graduation directe de ce manomètre d'après les lois de la compressibilité de l'air aurait présenté plusieurs difficultés; le procédé que nous avons adopté nous paraît à l'abri de toute difficulté, et donne immédiatement la graduation du manomètre d'après les degrés de pression que supporte l'eau contenue dans le cylindre horizontal AB où doit être placé le piézomètre.

Nous avons fait construire un tube *abcd*, figure 6, long d'environ deux mètres, composé de deux parties soudées; l'une *ab*, à peu près cylindrique, est un tube ordinaire en verre, de quatre millimètres de diamètre; l'autre partie *cd*, rendue conique en l'étirant à la lampe, a un diamètre qui diminue jusqu'à son extrémité *d*.

On laisse d'abord l'extrémité *d* ouverte, et l'on gradue ce tube dans toute sa longueur en un très-grand nombre de parties égales

en volume au moyen de petites gouttes de mercure que l'on y fait cheminer, en marquant à la résine les extrémités. On vérifie plusieurs fois cette division en employant des bulles de mercure de plus en plus fortes, puis l'on ferme l'instrument à son extrémité *d;* lorsque l'air qu'il contient a une température convenable, on fait arriver jusqu'à l'origine *a* de la division une bulle de mercure qui doit servir d'index.

Cet instrument ainsi divisé est introduit dans le cylindre horizontal AB, figure I, à la place du piézomètre, qu'il remplace momentanément, puis on comprime l'eau du cylindre AB. La bulle de mercure chemine alors en parcourant successivement les divisions tracées sur la longueur *abcd,* et dont chacune correspond à un degré de compression connu; en même temps le mercure contenu dans le bas du cylindre vertical KL s'élève dans le manomètre *pqrs* muni d'une échelle graduée. On établit ainsi une table de ces hauteurs et des pressions correspondantes; cette table une fois faite, si on enlève le tube *abd* du cylindre AB et que l'on y replace le piézomètre, on sera sûr, chaque fois que l'on ramènera par la compression le mercure du manomètre *ps* à une hauteur donnée, que le liquide du piézomètre logé dans le cylindre horizontal supporte une pression bien déterminée.

Dans le cas où la température de l'air du manomètre aurait varié, il est facile d'en tenir compte; à cet effet on place dans le cylindre KL deux petits thermomètres *tt,* destinés à indiquer cette température.

Cette méthode de graduation suppose, il est vrai, que l'air comprimé obéit exactement à la loi de Mariotte jusqu'à une pression de 30 ou 40 atmosphères. Nous n'avons pu vérifier cette loi jusqu'à d'aussi fortes pressions; mais nous nous sommes assurés, par une série d'expériences de compression faites à Genève en 1825, que cette loi de compressibilité des gaz est sensiblement exacte pour toutes les pressions moindres que 16 atmosphères. Dans cette expérience la tubulure de l'extrémité B du cylindre AB était mise en communication avec un baromètre ouvert à mercure haut de

$12^m,3$, et les pressions se mesuraient directement sur ce baromètre. Ayant introduit dans le cylindre horizontal un tube construit et gradué comme celui de la figure 6, les indications de cet instrument nous ont paru coïncider parfaitement avec celles de la colonne barométrique (1).

On pouvait craindre que les variations de température causées par les changements de volume du gaz du manomètre n'altérassent les indications de celui-ci, mais il faut remarquer que ce manomètre se trouvant amplement environné d'eau, ses parois absorbent et transmettent promptement la petite quantité de chaleur dégagée par la compression, d'autant mieux que cette compression n'était jamais instantanée; on opérait avec lenteur pour éviter des disjonctions dans la colonne du tube capillaire, et on maintenait chaque pression pendant quelques instants.

§ II.

COMPRESSIBILITÉ DU VERRE.

Nous avons dit précédemment que Canton, dans le but d'éviter la déformation du réservoir de ses piézomètres, avait eu l'heureuse idée de les plonger dans un récipient fermé où l'on faisait varier la pression; par ce moyen on évite, il est vrai, d'altérer la forme de ce réservoir, puisque la pression se transmet également sur tous ses points; mais cette pression produit sur la matière de ce réservoir une diminution de volume qui influe sur la contraction apparente du liquide contenu. Cette conclusion repose sur ce principe assez évident, qu'un corps solide homogène, plongé dans un fluide

(1) Pendant le temps qui s'est écoulé entre la présentation de ce mémoire et son impression, MM. Arago et Dulong ont vérifié, par des expériences très-précises, la parfaite coïncidence d'un manomètre gradué d'après la loi de Mariotte et les indications d'une colonne barométrique, depuis 1 jusqu'à 30 atmosphères. Cette expérience, d'une grande importance pour plusieurs recherches de physique, justifie l'exactitude des nombres qui, dans nos tableaux, représentent les pressions.

et soumis à une pression uniforme, éprouve, selon chacune de ses dimensions, une diminution proportionnelle à leur grandeur, et se contracte en conservant une forme semblable à sa forme primitive.

Supposons en effet que ce corps solide est un prisme parallélipipède dont les trois dimensions ont une mesure commune, et divisons par la pensée ce prisme par des plans parallèles à chacune de ses bases en un grand nombre de petits cubes tous égaux entre eux.

Lorsque la compression sera opérée et l'équilibre établi, ces molécules cubiques supporteront nécessairement sur leurs faces opposées des pressions égales, et cette pression sera la même pour toutes. Ainsi chacune de ces molécules se contractera également selon ses trois dimensions, et le corps, après avoir diminué de volume, conservera une forme semblable à celle qu'il avait avant la compression.

Si maintenant dans ce prisme ainsi contracté, et dont toutes les molécules sont parvenues à un état fixe d'équilibre, on enlève un prisme intérieur semblable plus petit, et si on remplace ce solide par un volume égal de liquide, dont les molécules soient dans le même état de tension, chaque face de ce prisme liquide produira, sur les faces contiguës du prisme enveloppant, une pression parfaitement égale à la réaction qu'exerçaient auparavant les faces homologues du prisme solide dont il a pris la place; rien ne sera changé pour l'état d'équilibre des molécules enveloppantes; et comme avant cette substitution le noyau solide avait dû être contracté proportionnellement à sa compressibilité, le volume du liquide sera diminué, dans le second cas, de la même quantité.

Cette conclusion suppose que la tension du fluide intérieur est égale à celle du fluide qui environne le piézomètre; cette condition est toujours remplie lorsqu'on fait usage de la méthode de Canton, puisque la pression extérieure se transmet librement au liquide du piézomètre.

En raisonnant de la même manière pour un piézomètre dont le

réservoir aurait une forme prismatique quelconque ou une forme cylindrique, on arrive également à cette conclusion, que dans l'emploi de ce piézomètre le volume intérieur occupé par le liquide diminue, pendant la compression, de la même quantité dont diminuerait, sous une pression égale, une masse solide de même matière que l'enveloppe, et d'un volume équivalent à celui du liquide comprimé.

La méthode que l'on a coutume d'employer pour déterminer les diminutions de volume des corps solides par la pression, consiste à mesurer le raccourcissement ou l'allongement linéaire d'une barre prismatique, et à en conclure la dilatation ou la contraction cubique. Cette méthode suppose que les variations de longueur sont assez petites pour que cet allongement ou ce raccourcissement ne modifie pas sensiblement la position relative des molécules; il faut par conséquent dans ces mesures apprécier de très-petits allongements, et faire usage d'un appareil disposé de manière que l'on n'ait point à redouter l'influence de la dilatation des supports et de la barre ou celle de la flexion des appuis qui soutiennent la barre chargée de poids.

L'appareil qui nous a servi pour l'allongement du verre est figuré dans la planche II, figures 1 et 2.

AB est la baguette dont on veut mesurer l'allongement, on la suspend par son extrémité A, et on fixe en B un plateau p, pour y suspendre des poids; à cette baguette on fixe, par sa partie supérieure, avec du mastic de résine, un tube CD également en verre; ce tube, long d'un mètre, enveloppe la baguette AB à laquelle il est suspendu; c'est à la partie inférieure D de ce tube que l'on fixe l'appareil gradué destiné à la mesure des allongements du cylindre AB. On voit que par ce procédé très-simple cet appareil de division conserve toujours la même position par rapport à l'extrémité supérieure du cylindre AB, et que la position de l'index est indépendante des variations ou des flexions des supports. Si de plus la température venait à varier, le cylindre et le tube étant à peu près contigus dans toute leur longueur et ayant des dilatations

égales, cette variation ne changerait rien à la mesure observée pour l'allongement.

Dans une première tentative nous avons mesuré directement l'allongement du cylindre de verre AB, en adaptant au bas de ce cylindre une petite échelle micrométrique d'un millimètre, divisé en cent parties, et en fixant au tube un index très-fin, qui glissait le long de cette échelle; on observait les mouvements du micromètre et de l'index au moyen d'un fort grossissement.

Nous avons aussi fait modifier cet appareil de manière à obtenir une indication plus facile à observer : cette disposition est représentée dans les figures 1 et 2; *ss* est un appendice soudé au tube et terminé par un petit couteau *t;* un autre couteau *u* est fixé au bas du cylindre de verre et appuyé sur un levier très-léger *ll;* ce levier tourne sur le tranchant *a* du couteau *t,* et parcourt à son extrémité le cercle divisé *mn.* Un second levier *l'l',* supporté de la même manière sur le côté opposé du cylindre, sert à contrôler les indications du levier *ll.*

La moyenne des résultats obtenus par ces deux procédés différents nous a donné un allongement de $\frac{6}{100}$ de millimètre sous l'influence d'un poids de huit kilogrammes; la longueur de la barre soumise à cet allongement étant exactement d'un mètre. Il est facile de déduire de ce résultat la contraction linéaire correspondante à une pression atmosphérique; la surface de section du cylindre était équivalente à 13 1/3 millimètres carrés. Il fallait, pour produire une traction équivalente à une atmosphère, un poids égal à celui d'un cylindre de mercure haut de 760 millimètres et ayant une base de 16,3 millimètres carrés. Le poids d'un pareil cylindre est de 138,3 grammes, par conséquent les 8 kilogrammes produiraient une traction équivalente à 57 atmosphères. En divisant l'allongement observé, savoir $\frac{6}{100}$ de millimètres par 57, on trouve que pour une atmosphère l'allongement de la baguette de verre d'un mètre de longueur est de 11 dix-millionièmes; une pression correspondante à une atmosphère, agissant sur les deux extrémités de la barre, la raccourcirait de la même quantité. On peut con-

clure de là la diminution linéaire que le corps éprouverait s'il était soumis à cette même pression d'une atmosphère sur tous les points de sa surface.

M. Poisson a démontré, dans un mémoire sur l'équilibre des corps élastiques, que cette dernière contraction n'est que la moitié de la première; en sorte qu'un cylindre de verre plongé dans un fluide et soumis à une pression de $0^m,76$ de mercure, se comprime de 165 cent-millionièmes de son volume primitif. Ce nombre, exprimant la compressibilité spécifique du verre, doit être ajouté à ceux qui représentent la contraction apparente des liquides pour chaque accroissement de pression d'une atmosphère (1).

§ III.

EXPÉRIENCES SUR LA COMPRESSIBILITÉ DES LIQUIDES.

Les nombres contenus dans les tableaux de ce chapitre sont ceux que nous avons trouvés dans nos expériences, et que nous donnons sans aucune correction. La première colonne des pressions renferme les indications du manomètre à air contenu dans le cylindre vertical KL, planche I. L'aide qui opérait la pression au moyen du treuil F ramenait la colonne de ce manomètre à des hauteurs toujours égales, et la maintenait à la même pression pendant le temps nécessaire pour chaque observation. Les indications contenues dans cette première colonne doivent être corrigées de la variation de température pour chaque expérience. Les nombres contenus dans la seconde colonne sont les lectures sur l'échelle

(1) Dans le mémoire original que nous avons déposé à l'Institut en 1827, et que les rédacteurs des Annales de chimie et de physique ont publié dans le tome XXXVI de ce recueil, nous avions supposé que la contraction linéaire δ d'une barre, comprimée également sur toute sa surface, était égale à celle δ' d'une barre égale comprimée seulement par ses extrémités, et nous avions en conséquence supposé la contraction cubique du verre égale à 303 cent-millionièmes. M. Poisson ayant démontré depuis que la valeur de δ' est double de celle de δ, nous avons dû admettre cette correction en publiant nos résultats.

adaptée au piézomètre; ces nombres ou degrés correspondent à des fractions de volume de la portion cylindrique du tube capillaire; pour en conclure la contraction il faut les comparer au volume du réservoir de chaque piézomètre exprimé aussi en degrés. Ce rapport est indiqué en tête de chaque tableau sous le titre de VOLUME PRIMITIF DU LIQUIDE.

Il faut en outre corriger la contraction déduite de cette comparaison de l'influence de la contraction de l'enveloppe. Nous donnons à la suite de chaque tableau le calcul relatif à cette double correction.

Quelques-uns de ces tableaux sont suivis de tableaux semblables ayant pour titre EXPÉRIENCES EN RETOUR; ils contiennent une seconde suite d'observations faites à des pressions successivement décroissantes et destinées à vérifier les premières.

On remarquera que le plus grand nombre des observations contenues dans ce chapitre ont été faites à la température de la glace fondante. Le choix de cette température rendait encore plus certaine la fixité de la température du piézomètre. Quelques autres expériences ont été faites à des températures de 10 et 11 degrés; elles font partie d'une série de mesures que nous avions entrepris de faire sur les principaux liquides à cette seconde température; mais le temps limité du concours et la difficulté de ces mesures n'ayant pas permis de vérifier suffisamment toutes les observations relatives à cette double série, nous avons choisi dans chacune les tableaux dont on avait eu le temps de vérifier les résultats.

L'une des difficultés principales que l'on rencontre lorsqu'on veut opérer à une température autre que celle de la chambre qui contient l'appareil, provient de la dilatation prodigieuse de la colonne capillaire. Si l'on n'a pas su prévoir la quantité précise de liquide qu'il convient de laisser dans l'instrument, il arrive que lorsque le piézomètre a été placé dans le cylindre AB, et qu'il a pris exactement la température de la caisse M, ce qui nécessite un temps assez long, l'extrémité de la colonne ne coïncide plus avec le commencement de l'échelle *nn'*. Il faut alors retirer le piézo-

mètre pour y introduire une nouvelle goutte de liquide et recommencer la même opération.

Dans quelques-uns des piézomètres que nous avons employés la colonne capillaire s'allongeait de près de 200 millimètres pour un réchauffement d'un degré centigrade; on peut comprendre d'après cela combien était difficile l'appréciation dont nous venons de parler.

I.

COMPRESSIBILITÉ DU MERCURE À 0°.

La compressibilité de ce liquide a été observée par Canton, qui l'avait jugée égale à 304 cent millionièmes pour $0^m,76$ de mercure. Nous avons fait remarquer que ce physicien avait oublié de tenir compte de l'influence de la contraction de l'enveloppe, et que ses expériences n'ont pas été étendues au delà de trois atmosphères de pression; aussi ce nombre, qu'il a donné dans les *Transactions philosophiques*, ne pouvait être adopté que comme une mesure approximative.

Nos expériences sur le mercure ont été faites avec tout le soin qu'exigeait la petitesse des quantités qu'il fallait mesurer, et nous avons poussé nos mesures pour ce liquide jusqu'à 30 atmosphères. La caisse M était remplie de glace fondante, qui entourait complétement l'extrémité A du cylindre et le maintenait à un degré fixe de température, ainsi que le réservoir du piézomètre qui y était contenu.

La fixité de la température est une condition encore plus essentielle pour ce liquide que pour tout autre; si elle variait d'un cinquantième de degré, il en résulterait un changement de volume plus grand que celui que pourrait produire la pression d'une atmosphère. Les quatres séries que contiennent les deux tableaux suivants indiquent, par la constance des indications, que la température du piézomètre était parfaitement stable.

MERCURE À 0°. — VOLUME PRIMITIF DU LIQUIDE = 622440 DEGRÉS DU TUBE CAPILLAIRE. — TEMPÉRATURE DU MANOMÈTRE = 9°(1).

ATMOSPHÈRES.	DEGRÉS de l'échelle.	DIFFÉRENCES de pression.	DIFFÉRENCES de contraction.	CONTRACTION pour une atmosphère.
1	242, 5			
		1	2, 3	2, 3
2	244, 8			
		1	1, 2	1, 2
3	246			
		1	2	2
4	248			
		1	1, 6	1, 6
5	249, 6			
		1	1, 2	1, 2
6	250, 8			
		2	2, 2	1, 1
8	253			
		2	2, 1	1, 05
10	255, 1			
		2	1, 9	0, 95
12	257			
		2	2	1
14	259			
		2	1, 9	0, 95
16	260, 9			
		2	2, 1	1, 05
18	263			
		2	2	1
20	265			
		2	2	1
22	267			
		2	2, 1	1, 05
24	269, 1			
		6	5, 9	0, 983
30	275			
	RETOUR.			
24	270			
			4, 1	1, 025
20	265, 9	4		
			6, 2	1, 033
14	259, 7	6		
			3, 7	0, 925
10	256	4		
			10, 8	1, 35
2	245, 2	8		

(1) Cette expérience est la seule de celles mentionnées dans ce mémoire pour laquelle la température normale du manomètre soit = 9°, ce manomètre ayant été remplacé par un autre gradué à la température de 10° centigrades.

SUITE DU TABLEAU PRÉCÉDENT.

ATMOSPHÈRES.	DEGRÉS de l'échelle.	DIFFÉRENCES de pression.	DIFFÉRENCES de contraction.	CONTRACTION pour une atmosphère.
1	242, 5			
		2	3, 5	1, 75
3	246			
		3	4, 8	1, 6
6	250, 8			
		3	3, 2	1, 066
9	254			
		3	3	1
12	257			
		3	3	1
15	260			
		3	3	1
18	263			
		3	3, 2	1, 066
21	266, 2			
		3	3	1
24	669, 2			
		6	5, 8	0, 966
30	275			
	RETOUR.			
24	270			
		4	4	1
20	266			
		6	6, 4	1, 066
14	259, 6			
		5	4, 6	0, 92
9	255			
		7	9, 8	1, 4
2	245, 2			
		1/2	1, 2	2, 4
1 1/2	244			

La contraction n'est pas uniforme dès le commencement; ce n'est guère qu'à partir de la sixième atmosphère qu'elle devient régulière et constante. La régularité des résultats obtenus pour

de plus fortes pressions indique que ces variations ne proviennent pas d'une diminution de compressibilité du mercure; nous les avons attribuées à l'influence de la très-petite quantité d'air qui reste adhérente aux parois du verre malgré l'ébullition du mercure dans l'instrument. Si c'est la véritable cause de ces différences, on comprend que ces petites bulles doivent être réduites à un si faible volume, quand la pression a atteint cinq ou six atmosphères, que leur influence s'annule entièrement.

A partir de la huitième atmosphère on a exactement un degré de contraction moyenne; le manomètre qui a servi à ces expériences avait été gradué sous une pression barométrique de $0^m,706$ de mercure et à la température de 9° c. Il n'y a donc aucune correction à faire pour sa température, mais il faut augmenter les résultats observés dans le rapport de 760 à 706 pour obtenir la contraction correspondante à des atmosphères de $0^m,760$ de mercure. En faisant cette correction sur la contraction observée, qui est égale à $\frac{1}{62540}$ pour chaque atmosphère de $0^m,706$, on trouve que pour des pressions de $0^m,760$ la contraction apparente du mercure dans un piézomètre de verre est de 173 cent millionièmes. Si à cette contraction on ajoute celle de l'enveloppe, 165 cent millionièmes, on trouvera la compressibilité vraie du mercure = 338 cent millionièmes.

L'observation de Canton sur la compression du mercure donne 469 cent millionièmes, lorsqu'elle a été corrigée de la compression du verre. Nous avons déjà fait la remarque que ce physicien n'a expérimenté que jusqu'à trois atmosphères, pression trop faible, surtout pour les liquides peu compressibles; les premiers nombres de nos tableaux jusqu'à six atmosphères environ donnent à peu près la même contraction de 471 cent millionièmes. Il est probable que la même cause qui nous a donné une contraction apparente trop forte pour les premières pressions aura influé dans l'expérience de Canton.

La densité du mercure à 0° est égale à 13,568; en introduisant dans la formule de la vitesse du son citée à la fin de ce mémoire

les nombres qui représentent la densité et la compressibilité du mercure, on trouve que la vitesse de propagation du son dans ce métal serait égale à 1483 mètres à la température 0°.

En comparant la contraction 338 cent millionièmes avec la dilatation produite entre zéro et cent degrés par chaque degré de réchauffement du mercure, on trouve que la pression de cinquante-trois atmosphères produit la même réduction de volume qu'un degré de refroidissement, et l'on peut conclure de ce rapprochement que dans les thermomètres à mercure non purgés d'air, la compression produite par cet air, quand la colonne capillaire s'allonge, n'exerce pas d'influence sensible sur le volume du liquide.

En calculant la quantité de travail ou de force vive que l'on pourrait obtenir de la dilatation du mercure pour un kilogramme de charbon, on trouve que s'il était possible de renfermer ce liquide dans des vases inextensibles, de l'y réchauffer et refroidir alternativement, en recueillant sur un piston le travail produit par ces variations de volume, chaque kilogramme de charbon brûlé (en supposant, comme on le fait pour les bonnes machines à vapeur, que l'on utilise les deux tiers seulement de la chaleur dégagée par la combustion de ce kilogramme) produirait environ mille dynamies, et si les frottements du piston et des autres pièces frottantes absorbaient un tiers de cette puissance, l'effet utile recueilli serait égal à 666 dynamies ou au travail d'un cheval de machine pendant deux heures et demie, effet triple ou quintuple de celui que l'on obtient dans les meilleures machines à vapeur.

II.

COMPRESSIBILITÉ DE L'EAU.

1° EAU DISTILLÉE PRIVÉE D'AIR PAR L'ÉBULLITION.

L'eau sur laquelle nous avons opéré avait subi plusieurs ébulli-

tions dans le réservoir du piézomètre pour la séparer de l'air qu'elle contenait. Il est important d'observer qu'une première ébullition n'est jamais suffisante ; à la sixième et même à la huitième ébullition il se dégage encore des bulles qui ne disparaissent que par le refroidissement. Pour cette expérience et celles qui suivent, le manomètre avait été changé ; ce dernier avait été gradué, le baromètre étant à $0^m,7466$ et le thermomètre à $10°$ centigrades.

Le piézomètre dont nous avons fait usage dans cette expérience est le même qui nous a servi à mesurer la compression de l'eau saturée d'air (voyez le III^e^ tableau) ; la position seule de l'échelle avait été intervertie dans les deux opérations. Nous avons mesuré en premier lieu la compression de l'eau avec ou sans air dans deux piézomètres différents : frappés de la diminution sensible de compressibilité indiquée par ces deux expériences, nous avons désiré la constater par un essai décisif, en opérant à la même température et dans le même vase ; en conséquence, après que les essais sur l'eau saturée ont été achevés, nous avons fait bouillir cette eau dans son piézomètre, nous en avons dégagé l'air avec soin, et nous avons recommencé une nouvelle série de compressions qui est celle du tableau suivant. Les nombres de cette expérience confirment à une très-petite fraction près ceux que nous avons obtenus avec un piézomètre différent.

EAU DISTILLÉE ET PRIVÉE D'AIR A 0°. — VOLUME PRIMITIF = 237300 DEGRÉS DU TUBE CAPILLAIRE. — TEMPÉRATURE DU MANOMÈTRE = 10°.

ATMOSPHÈRES de 0m,7466.	DEGRÉS de l'échelle.	DIFFÉRENCES de pression.	DIFFÉRENCES de contraction.	CONTRACTION par atmosphère.
1	211			
		1	12	12
2	223			
		2	22 1/4	11 1/8
4	245 1/4			
		2	22 5/8	11 5/16
6	268			
		2	22 1/8	11 1/16
8	290 1/8			
		2	24 1/20	12
10	314 1/4			
		2	21 1/8	10 5/8
12	335 1/2			
		4	44 1/2	11 1/8
16	380			
		2	23 1/8	11 3/8
18	403 1/8			
		2	22 1/8	11 1/16
20	425, 5			
		4	45	11 1/4
24	470, 5			

Ces expériences, poussées jusqu'à vingt-quatre atmosphères, donnent une contraction uniforme et constante pour toutes les pressions intermédiaires. M. Œrsted avait reconnu cette constance pour les pressions moindres que six atmosphères. Nous avons découvert que cette uniformité de compression n'existe pas pour tous les liquides, et que plusieurs d'entre eux donnent des degrés de contraction qui vont en diminuant, à mesure que la pression augmente.

La contraction moyenne observée est de 11 1/4 degrés sur l'échelle pour une pression de 0m,7466, le volume total du

liquide équivalant à 237300 degrés. D'après ces données, on obtient pour la contraction apparente 48 millionièmes, et si l'on ajoute 1,65 millionièmes pour la contraction cubique du verre, on trouve que la compression de l'eau à $0° = 49,65$ millionièmes.

Dans une autre expérience faite sur l'eau privée d'air avec un piézomètre différent, nous avions trouvé, toute correction faite, 49,5. Canton a donné trois mesures différentes de la compressibilité de l'eau : l'une à $+ 0°,5$, l'autre à $+ 10°$, et la troisième à $15°,2$ centigrades. Les nombres qu'il donne étant corrigés de la contraction du verre et ramenés à $0^m,76$ sont $50\frac{1}{4}$, $47\frac{1}{5}$ et 46 millionièmes. Nos recherches ne confirment pas cette différence : nous avons trouvé que l'eau a la même compressibilité à 0° et à $+10°$. Nous avons déjà fait observer les causes d'erreur qui ont dû altérer les résultats des expériences de Canton.

M. Œrsted a trouvé dans ses expériences le nombre 45 millionièmes, qui, corrigé pour la compression du verre, donne 46,65 millionièmes. Nous avons montré que dans l'appareil employé par ce physicien célèbre la mesure des pressions devait être trop faible, parce que l'air de son manomètre était en contact immédiat avec l'eau du récipient ; peut-être aussi l'eau employée par M. Œrsted n'avait-elle pas été privée de tout l'air qu'elle contenait.

EAU SATURÉE D'AIR A 0°.

A la température de 0° et sous la pression atmosphérique ordinaire, l'eau peut dissoudre environ un vingt-cinquième de son volume d'air dont la composition chimique n'est pas exactement la même que celle de l'air atmosphérique. Nous avons déterminé l'influence que cette quantité de gaz exerce sur la compressibilité de l'eau. Cette expérience était nécessaire pour comparer les mesures de la vitesse réelle du son dans l'eau douce avec la vitesse théorique que l'on déduit de sa densité et de sa compressibilité. Les résultats que nous avons obtenus indiquent que cet air modifie très-sensiblement la compression de l'eau ; ils peuvent expliquer en

partie la différence des nombres donnés par divers physiciens pour la compressibilité de ce liquide.

Nous donnons dans ce mémoire un tableau d'expériences faites sur l'eau saturée d'ammoniaque; on y remarquera également une diminution très-sensible de compressibilité.

Pour cette expérience, il était nécessaire d'introduire l'eau dans le piézomètre, sans avoir recours à l'ébullition de ce liquide, et même sans en élever sensiblement la température; il fallait, d'un autre côté, éviter l'influence de la couche d'air qui aurait pu adhérer aux parois de l'instrument; nous y sommes parvenus en procédant de la manière suivante : les réservoirs de nos piézomètres étaient terminés (fig. 2, pl. I^re^) par une pointe ouverte en *i*, que l'on ne fermait que lorsque l'instrument était entièrement plein de liquide. Le tube capillaire étant aussi ouvert à son extrémité, il était facile de remplir complétement le piézomètre, sans élever la température du réservoir; il suffisait pour cela de le plonger dans le liquide, et celui-ci entrait dans la boule *r* par la seule différence de niveau.

On introduisait d'abord une petite quantité d'eau dans le réservoir *r*, et on l'y faisait fortement bouillir; on purgeait ainsi les parois intérieures de l'air adhérent, puis on remplissait entièrement le piézomètre par le procédé décrit. On fermait la pointe *i* au chalumeau, et s'il restait des bulles, la chaleur de la main suffisait pour les faire sortir.

EAU SATURÉE D'AIR À 0°. — VOLUME PRIMITIF = 237416 DEGRÉS. — TEMPÉRATURE DU MANOMÈTRE = 10°,25.

ATMOSPHÈRES de 0m,7466.	DEGRÉS de l'échelle.	DIFFÉRENCES de pression.	DIFFÉRENCES de contraction.	CONTRACTIONS pour une atmosphère.
1	675 $\frac{1}{2}$			
		2	22 $\frac{1}{2}$	11 $\frac{1}{4}$
3	653			
		1	10 $\frac{5}{6}$	10 $\frac{5}{6}$
4	642 $\frac{2}{3}$			
		2	20 $\frac{1}{3}$	10 $\frac{5}{6}$
6	621 $\frac{1}{3}$			
		2	22 $\frac{1}{2}$	11 $\frac{1}{4}$
8	599			
		4	44	11
12	555			
		6	65 $\frac{1}{2}$	10
18	489 $\frac{1}{2}$			
		6	66 $\frac{1}{2}$	11 $\frac{1}{12}$
24	423			

Ce tableau nous fournit la même observation que le précédent, c'est-à-dire que les contractions sont constantes pour des accroissements égaux de pression. Mais la valeur absolue de la compressibilité pour une atmosphère n'est plus la même qu'auparavant. Elle est moindre que pour de l'eau privée d'air, en sorte que l'eau qui contient de l'air en dissolution est moins compressible que celle qui en est privée. Nous avons aussi vérifié ce résultat à la température de + 4°; les rapports de compressibilité ont été les mêmes. Cette diminution de compressibilité de l'eau qui contient de l'air en dissolution sert à confirmer ce que l'on savait déjà, c'est que cet air n'y est point contenu à l'état de simple mélange, mais qu'il y est retenu par une véritable combinaison chimique.

Avant de terminer ce que nous avions à dire sur ce liquide, nous

ferons observer que Canton ayant mesuré la compressibilité de l'eau non privée d'air, dit (*Transact. philosoph.* pour 1764) que sa compressibilité est la même que celle de l'eau privée d'air; les les faibles compressions qu'il employait ne lui auront sans doute pas permis d'apercevoir cette différence.

Les expériences précédentes ont été faites dans un piézomètre pour lequel le poids du volume de mercure remplissant le réservoir était de 271540 milligrammes; le tube capillaire avait été divisé en quatre parties d'égales capacités, et le poids d'une colonne de mercure occupant ces quatre divisions était de 1578,5 milligrammes. Depuis le milieu de la première division, du côté du réservoir, jusqu'à la fin de la seconde, le tube était exactement cylindrique, et la longueur de cette deuxième division correspondait à 344 degrés sur l'échelle : le poids de la colonne de mercure occupant cette longueur était donc de $\frac{1578,5}{4} = 394,6$ milligrammes. En comparant ces poids, on trouve que le réservoir avait un volume équivalant à 236736 parties égales en capacité aux portions du tube capillaire longues d'un degré.

Le liquide, au commencement de l'expérience, remplissait le réservoir, plus une partie du tube capillaire égale à 680 degrés; en les ajoutant au volume du réservoir que nous venons d'évaluer, on trouve pour le volume total primitif du liquide 237,416 des petits degrés du tube capillaire.

En comprimant le liquide, nous avons trouvé sa contraction moyenne pour chaque atmosphère égale à 11 degrés, ce qui fait $\frac{11}{237416}$ du volume primitif, ou à très-peu près 46,2 millionièmes. Telle est la contraction observée pour chaque indication du manomètre; il faut maintenant chercher la contraction pour une atmosphère de $0^m,76$ de mercure : pour cela, on corrige d'abord l'effet de la température, qui était de $10°,25$ au lieu de $10°$, ce qui augmentait de $\frac{1}{954}$ la valeur des indications, et l'on transforme les compressions de 0,7466 en atmosphères de 0,760. On obtient ainsi une contraction apparente de 47,65 millionièmes, qui, corrigée de l'influence de la compression du vase, devient égale

à 48,65 millionièmes. Ainsi la présence de l'air diminue d'environ 1 millionième la compressibilité de l'eau (1).

III.

COMPRESSIBILITÉ DE L'ALCOOL.

La seule mesure qui a été donnée pour la compressibilité de l'alcool est celle que Canton a insérée dans les *Transactions philosophiques* : à cette époque, on ne connaissait pas encore les procédés par lesquels on peut obtenir l'alcool anhydre, et l'on se contentait de distiller plusieurs fois ce liquide pour le purifier. Aussi le résultat publié par ce physicien pour de l'alcool dont la densité etait 0,846 donne-t-il évidemment une contraction beaucoup trop faible et qui ne peut convenir qu'à un mélange d'eau et d'alcool. Le liquide que nous avons employé avait été purifié et distillé à plusieurs reprises sur du chlorure de calcium ; sa densité était 0,783 à 10°. On a eu soin pendant le temps employé à remplir le piézomètre de l'abriter du contact de l'air dont il aurait pu absorber l'humidité. Ce liquide est moins facile à observer que l'eau, parce qu'en se contractant il adhère quelquefois aux parois du tube capillaire, et que l'extrémité de la colonne sur laquelle on mesure les diminutions de volume abandonne quelquefois en cheminant de petites gouttes qui se fixent aux parois du tube. On corrige la petite erreur qui pourrait provenir de cette adhésion en observant la variation de volume sous des pressions successivement croissantes et décroissantes. L'alcool n'atteint pas immédiatement la valeur maximum de condensation à laquelle il doit arriver ; cet effet est surtout sensible quand on opère de fortes pressions. Nous avons eu soin, en conséquence, dans les expériences sur ce li-

(1) Dans le mémoire imprimé dans les Annales de chimie et de physique, tome XXXVI, on remarque à la page 32 une erreur d'addition pour la somme des contractions du verre et du liquide; cette somme est trop faible d'une unité.

quide, de faire durer chaque nouvelle pression pendant deux ou trois minutes, avant de mesurer la contraction qu'elle y produisait; ce temps est nécessaire pour que la diminution de volume arrive à sa valeur finale. Le même phénomène s'observe pour l'éther sulfurique, le carbure de soufre et l'essence de térébenthine; soit que cette anomalie provienne d'un arrangement particulier des molécules, qui ne serait complétement effectué qu'au bout d'un certain temps, soit qu'elle ait pour cause une légère élévation de température par l'effet de la compression.

Voici la plus régulière des trois séries d'expériences faites sur l'alcool :

ALCOOL À 11° 6. — VOLUME PRIMITIF = 152660 DEGRÉS. — TEMPÉRATURE DU MANOMÈTRE = $7° \frac{1}{2}$.

ATMOSPHÈRES.	DEGRÉS de l'échelle.	DIFFÉRENCES de pression.	DIFFÉRENCES de contraction.	CONTRACTIONS pour une atmosphère.
1	202			
		2	27, 7	13, 85
3	235, 7			
		3	39, 8	13, 2
6	275, 5			
		6	80	13, 6
12	355, 5			
		6	78, 5	13, 2
18	434			
		6	77	12, 8
24	511			
	RETOUR.			
24	511			
		6	76, 5	12, 8
18	434, 5			
		6	78, 5	13, 1
12	356			
		6	79	13, 19
6	277			
		3	41	13, 6
3	436			
		2	27, 5	13, 75
1	208, 5			

Les nombres de cette série, surtout ceux du retour qui sont réguliers, indiquent une diminution sensible de compressibilité pour des accroissements égaux de pression. On voit que les contractions les plus fortes sont aux contractions les plus faibles comme 138 : 128.

En réduisant ces mesures en millionièmes et en ramenant les indications du manomètre à la pression de $0^m,760$ et à 10° de température, on trouve, après avoir corrigé l'influence du verre, que la compressibilité spécifique de l'alcool anhydre varie avec la pression, et qu'elle est en moyenne de :

94,5 millionièmes de 1 à 2 atmosphères ;

92,0 millionièmes de 9 à 10 atmosphères ;

87,5 millionièmes de 21 à 22 atmosphères.

Canton a donné pour la contraction de l'alcool mélangé d'eau à la densité 0,846 un nombre qui, ramené à 0,76 et corrigé de la contraction du verre, donne 68,6 millionièmes. Il aurait été difficile d'en conclure, même approximativement, la compressibilité de l'alcool pur.

IN.

COMPRESSIBILITÉ DE L'ÉTHER SULFURIQUE.

La compression de ce liquide et celle des liquides suivants n'avait pas encore été mesurée ; nous avons employé de l'éther préparé avec beaucoup de soin, et dont la densité à 11°,5 était 0,7245. L'observation des mouvements de la colonne capillaire présente pour ce liquide, comme pour l'alcool, quelques difficultés, parce qu'il adhère en petite quantité aux parois du tube, et surtout parce qu'il faut prolonger la pression pendant plusieurs minutes, pour qu'il ait le temps d'atteindre son véritable degré de contraction : c'est pour cela qu'on n'a opéré qu'à des intervalles de

plusieurs atmosphères. On n'a noté les nombres indiqués dans la seconde colonne des tableaux qu'après s'être assuré par deux lectures faites à intervalles sur l'échelle, que la contraction était arrivée à son dernier terme. Les deux séries d'expériences contenues dans ce paragraphe ont été faites au moyen de deux piézomètres différents; elles indiquent un accroissement notable de compressibilité dans l'éther, quand la température s'est élevée de 0 à 11°,4. Cette différence est beaucoup plus marquée pour l'éther que pour la plupart des autres liquides.

Nous avons observé un fait singulier, en voulant purger l'éther de nos piézomètres de l'air qu'il contient : c'est qu'à chaque ébullition nouvelle, il se dégage des bulles de gaz, et ces bulles ne disparaissent pas, lors même que le liquide est refroidi à 0°. Le temps nous a manqué pour vérifier la nature de ce gaz.

ÉTHER SULFURIQUE A 0°. — VOLUME PRIMITIF = 117930 DEGRÉS DU TUBE CAPILLAIRE. — TEMPÉRATURE DU MANOMÈTRE = 10°.

ATMOSPHÈRES de 0m,7466.	DEGRÉS de l'échelle.	DIFFÉRENCES de pression.	DIFFÉRENCES de contraction.	CONTRACTIONS par atmosphère.
3	13			
		9	135	15
12	148			
		6	84	14
18	232			
		6	80	13 $\frac{3}{5}$
24	312			

La diminution de compressibilité est très-sensible dans ce tableau, puisqu'elle varie dans le rapport de 15 à 13 $\frac{3}{5}$. Ces deux nombres réduits à la pression 0,76 de mercure à 10° donnent pour la contraction apparente 130 à 118 $\frac{1}{2}$ millionièmes, et en

ajoutant à ces nombres la fraction 1,65 millionièmes, on a pour mesure de la compression réelle de l'éther à 0° :

De 3 à 12 atmosphères, 120 millionièmes ;

De 18 à 24 atmosphères, 131,6 millionièmes à très-peu près.

L'inconvénient que nous avons indiqué de l'adhésion d'une petite quantité de liquide aux parois du tube introduit quelque incertitude sur cette mesure, mais la plus grande erreur produite par cette cause ne dépasse pas 3 ou 4 millionièmes.

Les liquides deviennent plus compressibles quand leur température s'élève; cette différence est surtout très-marquée pour l'éther sulfurique : c'est ce que montrent les résultats suivants, obtenus à la température de 11°,4.

ÉTHER SULFURIQUE A 11°,4. — VOLUME PRIMITIF = 198,170 DEGRÉS. — TEMPÉRATURE DU MANOMÈTRE = 9°.

ATMOSPHÈRES de 0m,7466.	DEGRÉS de l'échelle.	DIFFÉRENCES de pression.	DIFFÉRENCES de contraction.	CONTRACTIONS par atmosphère.
1	658			
		2	59	29 $\frac{1}{2}$
3	599			
		3	86	28 $\frac{2}{3}$
6	513			
		6	169	28 $\frac{1}{6}$
12	341			
		6	164	27 $\frac{1}{3}$
18	180			
		6	162	27
24	18			

A trois atmosphères, la compression est égale à 28 $\frac{1}{3}$ degrés ; de 20 à 24 atmosphères, elle n'est plus que de 27 degrés : en réduisant les pressions en atmosphères de 0m,76 de mercure à 10°, et

les degrés de contraction en millionièmes du volume primitif, on trouve que la compression apparente décroît de 146 à 138 millionièmes : ajoutant à ces deux nombres 1,65 pour le verre, on obtient pour limites de la compressibilité de l'éther à 11°,4 entre 2 et 24 atmosphères les nombres 140 et 148 millionièmes à très-peu près.

Ainsi, lorsque la température de l'éther sulfurique s'élève de 0° à 11°,4, sa compressibilité augmente à peu près dans le rapport de 12 à 14.

L'augmentation de compressibilité qui résulte de l'élévation de température a été signalée par Canton, qui l'avait observée pour l'huile d'olive et pour l'alcool mélangé d'eau.

V.

COMPRESSIBILITÉ DE L'ACIDE SULFURIQUE LIQUIDE.

Nous avons employé, pour cette détermination, de l'acide sulfurique hydraté très-concentré : sa densité était à très-peu près 1,848 à 15°. La résistance que ce liquide oppose à la compression est moindre que celle qu'on aurait dû lui supposer d'après sa densité et d'après les résultats obtenus sur d'autres liquides.

ACIDE SULFURIQUE CONCENTRÉ À 0°. — VOLUME PRIMITIF = 152655 DEGRÉS. — TEMPÉRATURE DU MANOMÈTRE = 8°,5.

ATMOSPHÈRES de 0m,7466.	DEGRÉS de l'échelle.	DIFFÉRENCES de pression.	DIFFÉRENCES de contraction.	CONTRACTION pour une atmosphère.
1	324			
		3	14	$4\frac{2}{3}$
4	310			
		4	17	$4\frac{1}{4}$
8	293			
		4	17	$4\frac{1}{4}$
12	276			
		4	17	$4\frac{1}{4}$
16	259			
	RETOUR.			
16	259			
		4	17	$4\frac{1}{4}$
12	276			
		4	$16\frac{1}{2}$	$4_{\,8}$
8	$292\frac{1}{2}$			
		4	$17\frac{1}{2}$	$4\frac{5}{8}$
4	310			
		3	$13\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$
1	$323\frac{1}{2}$			

On peut adopter $4\frac{1}{4}$ pour valeur de la contraction moyenne pour une atmosphère de $0^m,7466$, l'air du manomètre étant à la température de $8°\frac{1}{2}$. On déduit de là que la contraction doit être à très-peu près égale à 4,37 degrés de l'échelle, pour une atmosphère de $0^m,76$ de mercure, l'air du manomètre étant porté à la température de 10°.

Or le volume du réservoir du piézomètre, plus celui du liquide contenu dans le tube capillaire, comprend 152655 degrés de ce tube : ainsi, en divisant 4,37 par 152655, on aura la contraction de l'acide sulfurique à 0° égale à 28,6 millionièmes ; en lui

ajoutant celle du verre 1,65, on aura pour sa contraction réelle, 30,25 millionièmes.

La dilatation de l'acide sulfurique de 0° à 100° est de 0,0588; son point d'ébullition étant à plus de 300°, sa dilatation entre ces limites 0 et 100 doit être assez uniforme. En la supposant toujours la même pour chaque accroissement de température d'un degré, la condensation de l'acide sulfurique pour un abaissement de température d'un degré sera 0,000588. On voit qu'elle est équivalente à celle qui serait produite par une compression de 20 atmosphères.

VI.

COMPRESSIBILITÉ DE L'ACIDE NITRIQUE À 0°.

L'acide nitrique sur lequel nous avons opéré était parfaitement pur, mais il n'était pas très-concentré. Nous avons trouvé sa densité égale à 1,403 à 0°. Nous avons préféré le prendre à cette densité, pour éviter sa décomposition trop rapide par la lumière, et pour qu'il pût être conservé sans altération dans le piézomètre.

Un autre motif de ce choix, c'est que les expériences sur la dilatation et la chaleur spécifique de ce liquide ont été faites sur de l'acide ayant ce degré de densité. Pour empêcher qu'il ne pût absorber de l'humidité, nous avons introduit dans le tube capillaire une goutte de carbure de soufre, qui servait en même temps d'index.

ACIDE NITRIQUE À 0°. — DENSITÉ 1,403. — VOLUME PRIMITIF DU LIQUIDE = 214960 DEGRÉS. — TEMPÉRATURE DU MANOMÈTRE = $8\frac{1}{2}$.

ATMOSPHÈRES de 0m,7446.	DEGRÉS de l'échelle.	DIFFÉRENCES de pression.	DIFFÉRENCES de contraction.	CONTRACTIONS pour une atmosphère.
1	607, 5			
		3	20	$6\frac{2}{3}$
4	587			
		4	27	$6\frac{3}{4}$
8	560			
		4	27	$6\frac{3}{4}$
12	533			
		4	27	$6\frac{3}{4}$
16	506			
		16	109	$6\frac{10}{10}$
32	397			
	RETOUR.			
32	397			
		16	$108\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$
16	$505\frac{1}{2}$			
		4	26	$6\frac{5}{6}$
12	$532\frac{1}{2}$			
		4	$27\frac{1}{2}$	$6\frac{8}{8}$
8	559			
		4	27	$6\frac{3}{4}$
4	586			
4	588			
		12	81	$6\frac{3}{4}$
16	507			

La contraction moyenne est à très-peu près égale à 6,75 degrés du tube capillaire, ce qui fait 32,2 millionièmes pour la contraction apparente sous la pression d'une colonne de mercure de 0m,760 à 10° : ajoutant à ce nombre la contraction de l'enveloppe, on trouve la compressibilité spécifique de l'acide nitrique (dont la densité est 1,403) = 33,85 millionièmes.

VII.

COMPRESSIBILITÉ DE L'EAU QUI CONTIENT DU GAZ AMMONIAC.

Jusqu'ici nous avons vu la compressibilité s'accroître à mesure que la densité diminue, et cette loi se vérifie pour les six liquides dont nous avons donné les tableaux de compressibilité. L'eau saturée de gaz ammoniac présente sous ce rapport une anomalie remarquable; cette solution a une densité moindre que celle de l'eau pure, et à 10° centigrades la densité de ce liquide saturé de gaz n'est que 0,9. C'est à cette densité que nous avons pris la solution dont nous avons rempli un piézomètre, en employant le procédé déjà décrit en détail à l'occasion des expériences sur l'eau saturée d'air. L'inspection des deux tableaux suivants nous donne, pour la compressibilité de cette solution, un nombre beaucoup plus faible que pour l'eau pure, et très-peu différent de celui qui représente la compressibilité de l'acide nitrique.

EAU ET GAZ AMMONIAC À 10° C. — VOLUME PRIMITIF DU LIQUIDE = 389360 DEGRÉS. — TEMPÉRATURE DU MANOMÈTRE = 10°.

ATMOSPHÈRES.	DEGRÉS de l'échelle.	DIFFÉRENCES de pression.	DIFFÉRENCES de contraction.	CONTRACTIONS pour une atmosphère.
1	580			
		3	46	15 $\frac{1}{3}$
4	534			
		4	53	13 $\frac{1}{4}$
8	481			
		2 $\frac{1}{2}$	38	13 $\frac{2}{3}$
10 $\frac{1}{6}$	443			
		5 $\frac{1}{4}$	68	13
16	375			
	RETOUR.			
16	378			
		5 $\frac{1}{4}$	65 $\frac{1}{2}$	12 $\frac{1}{2}$
10 $\frac{5}{6}$	443 $\frac{1}{2}$			
		2 $\frac{3}{4}$	37 $\frac{1}{2}$	13 $\frac{1}{2}$
8	481			
		4	52	13
4	533			
		3	46	15 $\frac{1}{3}$
1	579			

BIS.

ATMOSPHÈRES.	DEGRÉS de l'échelle.	DIFFÉRENCES de pression.	DIFFÉRENCES de contraction.	CONTRACTIONS pour une atmosphère.
4	534			
		4	53	13 $\frac{1}{4}$
8	481			
		2 $\frac{3}{4}$	37	13
10 $\frac{5}{6}$	444			
		5 $\frac{1}{4}$	66	12 $\frac{1}{2}$
16	378			

Ces deux tableaux nous offrent une diminution très-marquée de compressibilité à mesure que la pression augmente; l'accord de ces deux séries ne permet pas de soupçonner une erreur d'observation; le piézomètre employé à cette expérience avait un tube capillaire parfaitement cylindrique dans toute la longueur occupée par l'échelle; ce liquide est d'ailleurs facile à observer, parce qu'il ne se divise pas dans la colonne capillaire comme l'éther sulfurique, le carbure de soufre, etc.

En admettant $13\frac{1}{6}$ pour la contraction moyenne produite par les premières atmosphères, on trouve que la contraction est égale à 34 millionièmes pour une atmosphère de $0^m,76$ de mercure à 10°, ce qui donne $36\frac{1}{6}$ millionièmes pour la contraction vraie. La vitesse de transmission du son dans ce liquide serait, d'après ces nombres, de 1765 mètres par seconde.

VIII.

COMPRESSIBILITÉ DE L'ÉTHER NITRIQUE À 0°.

La dilatation des liquides étant en général très-grande et sujette à varier lorsqu'ils approchent de leur point d'ébullition, nous aurions supposé que la contraction de l'éther nitrique, dont le point d'ébullition est à 21°, aurait offert des différences sensibles pour diverses pressions. Cependant la tableau suivant ne donne qu'une diminution assez faible de compressibilité.

VOLUME PRIMITIF = 197740 DEGRÉS. — TEMPÉRATURE DU MANOMÈTRE = 10°.

ATMOSPHÈRES de 0m,7466.	DEGRÉS de l'échelle.	DIFFÉRENCES de pression.	DIFFÉRENCES de contraction.	CONTRACTIONS pour une atmosphère.
1	444 $\frac{1}{2}$			
		5	99 $\frac{1}{2}$	13 $\frac{9}{10}$
6	375			
		6	80 $\frac{1}{4}$	13 $\frac{1}{3}$
12	293 $\frac{3}{4}$			
		6	81 $\frac{1}{4}$	13 $\frac{1}{2}$
6	372 $\frac{1}{4}$			
		12	162	13 $\frac{1}{2}$
18	213			
		6	80	13 $\frac{3}{4}$
24	133			

La contraction moyenne est 13,5, d'où résulte 13,74 pour une atmosphère de 0m,76; ce qui fait 68,2 millionièmes pour une atmosphère à 10° de 0m,76 de mercure. La contraction réelle est égale à 70,1 millionièmes.

IX.

ÉTHER ACÉTIQUE À 0°. — VOLUME PRIMITIF = 233,900 DEGRÉS DU TUBE CAPILLAIRE. — TEMPÉRATURE DU MANOMÈTRE 12°.

ATMOSPHÈRES.	DEGRÉS de l'échelle.	DIFFÉRENCES d'atmosphère.	DIFFÉRENCES de contraction.	CONTRACTIONS pour une atmosphère.
1	520			
4	468	3	52	17 1/3
8	401	4	67	16 3/4
0 3/5	353 1/2	2 2/5	47 1/2	17 3/4
16	272	5 1/5	81 1/2	15 1/4
	RETOUR.			
16	272			
8	399	8	127	15 7/8
4	468	4	69	17 1/4
1	520	3	53	17 1/3
	BIS.			
4	468			
8	398	4	70	17 1/2
16	270	8	128	16

Quoique les nombres qui expriment les contractions de l'éther acétique à des degrés variables de pression présentent quelques différences, cependant on voit que ces erreurs se corrigent mutuellement, et l'inspection des résultats comparés à de fortes et

faibles pressions indique une diminution sensible de compressibilité à peu près dans le rapport de 17 à 15,7.

Les contractions réduites à une atmosphère à 10° de $0^m,76$ de mercure varient de 76 à 68 millionièmes. En y ajoutant celle du verre 1,65, on aura les contractions réelles 77 2/3 et 69 2/3 millionièmes.

X.

ÉTHER HYDRO-CHLORIQUE À 11°,2. — VOLUME PRIMITIF = 255,340 DEGRÉS. — THERMOMÈTRE DU MANOMÈTRE À 8°.

ATMOSPHÈRES.	DEGRÉS de l'échelle.	DIFFÉRENCES de pression.	DIFFÉRENCES de contraction.	CONTRACTIONS pour une atmosphère.
1	383			
3	341	2	42	21
6	280	3	61	$20\frac{1}{3}$
12	159, 5	6	120, 5	$20\frac{1}{12}$
		RETOUR.		
6	280			
3	340, 5	3	60, 5	$20\frac{1}{6}$
1	383	2	22, 5	$21\frac{1}{4}$

On sait que l'éther hydro-chlorique bout à 12°. Il nous a paru intéressant de mesurer la contraction que subit ce liquide lorsque sa température est très-rapprochée de son point d'ébullition.

De 1 à 3 atmosphères la contraction est de 82,6 millionièmes;

De 6 à 12 atmosphères la contraction moyenne est de 78,95 millionièmes.

En ajoutant la contraction du verre, on aura la contraction réelle du liquide 84 1/3 et 80 2/3 millionièmes.

XI.

ACIDE ACÉTIQUE À 0°. — VOLUME PRIMITIF = 239,060 DEGRÉS. — THERMOMÈTRE DU MANOMÈTRE À 9°,7.

ATMOSPHÈRES.	DEGRÉS de l'échelle.	CONTRACTIONS pour une atmosphère.
4	252	
8	289	$9\frac{1}{4}$
$10\frac{2}{5}$	315	$9\frac{3}{4}$
16	363	9
	RETOUR.	
16	364	
$10\frac{2}{5}$	316	9
8	291	$9\frac{3}{8}$
4	254	$9\frac{1}{4}$

Si l'on prend 9 1/4 pour la contraction moyenne du liquide, on aura la contraction pour une atmosphère de $0^m,76$ de mercure à 10°, égale à 39 millionièmes, et, faisant la correction du verre, on aura la compressibilité absolue = 40 2/3 millionièmes.

Nous avons pensé que les résultats des quatre tableaux précédents méritaient d'être ajoutés à ceux obtenus pour les autres

liquides, quoique la composition des corps auxquels ils se rapportent ne soit pas encore déterminée avec la même précision que celle des liquides qui les précèdent (1). Ces tableaux donneront une notion suffisamment exacte de la compressibilité de ces liquides, jusqu'à l'époque où la chimie aura fourni de bons procédés pour la vérification de leur parfaite identité.

XII.

EAU DE MER.

Nous nous sommes procuré de l'eau de mer puisée dans la Manche entre le Havre et la côte d'Angleterre; nous avons trouvé que la densité de cette eau, prise au mois de décembre 1826, près de la surface, était égale à 1,022 à 100. La compressibilité de cette eau a été déterminée par les expériences suivantes.

EAU DE MER À 12°,4. — VOLUME PRIMITIF = 154,200 DEGRÉS. — TEMPÉRATURE DU MANOMÈTRE 10°.

ATMOSPHÈRES de 0m,7466.	DEGRÉS de l'échelle.	DIFFÉRENCES de pression.	DIFFÉRENCES de contraction.	CONTRACTIONS pour une atmosphère.
1	29			
3	41 $\frac{1}{3}$	2	12 $\frac{1}{3}$	6 $\frac{1}{6}$
6	60 $\frac{1}{2}$	3	19 $\frac{1}{6}$	6 $\frac{1}{3}$
18	134	12	73 $\frac{1}{2}$	6 $\frac{1}{8}$
24	170 $\frac{3}{4}$	6	36 $\frac{3}{4}$	6 $\frac{1}{8}$
18	134	6	36 $\frac{3}{4}$	6 $\frac{1}{8}$
6	60 $\frac{1}{2}$	12	73 $\frac{1}{2}$	6 $\frac{1}{8}$
1	29 $\frac{1}{2}$	5	31	6 $\frac{1}{2}$

(1) Ces quatre liquides avaient été préparés par M. Robiquet; ce chimiste a eu la complaisance, sur la demande de M. Dumas et d'après nos propres instances, de faire préparer avec soin quelques échantillons de ces corps pour nos expériences de compression.

La contraction moyenne est de 6,14 degrés; elle serait de 6,25 pour une atmosphère de $0^m,76$. On trouve que la contraction apparente est égale à 40,5, ce qui donne pour la contraction réelle de cette eau 42,15 millionièmes. On sait d'ailleurs que la densité de l'eau de la mer varie dans les différents lieux et selon la profondeur à laquelle elle a été puisée; ainsi ce nombre ne peut être considéré que comme une mesure particulière, puisque de très-petites quantités de matières étrangères dissoutes dans l'eau peuvent modifier beaucoup sa compressibilité.

XIII.

CARBURE DE SOUFRE.

D'après plusieurs expériences la compression du carbure de soufre = 78 millionièmes environ à 0°; cependant nous ne donnons ce nombre que comme une approximation. Nous avons mesuré à diverses reprises la compressibilité de ce liquide, et ces différentes mesures nous ont offert des anomalies, qui ne nous permettent pas de fixer encore d'une manière précise la compressibilité spécifique de ce liquide. Son adhésion aux parois et les altérations chimiques qu'il éprouve contribuent à ces irrégularités.

XIV.

ESSENCE DE TÉRÉBENTHINE.

Les expériences sur ce liquide ne peuvent être faites avec une très-grande précision, parce qu'il adhère aux parois du tube par suite de sa viscosité, et qu'il n'arrive pas immédiatement au point que son extrémité doit atteindre. Nous avons réussi à neutraliser sensiblement cet effet, en fixant pendant très-longtemps le mano-

mètre a 16, 18 et 24 atmosphères, jusqu'à ce que l'extrémité de la colonne demeurât parfaitement immobile.

ESSENCE DE TÉRÉBENTHINE À 0°. — VOLUME PRIMITIF = 255,340 DEG. — THERMOMÈTRE DU MANOMÈTRE À 8°.

ATMOSPHÈRES de 0m,7466.	DEGRÉS de l'échelle.	DIFFÉRENCES de pression.	DIFFÉRENCES de contraction.	CONTRACTIONS pour une atmosphère.
1	703			
4	640	3	63	21
8	570	4	70	17 1/2
12	503	4	68	17
16	432	4	70	17 1/2
	RETOUR.			
16	432			
12	502	3	70	17 1/2
8	571	4	69	17 1/4
4	641	4	70	17 1/2
1	704	4	63	21

En adoptant 17,33 pour contraction moyenne, on trouve 69,7 millionièmes pour la pression normale d'une atmosphère à 10° de 0m,76 de mercure. La contraction réelle est par conséquent = 71,35 millionièmes.

DEUXIÈME PARTIE.

§ I.

CHALEUR DÉGAGÉE PAR LA COMPRESSION DES LIQUIDES.

Les phénomènes de chaleur qui résultent de la compression des corps ont attiré depuis quelques années l'attention de plusieurs géomètres et physiciens. La connaissance de ces phénomenes se lie aux questions les plus importantes de la physique, et pourrait conduire à des conséquences d'un haut intérêt sur la nature de la chaleur, et sur les rapports qui existent entre ce fluide et les différents corps.

Ces recherches ont encore acquis une nouvelle importance pour les géomètres depuis que M. Laplace en a montré l'application à la théorie du son, et a prouvé qu'en tenant compte de la chaleur dégagée dans la compression de l'air on fait coïncider la formule mathématique du son avec les résultats fournis par l'expérience.

Les phénomènes du dégagement de la chaleur par la compression des gaz nous sont presque entièrement connus, grâce aux travaux de M. Gay-Lussac, de MM. Clément et Desormes et aux recherches plus récentes de MM. de Larive et Marcet.

On doit à MM. Berthollet et Pictet des observations sur l'élévation de température qui résulte de la compression des métaux dans le frappé des médailles; Rumfort et M. Morosi ont fait des recherches sur la chaleur dégagée par le frottement des métaux; mais, vu l'extrême difficulté de ce genre d'expériences, il est bien peu probable que l'on parvienne à des résultats bien précis.

Quant au dégagement de la chaleur qui semble devoir accompagner la compression des liquides, il n'a point encore été reconnu

d'une manière directe; les seules expériences qui aient été faites jusqu'ici sur ce sujet sont celles de M. Desaigne et celle que M. Œrsted a consignée dans son mémoire sur la compressibilité de l'eau.

Le premier a annoncé, dans une note insérée dans le Bulletin de la société philomatique, qu'il est parvenu à dégager de la lumière de plusieurs liquides, en les soumettant à une compression forte et subite. M. Œrsted dit (*Annales de chimie et de physique*, tome XXII) avoir essayé vainement de produire de la chaleur par une compression de l'eau égale à 6 atmosphères. Il était douteux, d'après son expérience, que l'on pût parvenir à mesurer avec exactitude le dégagement de chaleur que doit produire la compression des liquides. Il fallait même, pour pouvoir espérer de la rendre sensible, employer un appareil où l'on pût reconnaître de très-faibles degrés de chaleur, et qui fût capable en même temps de résister à des pressions et à des chocs considérables. Celui que nous avons adopté nous paraît satisfaire à la fois à ces deux conditions. Il consiste (planche II, figure 3) en un ballon de verre B, dont la capacité intérieure est d'environ $\frac{5}{4}$ de litre, et dont les parois, épaisses de 25 à 35 millimètres, peuvent supporter des compressions rapides d'un grand nombre d'atmosphères. Au centre de ce ballon est suspendue la spirale *t* d'un thermomètre de Bréguet; une portion de cadran *a*, placée au-dessous, sert à mesurer les déviations de l'aiguille. Ce thermomètre se trouve ainsi plongé dans une masse suffisante de liquide, et il est impossible que la température de celui-ci puisse varier sans qu'on n'en soit averti à l'instant même.

La résistance du liquide rend l'observation de ce thermomètre beaucoup plus facile qu'elle ne l'est dans les gaz, où les oscillations de l'aiguille sont difficiles à observer. Le ballon ayant été rempli avec de l'eau distillée, privée d'air par l'ébullition, nous l'avons vissé à une pompe de compression fixée solidement à un étau. Pour connaître d'abord l'effet d'une compression lente sur la température du liquide, nous nous sommes servis d'un tour à vis sans

fin F, adapté au cylindre de la pompe. En comprimant l'eau du ballon jusqu'à 36 atmosphères, nous avons observé une déviation de l'aiguille du thermomètre, mais en sens contraire de celle qu'aurait produite un accroissement de température. Cette déviation était d'environ un degré de la division du thermomètre pour 12 atmosphères. Elle s'explique très-bien par l'inégale compressibilité des deux métaux qui le composent. N'ayant pas d'expérience précise sur la mesure de la compressibilité du platine, nous ne pouvons décider si la déviation était exactement ce qu'elle devait être d'après l'inégale compressibilité de ce métal et de l'argent, ou si elle était diminuée par un très-petit accroissement de température. Cependant, si l'on fait attention que pour le plus grand nombre des métaux, une différence de pression d'au moins 15 atmosphères ne produit qu'une contraction qui équivaut tout au plus au changement de volume produit par un abaissement de température d'un seul degré, on en pourra conclure avec certitude qu'une compression lente de 36 atmosphères ne produit pas un changement de température d'un seul degré. Pensant que la rapidité de la compression pouvait avoir quelque influence, nous avons supprimé la vis sans fin du tour, et nous nous sommes servis d'un levier L pour opérer cette compression. Par ce moyen, nous pouvions produire une pression de 30 atmosphères en moins d'un quart de seconde. Les déviations de l'aiguille ont été exactement les mêmes et dans le même sens que pour une compression plus lente. Cependant, comme cette compression ne pouvait pas être considérée comme instantanée, nous avons fait des expériences semblables en faisant frapper sur le piston à coup de marteau. Indépendamment des légères oscillations imprimées à l'aiguille du thermomètre par l'action du choc, nous avons encore observé une déviation constante et négative, quoique les coups de marteau eussent été assez forts pour refouler beaucoup le métal à l'extrémité de la tige du piston.

En répétant ces expériences sur l'alcool, nous avons obtenu des résultats semblables ; seulement, la déviation nous a paru

moindre, et même les coups de marteau paraissaient occasionner une légère déviation en plus sur le thermomètre.

L'éther sulfurique était le liquide le plus propre à rendre sensible un dégagement de chaleur, puisque sa compressibilité est presque triple de celle de l'eau. En conséquence, nous avons remplacé l'alcool par de l'éther à 64 degrés.

Les compressions lentes de 30 et 36 atmosphères n'ont eu presque aucune influence sur le thermomètre ; l'aiguille a paru presque stationnaire, et la contraction de l'hélice a été sensiblement nulle ; ce qui indiquait que la chaleur dégagée devait être de 1 à 2 degrés. Mais lorsque nous avons substitué à ces moyens de compression le choc des coups de marteau, l'aiguille a indiqué une élévation moyenne de température d'environ 4 degrés du thermomètre.

Nous avions déjà reconnu cette élévation de température dans des expériences précédentes, faites avec des pressions subites de 40 atmosphères, au moyen du même ballon auquel était adapté un récipient plein d'air comprimé S (figure 4), muni d'un manomètre *m* et d'un robinet R, pour établir subitement la communication ; les résultats que nous avions obtenus n'avaient pas différé beaucoup de ceux qu'ont produits les coups de marteau. Ce moyen a l'avantage d'occasionner une pression parfaitement déterminée, et qui ne varie point pendant l'expérience ; cependant, comme il est difficile de comprimer l'air à de si hautes pressions, et que l'effort nécessaire pour ouvrir subitement le robinet agitait l'aiguille presque autant que les coups de marteau, nous avons employé préférablement la pompe de compression. Si l'on essaie des expériences analogues, en remplaçant le thermomètre Breguet par de petits thermomètres à mercure très-sensibles, ouverts à leur extrémité supérieure, on observe presque constamment une élévation de la colonne capillaire, qui paraît indiquer des accroissements sensibles de température ; mais nous avons reconnu que cette élévation provient de l'inégale compression que supporte la boule au dedans et au dehors, parce que le frottement de la co-

lonne de mercure dans le tube capillaire empêche la compression de se transmettre instantanément au liquide que contient la boule du thermomètre.

Il nous paraît démontré par ces expériences, 1° que la température de l'eau ne s'élève pas sensiblement par une compression subite de 40 atmosphères ; 2° que, pour l'alcool et l'éther sulfurique, une compression de 36 et 40 atmosphères, opérée dans plus d'un quart de seconde, n'élève pas leur température de plus d'un ou deux degrés centigrades ; mais qu'une compression plus puissante, telle que celle que peut produire un coup de marteau, opérée sur l'éther sulfurique, dégage assez de chaleur pour élever sa température d'environ quatre degrés centigrades.

Nous donnerons à la fin de ce Mémoire une nouvelle preuve du peu de chaleur dégagée dans une compression rapide de l'eau, déduite de la comparaison de la vitesse du son, observée dans ce liquide, avec celle que donne la formule de MM. Laplace et Poisson, indépendamment de toute élévation de température. Cette comparaison nous offrira une vérification précieuse des expériences comprises dans cet article.

Il est sans doute difficile de concilier en théorie ces résultats positifs avec les expériences de M. Desaigne ; mais rien n'autorise à affirmer que la lumière, que ce physicien dit avoir observée dans ces liquides par des compressions très-puissantes, soit l'indice d'une haute élévation de température. Il faut ranger ce phénomène dans la même classe que celui du dégagement de lumière produit par la compression de quelques corps solides, des quartz, par exemple, qui, lorsqu'on les choque dans l'obscurité, paraissent lumineux, sans que pour cela leur température s'élève sensiblement, lors même qu'on réitère plusieurs fois ce choc.

§ II.

RECHERCHES SUR L'INFLUENCE DE LA COMPRESSION SUR LA CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE.

Pour ces recherches (voyez planche II, figure 5), nous avons pris des tubes de verre *a b*, longs d'environ 3 décimètres, fermés aux deux bouts ; aux extrémités *a* et *b* étaient soudés à la lampe des fils de platine communiquant à l'intérieur, et destinés à y faire passer le courant. La compression se transmettait au liquide contenu dans ce tube par le moyen d'un second tube *d*, soudé au milieu du premier et perpendiculairement à sa longueur, de manière à former une figure semblable à celle d'un *T*. C'est au moyen de ce second tube qu'on remplissait l'appareil du liquide. On l'adaptait ensuite à une pompe de compression C D, munie d'un manomètre *m m*.

Au moyen de cet appareil, le liquide qui transmettait le courant pouvait être comprimé sans qu'aucune cause autre que la compression pût influer sur sa conductibilité. Pour avoir un courant d'une intensité sensiblement constante pendant le temps nécessaire pour une expérience, nous avons employé une pile à auges P, chargée avec de l'eau pure ou légèrement salée. Une des extrémités correspondait à un galvanomètre *g* à deux aiguilles, dont le fil se trouvait compris dans le circuit. On réglait d'abord la pile de manière qu'en complétant le circuit avec le liquide introduit dans le tube, la déviation du galvanomètre fût au moins de 15 degrés plus faible que celle qu'on obtenait en le complétant avec du mercure. On était donc sûr que cette diminution de 15 degrés était due à l'imparfaite conductibilité du liquide soumis à l'expérience, et qu'elle était suffisante pour que l'on pût apprécier de très-petites différences de conductibilité. En effet, nous nous servions d'un galvanomètre dont l'aiguille supérieure portait un fil de verre très-

fin qui mesurait les déviations sur un arc de cercle de trois pouces de rayon, et donnait très-facilement des quarts de degrés.

Un de nos appareils ayant été rempli d'eau distillée, on y fit passer un courant qui fit dévier l'aiguille de 22 degrés. En supprimant cette colonne d'eau intermédiaire, et la remplaçant par du mercure, la déviation s'éleva à 76°. Dans ce cas, la différence de déviation due au peu de conductibilité de l'eau était de 54°.

Voici le tableau des déviations observées pour des pressions de 5, 10, 20, 30 atmosphères :

	ATMOSPHÈRES.	DEGRÉS DE DÉVIATION.
EAU PURE.	1	$22\frac{5}{4}$
	5	$22\frac{5}{4}$
	10	$22\frac{1}{4}$
	20	23
	30	23

On voit par ce tableau que le rapprochement des molécules de l'eau, dû à la compression de liquide, n'a pas une influence bien sensible sur sa conductibilité. La différence de déviation d'un quart de degré est trop petite pour qu'on puisse en conclure avec certitude une variation de conductibilité. Ce résultat mérite d'autant plus d'être remarqué, que ces 30 atmosphères produisent une contraction équivalente à celle que produirait un abaissement de température de 3 degrés, et qu'une telle diminution de chaleur fait varier sensiblement la conductibilité de l'eau.

Une expérience semblable, faite avec une dissolution concentrée d'ammoniaque, a donné le même résultat, c'est-à-dire que la déviation du galvanomètre était sensiblement la même lorsque le courant traversait ce liquide comprimé ou non comprimé.

En faisant passer le courant au travers d'une longue colonne de mercure contenue dans un tube capillaire, nous n'avons pu également obtenir aucune variation de conductibilité. Il n'en a pas été de même pour l'acide nitrique. Nous avons trouvé, en le comprimant, que la déviation de l'aiguille diminue d'une quantité notable, comme le montrent les résultats suivants déduits de trois expériences.

	ATMOSPHÈRES.	DEGRÉS DE DÉVIATION.
ACIDE NITRIQUE.	1	47
	5	47
	10	46 $\frac{1}{4}$
	20	46
	30	44 $\frac{1}{4}$

Lorsqu'on supprimait la colonne d'acide nitrique, et qu'on la remplaçait par une goutte de mercure, la déviation s'élevait à 63°. La différence de 16° provenait par conséquent de la conductibilité imparfaite de l'acide nitrique. La diminution de conductibilité dans cet acide, lorsqu'il est soumis à de fortes pressions, ne nous paraît pas provenir de l'obstacle que pourrait opposer au passage de l'électricité le rapprochement de ses particules, puisque, dans les liquides plus compressibles, tels que l'eau pure et l'eau saturée d'ammoniaque, ce rapprochement n'influe pas sur la conductibilité. Il nous semble que ce phénomène doit être attribué à une autre cause, c'est-à-dire au changement que l'accroissement de pression produit dans la force d'affinité des éléments du liquide.

On ne peut expliquer plusieurs phénomènes de conductibilité dans les corps liquides, par exemple, le peu d'intensité d'un courant qui passe à travers de l'eau pure, et l'accroissement considérable

de cette intensité par l'addition d'une très-petite quantité d'un acide, d'une base ou d'un sel soluble, qu'en admettant, avec plusieurs chimistes et physiciens célèbres, que cette transmission du courant s'opère par une suite de compositions et de décompositions successives. Il y a, sans doute, dans tous les cas, une portion de l'électricité qui est transmise par le corps liquide, indépendamment de toute action chimique. Ainsi, dans le mercure, on ne peut soupçonner aucune composition et décomposition possible. L'eau parfaitement pure conduit l'électricité à haute tension, sans aucune séparation de ses éléments. Mais, pour des liquides non métalliques, et lorsque la force électro-motrice qui produit le courant n'a qu'une faible tension, la plus grande partie de l'électricité se transmet à travers le liquide par le transport des molécules électro-positives et électro-négatives. La facilité de décomposition doit alors influer d'une manière puissante sur l'intensité du courant, et cette intensité diminuera si une nouvelle cause vient mettre obstacle à la séparation des éléments. Il nous paraît probable que c'est à cette cause que tient la diminution que nous avons observée dans la déviation du galvanomètre, lorsque l'acide nitrique, qui transmettait l'électricité, était soumis à de fortes pressions. En effet, il a été bien établi, par les recherches de M. Hall et plusieurs autres qui ont été faites depuis, qu'une forte pression diminue ou empêche la décomposition d'un grand nombre de substances, surtout lorsqu'elles contiennent des éléments gazeux. Il est donc possible que la décomposition rapide de l'acide nitrique par le courant de la pile ait été ralentie par la compression, et qu'il en soit résulté une diminution dans l'intensité du courant. Si telle est réellement la cause de cette diminution de conductibilité dans l'acide nitrique comprimé, il est probable que le même phénomène a lieu pour l'eau distillée ou chargée d'ammoniaque, mais que, vu son peu de conductibilité, la différence ne peut être mesurée.

De l'observation générale des principaux faits mentionnés dans cet article nous croyons pouvoir conclure qu'une pression de 30 atmosphères ne change pas d'une manière sensible la conducti-

bilité électrique du mercure d'une solution concentrée d'ammoniaque et de l'eau distillée ; qu'elle produit une diminution dans la conductibilité de l'acide nitrique, et que cet effet peut s'expliquer par l'obstacle que la pression oppose à sa décomposition

TROISIÈME PARTIE.

§ I.

VITESSE DU SON DANS LES LIQUIDES.

On sait depuis longtemps que le son se transmet à travers les corps solides et liquides, comme dans l'air et dans les fluides aériformes. La connaissance du degré de compressibilité de l'eau ou de tout autre liquide donne le moyen de déterminer la vitesse avec laquelle le son doit s'y propager. MM. Young et Laplace ont signalé cette application importante. Ils ont donné la formule à l'aide de laquelle, connaissant le degré de contraction qu'éprouve un liquide pour un accroissement donné de pression, on peut calculer la vitesse de la propagation du son dans une masse indéfinie de ce liquide. On calcule également par la même formule la vitesse du son dans les corps solides, pourvu que l'on connaisse la contraction qu'éprouve leur volume pour une pression donnée. M. Poisson a traité cette question dans un savant mémoire qui fait partie de ceux de l'Institut pour 1819 (pages 396-400). On y trouve la démonstration développée de la formule dont il s'agit.

La théorie étant aussi complète qu'elle peut l'être, il ne restait plus qu'à la comparer avec l'expérience, soit afin de vérifier l'une par l'autre, soit afin de découvrir la différence qui pouvait exister entre elles. Nous avons donc entrepris une suite d'expériences sur la vitesse du son dans l'eau, seul liquide où de telles expériences soient possibles, dans le dessein de comparer la vitesse observée avec la formule théorique qui doit la représenter.

On verra plus loin le détail de nos moyens d'expériences et de

nos résultats; mais avant de les exposer, il nous paraît convenable de rappeler sommairement les points principaux de la théorie du son, et particulièrement la formule qui sert à calculer sa vitesse dans les substances liquides ou solides.

Newton est, comme on sait, le premier qui ait recherché les lois de la propagation du son dans l'atmosphère. Il considère une ligne indéfinie de molécules d'air, et suppose qu'une portion de petite étendue de cette ligne d'air soit primitivement ébranlée; il montre que cet ébranlement se propage de proche en proche dans toutes les tranches de la colonne d'air, comme on voit se faire la communication du mouvement dans une série de billes élastiques, et il détermine le temps que cet ébranlement, qui produit la sensation du son, emploie à parvenir à une distance quelconque de son origine. Il trouve que la propagation du son est uniforme, et que la vitesse de cette propagation supposée horizontale, ou l'espace que le son parcourt dans chaque seconde sexagésimale, a pour valeur la racine carrée du double produit de la hauteur dont la pesanteur fait tomber les corps dans la première seconde, par la hauteur d'une colonne d'air qui ferait équilibre à la colonne de mercure du baromètre, et qui aurait partout la même densité qu'au bas de la colonne.

Lagrange, Euler, Laplace et M. Poisson ont ensuite déduit cette même expression de la vitesse du son des équations analytiques aux différences partielles qui représentent le mouvement de l'air, soit dans une colonne cylindrique d'une longueur indéfinie, soit dans une masse d'air illimitée.

En étendant leurs recherches au cas où le mouvement de l'air se fait suivant deux ou trois dimensions, ils ont trouvé que, quoique l'intensité du son décroisse alors avec la distance, sa vitesse est la même que dans le cas où ce mouvement n'a lieu que suivant une seule dimension. Il résulte de cette théorie que chaque vibration d'une particule d'air produit dans la masse une onde sonore de figure sphérique, d'une épaisseur très-petite, qui se compose de toutes les molécules d'air en mouvement dans un

instant donné, et qui s'éloigne indéfiniment du centre d'ébranlement. Le rayon de cette onde croît proportionnellement au temps écoulé, et c'est son accroissement constant dans l'unité de temps qui mesure la vitesse de propagation du son.

Il existait cependant une différence notable entre la vitesse du son dans l'air déduite de cette théorie et celle qui résulte des expériences. Les physiciens, en très-grand nombre, qui ont mesuré directement cette vitesse, se sont accordés à la trouver plus grande que la vitesse calculée, tellement que la différence s'élève à 1/6 de la valeur observée.

Il serait inutile de rappeler toutes les hypothèses qui ont été faites pour concilier sur ce point le calcul et l'observation.

On doit à M. Laplace la véritable explication de cette différence. Elle doit être attribuée à l'accroissement d'élasticité des molécules d'air produit par le dégagement de chaleur qui accompagne leur compression. En y ayant égard, on détermine la quantité de chaleur rendue sensible dans la production du son employée à augmenter l'élasticité de l'air. M. Poisson a fait voir que si la compression ou la dilatation est de $\frac{1}{116}$, la température doit s'élever ou s'abaisser d'un degré centésimal. Enfin M. Laplace est parvenu à un théorème qui ne laisse plus rien à désirer sur la certitude de son explication. Il a trouvé que la vitesse du son est égale au produit de la valeur que donne la formule de Newton, multipliée par la racine carrée du rapport de la chaleur spécifique sous un volume constant. Ce rapport est un nombre plus grand que l'unité. Pour le déterminer, M. Laplace a fait usage des expériences de M. Gay-Lussac et Welter. La formule de Newton ainsi modifiée s'est trouvée à peu près d'accord avec la vitesse réelle donnée par l'observation.

Le calcul de la vitesse du son et les lois de sa transmission dans les liquides et les solides sont presque les mêmes que dans l'air. Il suffit pour notre objet de rapporter ici la formule qui représente la vitesse du son dans un liquide.

Soit D la densité d'un liquide, K la longueur d'une colonne

cylindrique de ce liquide sous une pression connue, ε la petite diminution de cette longueur pour un accroissement donné de pression P, la vitesse du son dans ce liquide étant désignée par a sera donnée par la formule suivante :

$$a = \sqrt{\frac{PK}{D\varepsilon}}.$$

Supposons que l'on prenne pour P une pression égale au poids de 76 centimètres de mercure, on aura

$$P = (0^m,76).g.m,$$

m désignant la densité du mercure et g la force accélératrice de la pesanteur ou le double de la hauteur dont elle fait tomber les corps dans la première seconde.

La seconde étant prise pour unité de temps, on a

$$g = 9^m,8088.$$

La vérification de ces formules appliquées aux substances liquides et solides exige des expériences très-précises. La terre n'offre pas des masses solides d'une continuité et d'une homogénéité suffisantes pour des expériences de cette nature; il n'est pas probable qu'on parvienne jamais à vérifier en grand les calculs de vitesse relativement aux solides. Les expériences de M. Biot sur la transmission du son par les tuyaux en fonte de fer ont bien appris que sa vitesse surpasse de beaucoup celle de sa transmission par l'air; mais comme le son lui parvenait en moins d'une demi-seconde, on n'en pouvait déduire qu'une évaluation très-incertaine, qui ne pouvait être regardée comme suffisante pour la vérification de la formule.

L'eau nous paraît le seul corps où de telles expériences puissent être faites avec exactitude : il a été reconnu que ce liquide transmet

les sons à de très-grandes distances. Franklin s'était assuré que le bruit de deux cailloux choqués sous l'eau est encore sensible à plus d'un demi-mille. Il ne paraît pas cependant qu'il ait songé à en mesurer la vitesse. La seule expérience qui ait été faite jusqu'ici sur la vitesse du son dans un corps liquide est due à M. Beudant; elle a été faite dans l'eau de la mer, près de Marseille, il y a peu d'années. Voici sur cette expérience quelques détails que ce savant a bien voulu nous communiquer.

Les deux observateurs, éloignés l'un de l'autre d'une distance connue, étaient munis de montres réglées et cheminant exactement ensemble; au moment fixé, celui qui devait produire le son élevait un drapeau et frappait en même temps sur un timbre placé sous l'eau. L'observateur placé à l'autre station était accompagné d'un aide qui nageait près du bateau, entendait le son, et indiquait par un signe le moment où il lui parvenait. On avait ainsi la mesure du temps que le son mettait à parcourir l'intervalle des deux stations : cette mesure n'était pas rigoureusement exacte, parce que la personne placée sous l'eau ne pouvait pas donner son signal à l'instant même où le son lui parvenait. M. Beudant a conclu de ses expériences que la vitesse du son dans l'eau de mer doit être de 1,500 mètres par seconde; mais ses diverses expériences lui ayant présenté des différences sensibles, il n'a donné ce résultat que comme une moyenne.

Il est probable que la vitesse réelle ne diffère pas beaucoup de cette moyenne, qui paraît s'accorder assez bien avec la théorie. Mais pour pouvoir établir d'une manière certaine cette comparaison, il fallait nécessairement avoir une mesure parfaitement exacte, et de plus déterminer rigoureusement la densité et la compressibilité du liquide à la température même de l'expérience. Nous avons donc pensé à reprendre avec soin et en grand ces mesures, pour lesquelles l'eau d'un lac nous a paru convenable, comme donnant immédiatement la vitesse du son dans l'eau pure.

Dans ce but l'un de nous (M. Colladon) se rendit en Suisse,

au mois d'octobre 1826, pour entreprendre, sur le lac de Genève, une série d'expériences sur la propagation du son dans l'eau pure, et pour déterminer la vitesse de cette transmission, qui n'avait point encore été mesurée.

On fit d'abord quelques essais (1) pour déterminer le meilleur moyen de produire dans l'eau des sons qui pussent être entendus à de grandes distances; on essaya successivement l'explosion d'une poudre fulminante, des chocs violents sur une enclume entièrement plongée, et enfin des coups frappés avec un marteau sur une cloche suspendue dans l'eau : ce dernier moyen fut reconnu préférable. Chaque coup frappé sur cette cloche produisait un son très-bref, qui avait un timbre métallique facile à distinguer.

Ce bruit se transmettait très-faiblement à l'air environnant, et à 200 mètres on ne l'entendait déjà plus; à cette distance on aurait en vain cherché à le distinguer en se rapprochant de la surface du lac, ou même en mettant l'oreille en contact immédiat avec cette surface.

Cependant lorsqu'à cette même distance on plongeait la tête entièrement dans l'eau, on entendait très-distinctement chaque coup; en s'éloignant davantage le bruit conservait encore assez d'intensité pour qu'on pût le distinguer jusqu'à 2,009 mètres. Ce bruit entendu sous l'eau paraissait aussi net et aussi bref que celui qu'auraient produit deux clefs ou deux lames de couteau frappées fortement l'une contre l'autre; il avait exactement la même nature dans tous les points intermédiaires, et cette ressemblance était telle qu'il semblait toujours en écoutant que les coups étaient frappés à une très-petite distance.

C'est de cette manière que furent faites les premières tentatives pour obtenir une mesure de la vitesse du son (2). La personne

(1) M. Sturm n'ayant pas pu m'accompagner à Genève pour m'aider dans ces expériences, j'ai dû faire en mon nom seul le récit de ces recherches sur la propagation du son. D. C.

(2) J'ai fait mes premières expériences avec l'aide de M. A. de Candolle, près de la campagne de son père, située au bord du lac. Ces expériences se faisaient la nuit et étaient fort pénibles. Je dois exprimer ici ma reconnaissance aux personnes qui ont bien voulu me seconder dans ces essais, et particulièrement à mon père et à MM. De Candolle, E. Melly et H. Darier.

qui écoutait, ne pouvant apercevoir les signaux, communiquait à un second observateur l'annonce du bruit; celui-ci notait sur un chronomètre l'intervalle écoulé entre l'apparition des signaux destinés à fixer l'instant du coup et l'arrivée du son. Ce procédé n'était pas très-exact; l'intermédiaire chargé d'entendre le son ne pouvait l'annoncer avec assez de promptitude pour qu'il n'en résultât pas quelques erreurs. Ces erreurs étaient d'autant plus fâcheuses que la plus grande distance à laquelle on pouvait distinguer les coups de cloche n'était que de 2,500 mètres, et cet espace était parcouru par le son en moins de deux secondes.

Ces difficultés me suggérèrent l'idée de chercher un moyen différent pour écouter les sons dans l'eau; quelques essais me firent découvrir un appareil que je crois nouveau, et qui m'a servi à répéter ces expériences à la distance de 14,000 mètres.

Avant de décrire la forme de cet instrument, je crois devoir expliquer brièvement le principe sur lequel repose sa construction.

Nous avons dit que les ondes sonores transmises par le liquide ne se communiquent à l'air que dans le voisinage de la cloche; lorsque la direction de ces ondes vient rencontrer la surface sous un angle très-aigu, elles se réfléchissent dans l'intérieur de la masse liquide sans communiquer aucun ébranlement sensible à l'air qui touche cette surface.

Il me parut probable que si l'on pouvait interrompre la continuité de cette masse en y introduisant un vase métallique à parois très-minces et plein d'air, le gaz contenu dans cette enveloppe pourrait recevoir et transmettre au dehors le mouvement vibratoire propagé dans le liquide.

L'appareil que j'ai fait construire sur ce plan m'a donné des résultats très-remarquables. Je me suis servi dans mes premiers essais d'un simple tube en fer-blanc de forme prismatique; ce tube avait environ trois mètres de longueur et quinze centimètres de côté; il était fermé par le bas, et le fond portait un anneau auquel on suspendait un poids suffisant pour faire plonger l'instrument de deux mètres; l'extrémité supérieure était ouverte et s'élevait à un

mètre au-dessus de l'eau. Lors de la première expérience avec cet instrument j'étais éloigné de la cloche de plus de deux mille mètres; quand les coups furent frappés, on entendit très-distinctement le bruit sortir du tube, et l'on aurait pu croire que ce bruit provenait du choc d'un petit corps métallique contre le bas du tube; et il était assez fort pour qu'on pût l'entendre à distance, et à plus de deux mètres de l'orifice on distinguait encore chaque coup.

J'ai cherché à perfectionner cet appareil, et j'ai adopté pour mes derniers essais la forme qui est figurée dans la figure 2, planche III; les détails de l'instrument sont aussi représentés dans les figures 3, 4 et 5 de la même planche; les mêmes lettres désignent dans ces figures les mêmes parties; la figure 2 représente l'instrument tel qu'il était placé pour les expériences; il se compose d'un long tube cylindrique en fer-blanc TT, recourbé à la partie supérieure et terminé par un petit orifice I, auquel on appliquait l'oreille. Dans la partie inférieure le tube se recourbe également, mais il s'évase beaucoup comme une cuiller, et son embouchure est entièrement fermée par le plan de fer-blanc MM, dont on voit la coupe dans la figure 5.

Cet instrument augmente tellement la sensation du son que le bruit d'un coup de cloche entendu dans cet appareil à quatorze mille mètres me paraissait aussi intense que le même bruit entendu à deux cents mètres en s'immergeant simplement la tête. Il est fort probable qu'en lui donnant de grandes dimensions il pourrait servir à communiquer sous l'eau à une distance considérable (1).

(1) Dans l'appareil dont je me suis servi, ce plan avait à peu près vingt décimètres carrés et le tube cinq mètres de longueur; la cloche pesait soixante-cinq kilogrammes. Je suis convaincu qu'en employant une cloche plus grosse et en perfectionnant ou agrandissant l'appareil pour écouter, on arriverait à communiquer facilement, sous l'eau d'un lac ou de la mer, à quinze ou vingt lieues. La possibilité d'entendre à cette distance des coups frappés sur une cloche même aussi petite que celle dont nous nous sommes servis peut être en quelque sorte démontrée par la supposition de plusieurs tubes semblables à celui de la figure 2, qui viendraient aboutir à l'orifice I, et multiplieraient ainsi l'intensité du son. Je dois faire observer que l'on n'entendrait absolument rien, si l'instrument n'était pas fermé et entièrement plein d'air; je m'en suis assuré par plusieurs expériences. On aurait pu croire que

Ayant reconnu la possibilité d'entendre le bruit à quelques lieues, j'entrepris de nouvelles expériences sur la vitesse du son, en prenant pour points de station les deux petites villes de Rolle et Thonon, situées sur les deux rives opposées du lac, dans l'endroit de sa plus grande largeur (voyez planche IV). La distance de ces deux villes est d'environ quatorze mille mètres (1).

Cette position était très-favorable pour ces mesures; la distance comprise entre ces deux villes peut être vérifiée exactement en la rattachant à celle de Genève à Langin, qui a servi de base pour la triangulation de la vallée du Léman; la profondeur moyenne de l'eau est très-grande entre ces deux rives. Le fond a de chaque côté une pente à peu près égale, et il n'existe aucun bas-fond intermédiaire qui puisse intercepter le son. La planche IV représente en RT une coupe du lac entre ces deux points. Cette coupe, dont l'échelle est double de celle de la carte, a été tracée d'après les indications de sondage faites par M. de la Bèche, et insérées dans la Bibliothèque universelle tome XII. La profondeur moyenne du lac entre Rolle et Thonon est de cent quarante mètres; on ne trouve d'ailleurs dans cet intervalle aucune trace de courant; l'eau y est d'une transparence remarquable et n'est point troublée par l'agitation des vagues.

On fut obligé de faire quelques modifications aux moyens employés précédemment pour indiquer l'instant où l'on frappait sur la cloche. La courbure du lac entre les deux stations avait une flèche

le bruit s'entendrait dans une cloche à plongeur; cependant j'ai fait à Rouen, en 1830, avec l'assistance de MM. Descroizelle, Pérot et Couvant, ingénieur des ponts, des essais qui ne m'ont donné aucun résultat satisfaisant. Dans un moment où les eaux de la Seine étaient parfaitement calmes et le courant sensiblement nul, des coups frappés sur une cloche de même grosseur que celle dont je m'étais servi sur le lac de Genève ne s'entendaient pas à la distance de deux ou trois cents mètres, quoiqu'on eût arrêté les pompes à air pour éviter le bruit. Il est probable que cet effet singulier doit être attribué à l'épaisseur des parois. Celles de la cloche à plongeur où nous étions étaient en fer fondu et avaient à peu près douze centimètres d'épaisseur.

(1) Cette distance est à peu près la moitié de celle de Montlhéry à Montmartre, qu'avaient choisie les académiciens français, en 1738, pour mesurer la vitesse du son dans l'air.

d'environ dix mètres, et de l'un de ces points on ne pouvait apercevoir les objets placés à l'autre bord près de la surface de l'eau.

On parvint à surmonter cette difficulté en faisant usage de signaux de poudre; la flamme de cette poudre ne s'apercevait pas depuis l'autre station, mais cette lumière subite produisait un éclair très-distinct, qui paraissait s'élever à plusieurs degrés au-dessus de l'horizon toutes les fois que la quantité brûlée dépassait cent cinquante grammes.

Cette poudre prenait feu à l'instant même où le marteau atteignait la cloche. Le mécanisme très-simple employé dans ce but est représenté en détail dans la planche III, figure 1.

A, bateau qui porte la cloche. Cette cloche C est suspendue par une chaîne *c*, elle plonge à quinze décimètres sous la surface de l'eau. La chaîne passe sur une poulie, afin que l'on puisse faire varier la hauteur de suspension de la cloche.

Le marteau M, destiné à frapper sur cette cloche, est fixé au bout d'un long levier *m'* à *m*, courbé en équerre, et qui tourne en *a* autour d'un axe fixe. La partie horizontale *am* sert de poignée pour frapper. A cette poignée est fixée en K une petite corde, qui passe ensuite sur une poulie de renvoi Q, et va s'attacher à une autre poulie plus petite R. Ainsi, quand on abaisse la poignée *am* pour frapper la cloche, la poulie R tourne par la traction de la corde. A l'extrémité de la poutre HH', sur laquelle ce mécanisme est fixé, et près de la poulie R est une petite plaque horizontale F, sur laquelle on verse la poudre qui doit servir de signal. Au moment de l'expérience on fixe à la poulie R un bout de lance à feu allumé *ll*, et quand on frappe, cette lance s'abaissant sur le tas de poudre l'enflamme subitement. Les expériences faites par ce procédé ont acquis une telle régularité que dans les quatre ou cinq dernières séries de mesures la plus grande différence n'a jamais dépassé une demi-seconde (1).

(1) Dans toutes les expériences faites entre Rolle et Thonon, nous avons constamment opéré d'après la marche suivante pour ces mesures; nous avions à chaque station des chronomètres qui marchaient ensemble, de quinze minutes en quinze minutes on faisait une

J'étais assis à l'autre station, la face tournée du côté de la cloche et la tête appuyée contre l'orifice I du tube, qu'un aide maintenait dans cette position; j'avais ainsi l'usage de mes deux mains pour tenir et arrêter le chronomètre, et je pouvais observer avec facilité les signaux de poudre et l'arrivée du son.

Le chronomètre dont je me suis servi était à quart de seconde, et avait une détente très-légère; au moment du feu on pressait la détente pour faire marcher l'aiguille, et on l'arrêtait à l'arrivée du son. L'espace parcouru sur le cadran indiquait le temps que le son avait mis à arriver.

Il s'écoulait nécessairement une petit intervalle entre le moment où je voyais la lumière et celui où je touchais la détente. Il y avait aussi un retard semblable après la sensation du son; mais ce second retard devait être un peu moindre, et voici pourquoi: si l'on veut opérer un mouvement à un signal déterminé, il y a toujours un intervalle de temps entre la sensation reçue et l'action qui en est la suite, et ce temps est d'autant plus long que l'apparition du signal est plus difficile à prévoir. Dans mes expériences la préparation de la poudre et de la lance à feu exigeait quelques précautions. La personne chargée de frapper la cloche donnait rarement le coup à l'instant convenu, et la lumière m'apparaissait presque toujours d'une manière inattendue; tandis que le son, arrivant régulièrement après le signal de poudre, était facilement prévu, surtout dans les dernières expériences. Je suppose donc que les temps observés sur le chronomètre pour la transmission du son sont un peu trop courts d'une quantité très-petite qu'on ne pourrait évaluer, mais qui ne doit point dépasser un quart de seconde.

Les deux stations avaient été prises dans la direction d'une ligne droite menée du clocher de Thonon à l'une des tours du

expérience. Pour éviter que le bruit de la cloche ne pût se confondre avec des bruits étrangers, on frappait toujours trois coups de suite à un intervalle d'une seconde; les deux derniers servaient seulement à vérifier la nature du bruit, et n'étaient accompagnés d'aucune lumière. J'ai supprimé dans les séries toutes les expériences dans lesquelles le coup principal n'avait pas été suivi du bruit des deux coups additionnels.

château de Rolle; chaque bateau était fixé à deux cents mètres du bord.

On a fait entre ces deux distances plusieurs expériences à des jours différents; nous rapporterons seulement les trois dernières séries qui sont les plus régulières.

TEMPS OBSERVÉS.		
7 NOVEMBRE.	15 NOVEMBRE.	18 NOVEMBRE.
9	9	9
9	9	9
9	9	9
9	9	9
9	9	9
9	9	9
9	9	9
9	9	9
9	9	9
9	9	9
9	9	9
9	9	9
9	9	9
9	9	9
9	9	9
9	9	9
9	9	9
9	9	9
9	9	9

On voit par ce tableau que le temps écoulé entre l'apparition

de la lumière et l'arrivée du son était plus grand que 9″ et plus petit que 9″ 1/2 ; sa valeur moyenne est un peu au-dessus de 9 1/4. Si nous évaluons à moins d'un quart de seconde la petite erreur dont nous avons parlé plus haut, nous pourrons adopter 9″,4 pour le temps que le son mettait réellement à venir d'une station à l'autre.

Comparons maintenant ce temps avec la distance des deux stations. La seule mesure connue de cette distance avait été prise par MM. de Saussure et Pictet, qui avaient trouvé 7,330 toises ou 14,237 mètres pour la distance du clocher de Thonon à la tour de Rolle. N'ayant pu me procurer les résultats mêmes de leur triangulation, et désirant vérifier l'exactitude de ce nombre, j'ai prié M. J. Mayer de Genève, ingénieur géographe très-habile, de vérifier cette mesure, en prenant pour base la distance de la tour Saint-Pierre de Genève à la tour de Langin, située au pied de la montagne des Voirons, distance qui a été mesurée à deux époques différentes, avec un très-grand soin, pour servir à une triangulation de la vallée du Léman.

Le premier triangle comprenait Genève, Langin, Rolle; le second Langin, Rolle et Thonon. Cette mesure directe a donné 14,240 mètres pour la distance du château de Rolle au clocher de Thonon. Le château de Rolle est situé sur le bord même du lac; quant au clocher de Thonon, sa projection est éloignée du bord de 353 mètres, ce qui donne 13,887 mètres pour la distance des deux rives.

En retranchant 400 mètres pour les distances des deux bateaux aux deux rives, on a 13,487 mètres pour la distance des deux stations. Ce nombre peut être regardé comme exact à moins de 20 mètres près.

Le temps que le son employait à parcourir cet espace était à très-peu près de 9″,4, comme nous l'avons dit plus haut. En divisant l'espace 13,487 mètres par le temps 9″,4, on aura la vitesse du son, ou l'espace qu'il parcourt dans une seconde. On trouve ainsi 1,435 mètres pour la vitesse réelle du son dans l'eau (1).

(1) Pour apprécier jusqu'à quel point ce nombre peut être exact, faisons observer que, si

Avant de discuter les résultats de ces mesures pour les comparer à ceux du calcul, je rapporterai sommairement quelques observations que j'ai pu faire pendant le cours de ces expériences.

La première remarque sur laquelle j'ai déjà insisté précédemment est relative à la ressemblance remarquable des sons entendus dans l'eau à des distances très-différentes. Le bruit des coups était aussi net et aussi bref à treize mille mètres qu'à cent mètres de la cloche ; il aurait été impossible de discerner un coup fort entendu à la première distance d'un choc plus faible écouté de près. On sait qu'il n'en est pas de même dans l'air : à mesure que l'on s'éloigne du corps sonore, le son diminue d'intensité, mais en même temps il change de nature, il devient plus sourd, plus prolongé. Des coups frappés à très-petits intervalles produisent, lorsqu'ils sont entendus de loin, le même effet qu'un bruit continu; dans l'eau au contraire l'intervalle entre les coups reste le même, quelle que soit la distance qui sépare la cloche de l'observateur. Cette différence remarquable s'explique par la nature des ondes sonores transmises dans l'eau.

Le calcul indique en effet que dans le mouvement vibratoire d'un corps fluide, la durée de l'agitation d'une particule est égale au rayon de la portion sphérique du fluide, que l'on suppose primitivement ébranlée à l'origine du mouvement, divisée par la vitesse de transmission du son. La première de ces deux quantités est nécessairement plus petite dans l'eau que dans l'air; la seconde au contraire est plus grande; ainsi la durée de la sensation d'un

l'on prenait pour la distance des deux stations 13,500 mètres, nombre que je crois trop fort, et pour la durée de la transmission du son 9″ 1/4, nombre trop petit; on aurait pour la vitesse la plus grande valeur qu'on puisse supposer, savoir 1,459 mètres; mais cette quantité est certainement trop grande. Si au contraire on prenait la plus petite valeur possible pour la distance, c'est-à-dire 13,386 mètres moins 20 ou 13,366 mètres, et pour le temps sa plus grande valeur 9″,5, on aurait la plus petite valeur possible de la vitesse, savoir 1,417 mètres. On voit, par la détermination de ces limites, que si la vitesse véritable n'était pas égale à 1,435 mètres, elle ne pourrait pas du moins différer de ce nombre, soit en plus, soit en moins, de plus de 24 mètres; de sorte que l'erreur possible dans cette expérience ne peut pas s'élever au-dessus de 1/60 de la valeur véritable.

son doit être en général plus courte quand il est transmis par l'eau que quand il se propage dans l'air.

Cette brièveté des sons propagés sous l'eau les rend si faciles à distinguer, qu'après quelques expériences le bruit du vent ou l'agitation de l'eau ne m'empêchait pas d'entendre les coups de cloche, de même que le bruit d'un sifflet se distingue dans une tempête.

L'expérience du 18 novembre citée plus bas a été terminée par un vent très-fort; le lac, qui était d'abord parfaitement calme, devint fortement agité, et l'on fut obligé de maintenir le bateau par plusieurs ancres; cependant, malgré le bruit des vagues, qui frappaient le tube et les flancs du bateau, je pus prendre encore plusieurs mesures, qui n'ont point différé de celles que j'avais observées précédemment.

Je terminerai cette digression par une troisième remarque sur l'influence remarquable des écrans interposés entre la cloche et le tube pour diminuer l'intensité du son. Voici l'expérience qui a donné lieu à cette observation. Pendant une suite d'essais que je fis avec M. A. de Candolle, nous avions choisi pour la cloche et le tube deux stations d'un même côté de la rive du lac et près de cette rive. Dans l'intervalle il y avait un mur qui s'avançait perpendiculairement dans le lac à douze ou quinze mètres; quand la ligne droite qui joignait les deux stations passait au delà de ce mur, le son était très-intense; mais quand cette ligne rencontrait le mur, même très-près de son extrémité, l'intensité du son diminuait aussitôt. Cette différence offre un point de rapprochement curieux entre la propagation des sons dans l'eau et celle de la lumière dans les milieux transparents.

Je terminerai ces observations en faisant remarquer combien cette facile transmission du son dans l'eau justifie les idées théoriques que l'on s'est formées sur la constitution de ce fluide et sur sa parfaite élasticité.

Le travail dépensé pendant moins d'une seconde par la personne qui frappait la cloche produisait un choc qui se transmettait successivement à une masse d'eau énorme, dont toutes les molécules

subissaient à leur tour l'impression de ce choc. La quantité d'eau qui, dans ces expériences, avait dû recevoir successivement un mouvement capable d'agir sur nos organes ne peut être évaluée à moins de 50,000 milliards de kilogrammes. C'est un des exemples les plus frappants que l'on puisse citer de la vérité expérimentale du principe de la transmission des forces vives.

Le jour de l'expérience du 18 novembre je m'étais fait conduire entre les deux stations pour prendre la température de l'eau en différents endroits de la largeur du lac, à la profondeur de trois et six mètres, au moyen d'un thermomètre dont la boule était recouverte de cire ; je trouvai la température partout la même à ces deux profondeurs : elle était de 8°,2 degrés centigrades près de Thonon, 8°,1 au milieu du lac, et 7°,9 près de Rolle : la valeur moyenne est 8°,1.

Pour comparer ces résultats avec ceux du calcul, il fallait déterminer avec beaucoup de soin la compressibilité de cette eau à cette température, ainsi que le rapport de sa densité à celui de l'eau distillée à 0°.

L'eau du lac, à une distance suffisante de l'embouchure du Rhône, peut être regardée comme parfaitement pure; à peine contient-elle $\frac{1}{2000}$ de son poids de matières étrangères. M. Tingry en a donné des analyses qui peuvent être regardées comme les meilleures, parce qu'il a opéré sur de grandes masses. Il les a faites en été et en hiver. Nos expériences ayant été faites à la fin de novembre, nous donnerons seulement ici la moyenne de ces deux analyses, qui d'ailleurs ne diffèrent pas beaucoup entre elles.

MOYENNE DE DEUX ANALYSES DE L'EAU DU LAC DE GENÈVE, PAR M. TINGRY.

24,475 grammes de cette eau contiennent :

82,796 centilitres de gaz (composé principalement d'air contenant plus d'oxygène que l'air atmosphérique);

1,722 carb. chaux;

0,172 carb. magnésie;
0,212 muriate de magnésie;
0,861 sulfate de chaux;
0,848 sulfate de magnésie;
0,040 argile siliceuse;
0,172 partie;

ce qui donne pour un kilog. d'eau 0,164 gr. de matière étrangère non gazeuse, c'est-à-dire un peu moins de $\frac{1}{6000}$ du poids total.

La densité de l'eau du lac est à très-peu près 1,00015 à 4°, celle de l'eau distillée à 4° étant prise pour unité. Et comme le volume d'eau augmente de 0,00013 quand elle passe de 4° à 8°, la densité de l'eau dans laquelle on a mesuré la vitesse du son était égale à l'unité, plus une fraction tout à fait négligeable.

Quelque petite que fût la quantité de matière étrangère contenue dans cette eau, nous avons cru devoir déterminer directement sa compressibilité, au lieu de la supposer égale à celle de l'eau distillée. On a pris cette mesure sur de l'eau recueillie à la surface dans une partie intermédiaire entre les deux stations; cette eau a été introduite dans un très-bon piézomètre, avec les précautions indiquées précédemment pour la compression de l'eau saturée d'air.

Une série d'expériences faites à la température de 3°, depuis une jusqu'à vingt atmosphères, a donné, pour la compression moyenne par chaque atmosphère, 46,18 millionièmes, la température du manomètre étant de dix degrés. Le manomètre ayant été gradué sous la pression de 0,7466 de mercure, il faut, pour ramener cette compression à celle d'une atmosphère de $0^m,76$, la multiplier par le rapport 7600/7466; cette multiplication donne 47,01 millionièmes pour la compressibilité apparente. Il n'y a pas de correction à faire pour la température du manomètre.

Si à ce nombre 47,01 on ajoute 1,65 pour la contraction du verre, la somme 48,66 millionièmes représentera la compressi-

bilité réelle de l'eau du lac pour chaque atmosphère de $0^m,76$ de mercure, la température de cette eau étant de 8° centigrades.

Reprenons maintenant la formule de la vitesse du son que nous avons rapportée plus haut, afin d'y substituer les valeurs que nous venons de déterminer; cette formule est

$$a = \sqrt{\frac{PK}{D\varepsilon}}.$$

En se rappelant quelles sont les quantités désignées par D, K, E et P, on a pour l'eau du lac de Genève à la température de 8°,1 :

$$D = 1; \quad K = 1,000,000; \quad \varepsilon = 48,66.$$

Si l'on prend P pour la pression d'une atmosphère de $0^m,7$ de mercure à la température de 10°, qui est celle où notre manomètre a été fixé, en désignant par m la densité de ce mercure et par g la force accélératrice de la pesanteur, ou le double de la hauteur dont elle fait tomber les corps dans la première seconde on a :

$$P = (0^m,76).g.m.$$

La valeur de g est, comme on le sait,

$$g = 9^m,8088.$$

La densité du mercure à 0° est, d'après les expériences de MM. Dulong et Petit, égale à 13,568; celle de l'eau distillée à 3°,90 étant prise pour unité. D'ailleurs, la dilatation du mercure est de 0,00018 pour chaque degré d'accroissement de température, et, par conséquent, de 0,0018 pour 10°. Le mercure passant donc de 0 à 10°, son volume augmente dans le rapport de 1 à 1,0018. La densité du mercure à 10° sera donc égale à sa densité à 0° ou 13,568 divisée par 1,0018; de sorte qu'on a:

$$m = \frac{13,568}{1,0018} = 13,544.$$

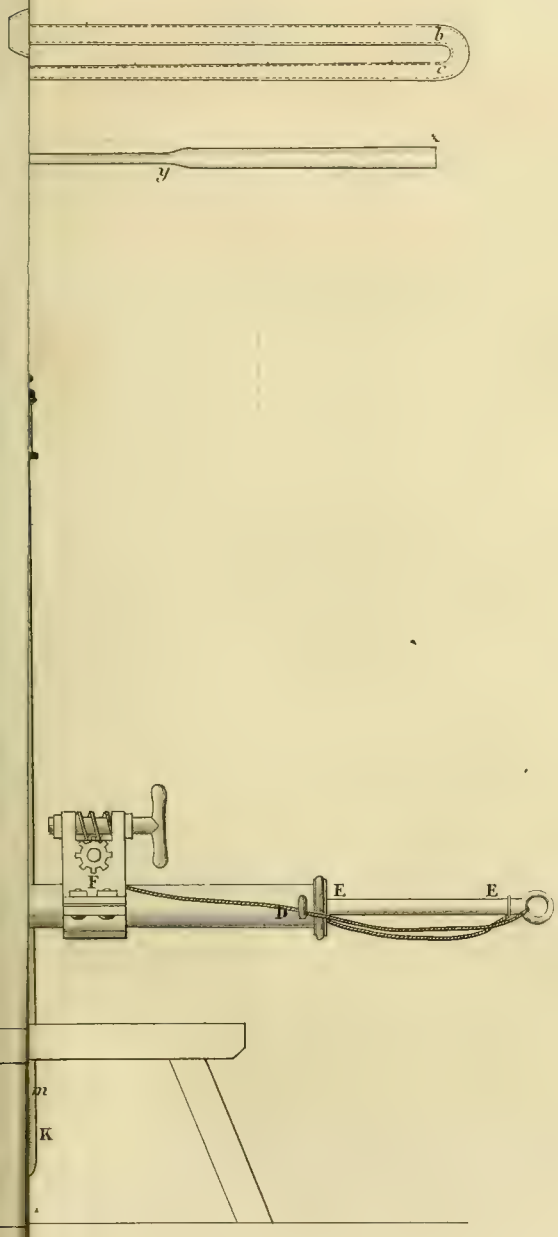


Fig. 4.

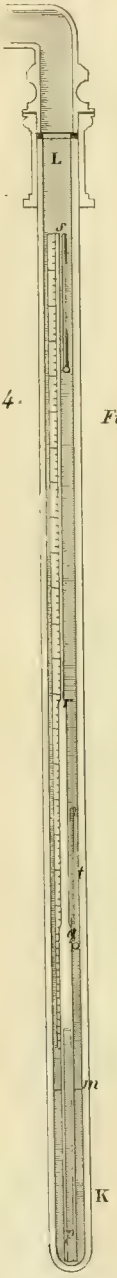


Fig. 5.

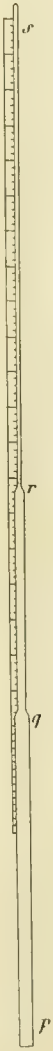


Fig. 6

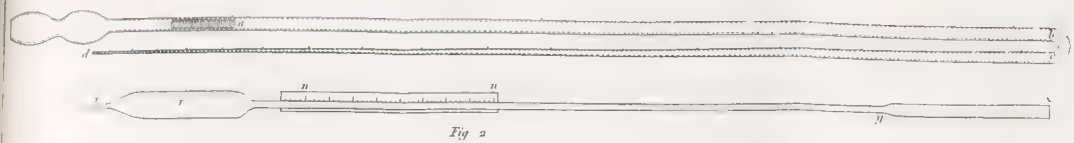


Fig. 2

Fig. 3.

Fig. 1

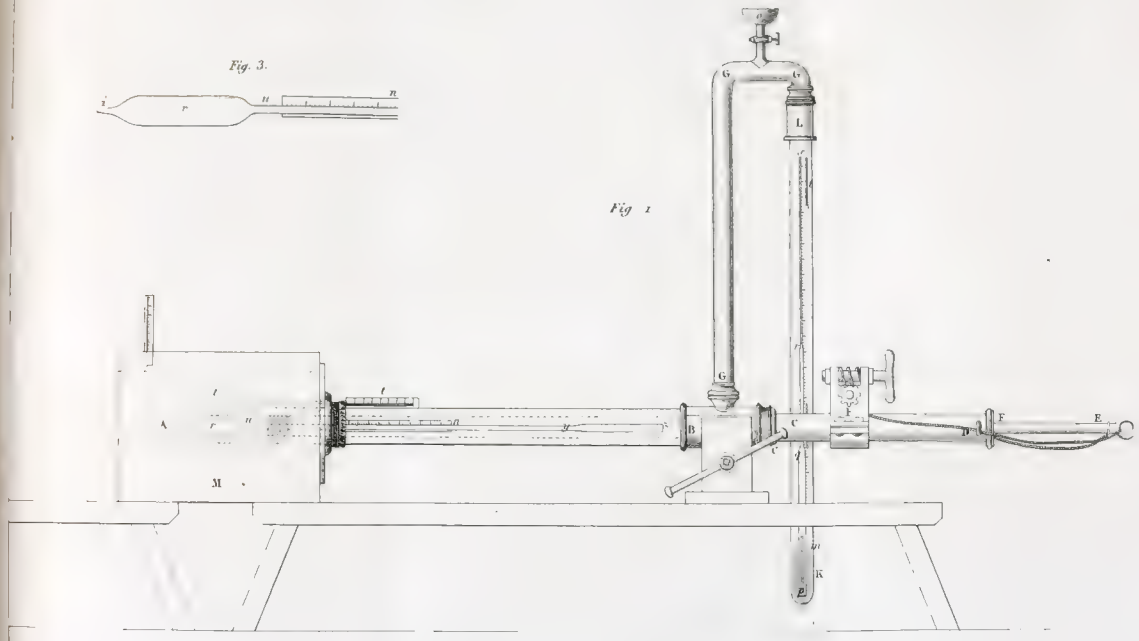


Fig. 4

Fig. 5

EXPÉRIENCES SUR LA COMPRESSION DES LIQUIDES.

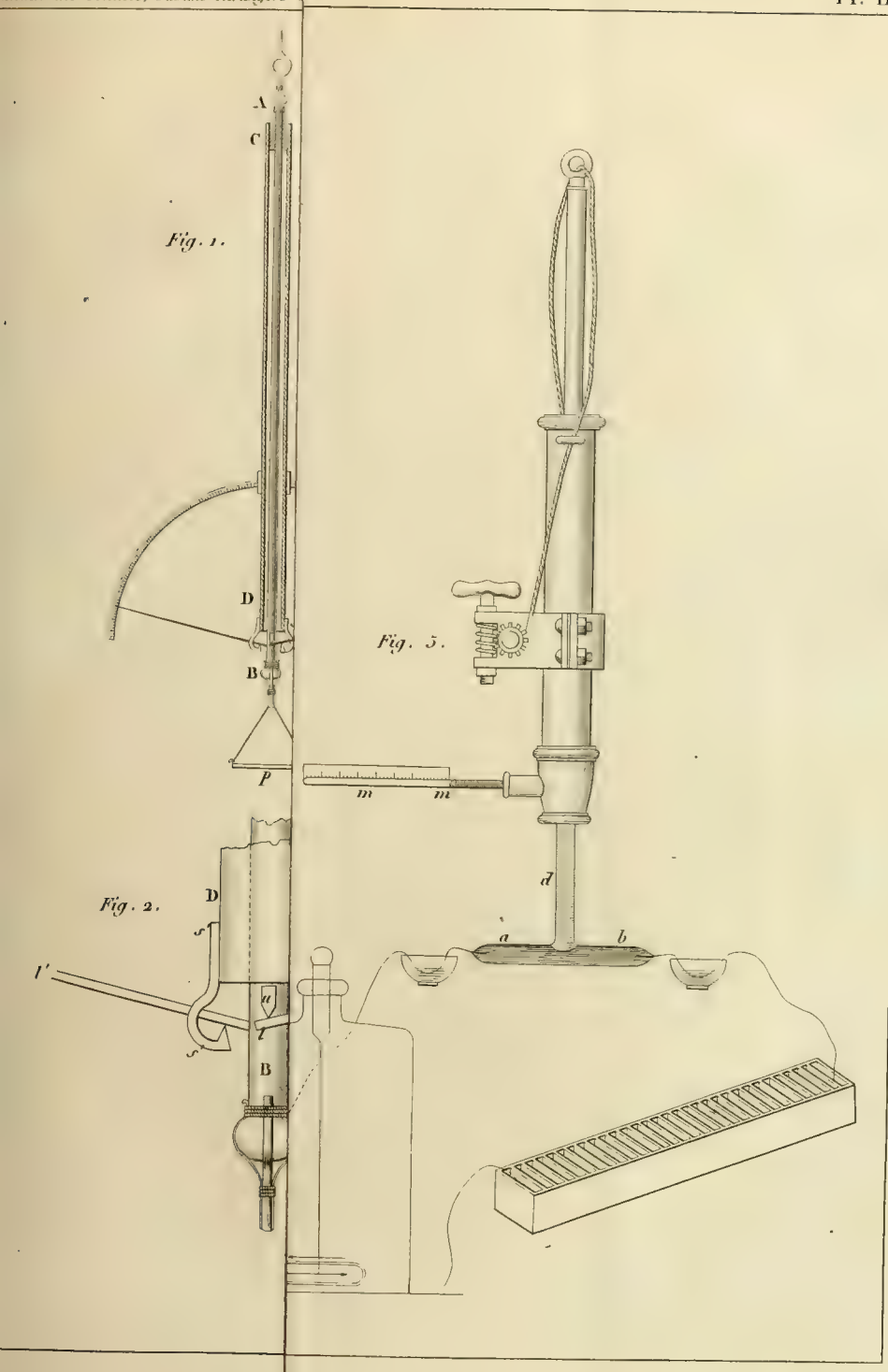
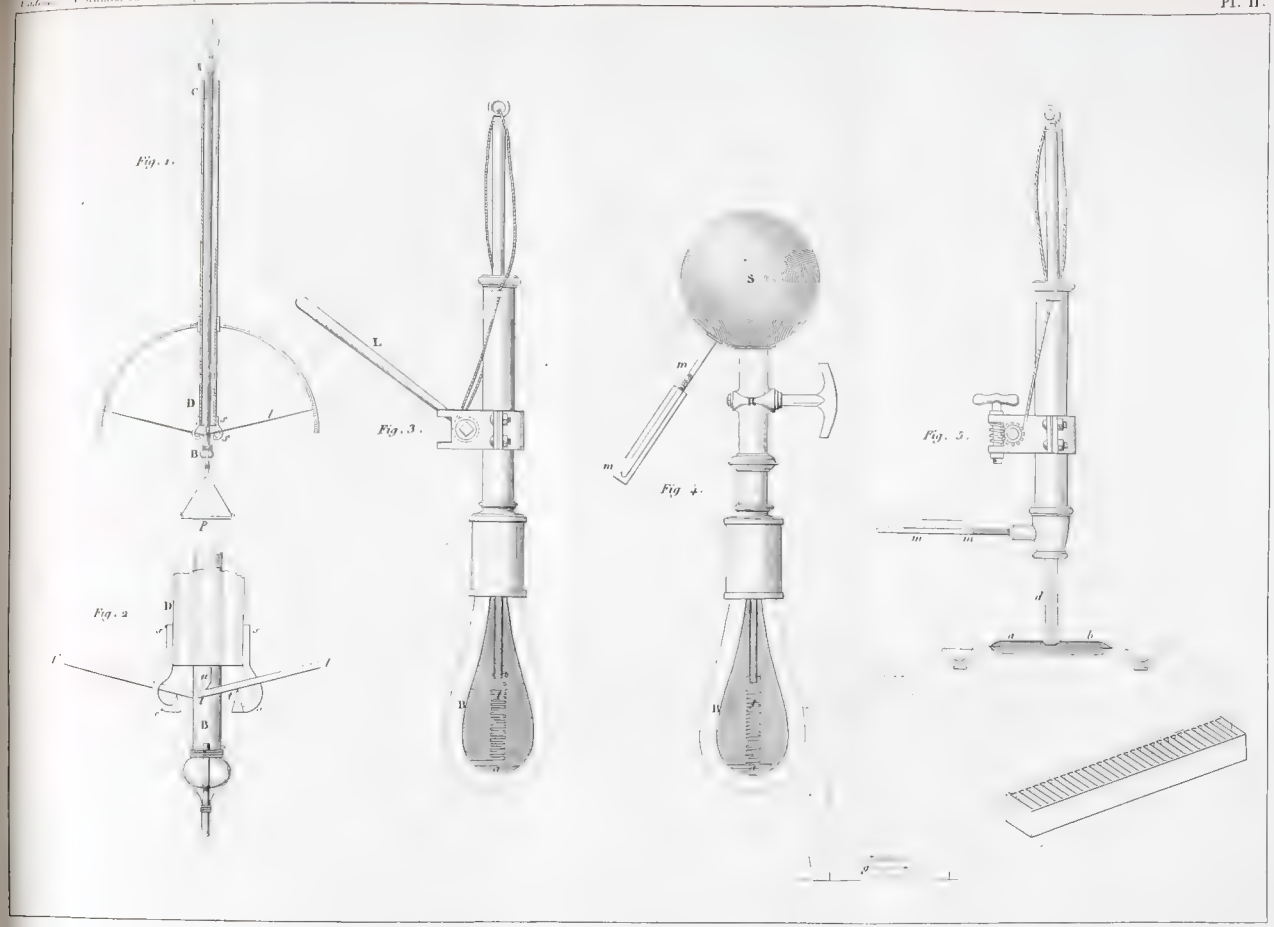


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.



EXPÉRIENCES SUR LA COMPRESSION DES LIQUIDES

Fig. 1.

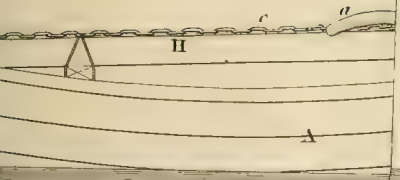
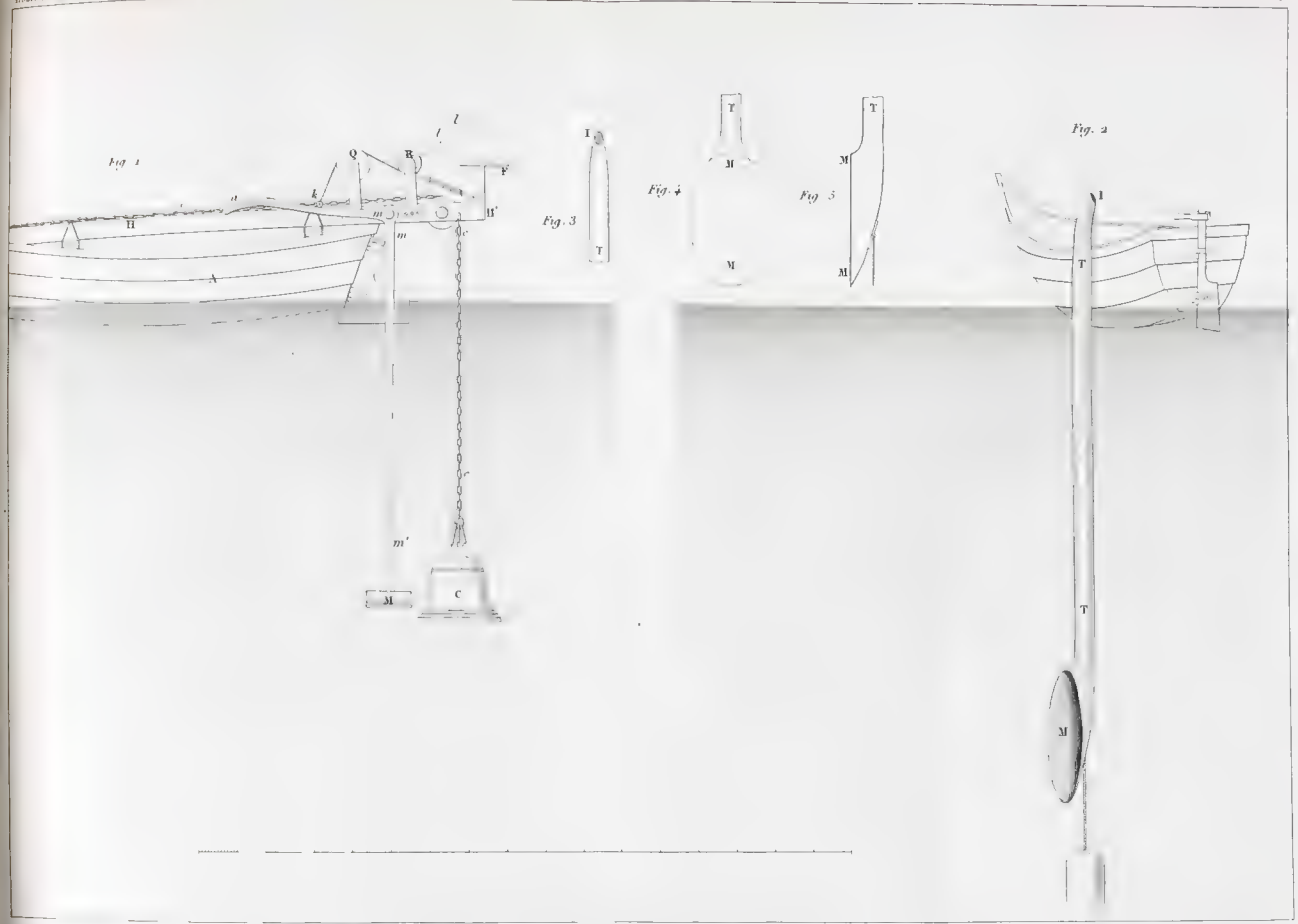


Fig. 2.



EXPÉRIENCES SUR LA COMPRESSION DES LIQUIDES.

Rolle
Thonon
GENEVE
R
T

EXPÉRIENCES SUR LA COMPRESSION DES LIQUIDES

Substituant donc dans la formule de la vitesse du son toutes ces valeurs :

$$D = 1; \quad K = 1,000,000; \quad \varepsilon = 48,66;$$
$$P = (0^m,76).(9,8088).(13,544);$$

on trouve, en effectuant ce calcul,

$$a = 1437^m,8.$$

Telle est la détermination théorique de la vitesse du son dans l'eau déduite de la densité et de la compressibilité de ce liquide, dans l'hypothèse qu'il n'y a point de chaleur dégagée par la compression rapide des molécules liquides qui puisse élever leur température.

Dans nos expériences la distance 13,487 mètres a été parcourue en $9'',4$, ce qui donne, pour la vitesse mesurée,

$$\frac{13487}{9,4} = 1435 \text{ mètres};$$

ainsi ces deux mesures ne diffèrent que d'environ trois mètres. Cette coïncidence remarquable, en confirmant les observations contenues dans la seconde partie de ce mémoire, peut servir à démontrer mieux que toute expérience directe que la compression de l'eau ne fait pas varier la température.

NOUVELLES OBSERVATIONS

SUR LES

PRINCIPAUX PRODUITS DE L'OPIUM,

PAR M. ROBIQUET.

L'opium a été l'objet d'un si grand nombre d'investigations qu'on pourrait s'imaginer qu'il est tout à fait superflu d'y revenir encore; mais il est si difficile de scruter jusque dans ses dernières ramifications un corps d'une nature aussi complexe, qu'on peut toujours espérer découvrir quelques faits inaperçus, en le soumettant à une nouvelle étude. Il est d'ailleurs une vérité bien reconnue aujourd'hui pour la chimie organique, c'est qu'en variant les modes d'analyse on en varie aussi les résultats. Nous avons fait remarquer, M. Boutron et moi, le singulier rôle que joue l'eau dans plusieurs circonstances; et nous avons démontré que des produits importants, qu'on regardait comme préexistants dans certains végétaux, ne devaient leur création qu'à la présence d'un véhicule aqueux. Cette observation, qui offrait un point de vue tout à fait nouveau, permettait de croire qu'en reprenant sous ce rapport l'examen de l'opium, on pourrait arriver à quelques données qui contribueraient nécessairement à mieux faire connaître sa vraie composition. Tels furent les motifs qui m'avaient engagé depuis longtemps à en tenter une nouvelle analyse; déjà je

l'avais entreprise, lorsque deux circonstances vinrent, pour ainsi dire, en paralyser la marche. Ce fut d'abord l'intéressante découverte de deux produits particuliers dans cet extrait, la *méconine* de MM. Dublanc et Couerbe, et la *narcéine* de M. Pelletier. Considérant, d'un autre côté, combien les différentes espèces d'opium du commerce variaient entre elles, et combien il devenait probable que tant de produits divers, réunis dans un même tout, réagissaient les uns sur les autres, et devaient se modifier sous certaines influences, pour présenter une foule d'anomalies, je conçus que tous les efforts possibles n'amèneraient rien de bien positif sous ce rapport. Je renonçai donc à faire une analyse proprement dite, et je réduisis mon travail à compléter quelques observations de détail que j'avais faites autrefois en étudiant les principaux produits de l'opium.

La narcotine, la morphine et l'acide méconique sont jusqu'à présent les produits de l'opium qui ont le plus fixé l'attention, et c'est par eux que je commencerai cette espèce de revue, que je terminerai par l'étude d'un nouveau corps, doué de propriétés fort remarquables, et dont l'existence avait échappé à ceux même qui y ont regardé de plus près; tant il est vrai qu'il y a toujours à voir dans de pareils composés.

CHAPITRE I.

DE LA NARCOTINE.

Deux mois avant la publication du cinquième volume de Berzélius, je lus à la Société de pharmacie une note dans laquelle j'établissais que la narcotine, quoique parfaitement neutre, jouissait néanmoins de la propriété de se combiner aux acides, de les neutraliser en grande partie, et de former avec eux des composés cristallisables, tout à fait comparables aux sels; et je présentai

des échantillons de sulfate et de muriate de narcotine bien cristallisés.

Berzélius, dans le cinquième volume de son Traité de chimie, dit, en parlant de la narcotine (page 137), qu'il la considère comme un alcaloïde, parce qu'elle s'unit aux acides pour former des sels, et qu'elle retient dans ses combinaisons des acides volatils tels que les acides acétique et hydro-chlorique; mais que ces sels réagissent à la manière des acides de même que pour les bases inorganiques faibles. Le même auteur ajoute qu'en traitant l'opium par l'éther et faisant évaporer les solutions, on obtient pour résidu une masse brune confuse, qui rougit le tournesol et contient un sel de narcotine dont l'acide n'a pas été reconnu; qu'en dissolvant ce sel dans l'esprit de vin ou dans l'eau chaude, et ajoutant du noir d'os, puis filtrant bouillant, on peut ensuite en précipiter la narcotine à l'aide de l'ammoniaque.

Enfin Berzélius dit encore que l'acide hydro-chlorique dissout la narcotine et forme avec elle une combinaison incristallisable.

La plupart de ces observations ne sont point d'accord avec celles que j'ai eu occasion de faire, et je demanderai la permission de signaler ces différences.

1° Je commencerai par remarquer qu'il est très-vrai de dire que la narcotine retient l'acide hydro-chlorique en véritable combinaison, mais qu'il s'en faut de beaucoup qu'il en soit de même pour l'acide acétique. A la vérité cet acide dissout à froid la narcotine, mais elle s'en sépare aussitôt qu'on soumet la dissolution à l'évaporation; c'est un moyen qui nous a été indiqué par M. Pelletier, et que nous employons journellement pour en extraire la narcotine qui pourrait être unie à la morphine.

2° Je crois pouvoir affirmer que, malgré l'excès d'acide contenu dans l'opium, la narcotine y est parfaitement libre de toute combinaison, car il suffit, pour l'extraire en entier, de traiter convenablement l'opium sec et pulvérisé par de l'éther rectifié. On fait les premiers traitements à froid, et on obtient ainsi presque toute la matière grasse et le caoutchouc dont j'ai fait mention dans le pre-

mier travail que j'ai publié sur l'opium. Ces premières teintures enlèvent peu de narcotine, mais à l'aide de macérations et de décoctions réitérées on enlève une plus grande quantité de ce principe, toujours imprégné, il est vrai, d'un peu de matière grasse, dont on le débarrasse par des dissolutions dans l'alcool et des cristallisations.

Pour épuiser l'opium de toute la narcotine qu'il contient, il faut le soumettre à un grand nombre de décoctions dans l'éther, et ce n'est qu'avec de la patience et du temps qu'on en vient à bout; mais encore est-il qu'on enlève ainsi toute la narcotine, et que par conséquent elle n'est pas combinée, et qu'on n'a nullement besoin d'avoir recours aux alcalis pour la séparer.

3° Berzélius n'a pu parvenir à faire cristalliser le muriate de narcotine. Il est certain en effet que son excessive solubilité dans l'eau, et que la grande viscosité de sa solution concentrée, permettent difficilement aux molécules salines de pouvoir s'agréger; toutefois on y parvient en abandonnant à l'étuve une solution rapprochée en consistance sirupeuse. Il s'y forme, au bout d'un certain temps, des groupes radiés, qui prennent de plus en plus d'extension, et finissent par tout envahir, pour ne plus offrir qu'une seule masse opaque, composée d'aiguilles très-fines et très-serrées. Par la dessiccation cette masse prend beaucoup de dureté et acquiert une demi-transparence.

Il est aisé d'obtenir des cristaux beaucoup mieux prononcés en se servant d'alcool au lieu d'eau. Ainsi, on fait évaporer à siccité le muriate de narcotine dissous dans l'eau, puis on reprend par de l'alcool bouillant, et il se dépose par refroidissement une masse cristalline d'un blanc quelquefois verdâtre, qui s'égoutte et se dessèche facilement.

J'aurais été curieux de voir si la narcotine, quoique neutre, suit, dans ses combinaisons avec les acides, la même loi que les alcaloïdes; mais il eût fallu pour cela connaître la proportion exacte d'azote qu'elle contient; et il s'en faut que nous sachions positivement à quoi nous en tenir à cet égard. On se rappelle en effet

que MM. Dumas et Pelletier y ont retrouvé 7,21 pour 0/0 d'azote; que M. Liébig prétend qu'elle n'en renferme que 2,5; et que M. Pelletier, dans sa dernière analyse, en a établi la proportion à 4,31. Il n'appartient à nul autre qu'à ces habiles chimistes, qui se sont occupés avec tant de persévérance de ces analyses, de fixer nos idées sur ce point, et je me bornerai à citer quelques observations subsidiaires. Ainsi, je dirai que l'acide hydro-chlorique sec se combine avec la narcotine, en développant de la chaleur, comme cela a lieu pour les alcaloïdes ordinaires; qu'un poids d'acide hydro-chlorique liquide, représentant 1 gramme d'acide sec, dissout 11 grammes de narcotine parfaitement sèche et pure; que la solution conserve une réaction acide, bien qu'elle semble neutre à la saveur.

Selon M Liébig la même proportion d'acide n'exige, pour sa complète saturation, que 8,2 grammes de morphine, ce qui dérive sans doute d'une qualité électro-positive plus prononcée, mais ce qui ne s'accorde guère avec l'action que la chaleur exerce sur ces deux combinaisons. En effet, si l'on expose comparativement, à la température de 100°, du muriate de narcotine et du muriate de morphine, celui-ci subit un déchet beaucoup plus considérable que le premier, et ce déchet est supérieur non-seulement à ce que comporterait la perte de toute humidité, mais encore à la différence qui pourrait résulter de la combinaison de l'hydrogène de l'acide avec une quantité proportionnelle de l'oxygène de la base. La même chose n'a pas lieu avec le muriate de narcotine : on retrouve au moins le poids de l'acide et de la base employée, et la réaction se conserve toujours acide, tandis que l'autre varie; dans aucune des deux circonstances il n'y a élimination de la base, car ces muriates, après avoir été longtemps exposés à la température de 100°, sont comme auparavant entièrement solubles dans l'eau.

Quelle que soit la cause de ce déchet pour le muriate de morphine, qu'il provienne d'une décomposition de la matière organique, ou qu'il soit dû à une perte d'acide, il n'en résulte pas

moins un grand embarras pour celui qui veut faire l'analyse de ce sel, car à quel point de dessiccation devra-t-il s'arrêter? Toutefois j'ai voulu m'assurer de la cause réelle de cette perte, et j'ai opéré cette dessiccation soit en vaisseaux clos, soit en vaisseaux ouverts, ce qui a produit une notable différence : dans le premier cas il s'est à peine dégagé des traces d'acides, mais la matière organique avait subi une altération sensible, car le muriate repris par l'eau était coloré en beau jaune, et le poids de la morphine précipité par l'ammoniaque était inférieur à celui employé. En agissant au contraire à vase ouvert, le muriate s'est conservé blanc.

Berzélius dit qu'on n'a pas pu déterminer le poids de l'atome de narcotine, faute d'avoir fait l'analyse d'aucun de ces sels. J'ai profité de l'occasion pour chercher à remplir cette lacune, et j'ai choisi de préférence le muriate cristallisé dans l'alcool comme offrant plus de garantie sur son identité. Je l'ai préférablement maintenu longtemps à la température de 110°; j'en ai pris 5 grammes que j'ai fait dissoudre dans de l'eau tiède, puis j'ai précipité la narcotine à l'aide d'une faible solution de potasse à l'alcool employé en léger excès; j'ai filtré, lavé, etc.

Toutes les liqueurs réunies ont été ensuite sursaturées par de l'acide nitrique, et précipitées de nouveau par du nitrate d'argent, et j'ai recueilli..... 1,615 de chlorure sec,
qui contient..... 0,39842 de chlore

Ainsi le muriate de narcotine était composé de

Narcotine.....	4,585
Acide hydro-chlorique sec.....	0,409
	4,994

Par conséquent si on statuait sur cette analyse, le poids de la narcotine serait de 5100,300, nombre qui ne s'accorde ni avec l'analyse de M. Liébig, qui donnerait pour poids de l'atome 7050,030, ni avec celle de M. Pelletier, qui répondrait à 3987,800. Il est donc à désirer qu'on fasse une nouvelle analyse de la narcotine; mais s'il était permis d'admettre que la vraie proportion

d'azote est à peu près la moyenne de celle indiquée par les analyses de Liébig et de Pelletier, on trouverait pour le poids de l'atome un nombre fort rapproché de celui que j'indique, et qui semble devoir inspirer d'autant plus de confiance, que la saturation directe de la narcotine par l'acide hydro-chlorique sec donne le même rapport que celui trouvé par l'analyse du sel. En effet, j'ai dit plus haut qu'un gramme d'acide hydro-chlorique sec dissolvait 11 grammes de narcotine, et tel est aussi à peu près le rapport qui existe entre les nombres 0,40962 et 4,585 fournis par l'analyse du muriate cristallisé.

CHAPITRE II.

DE LA MORPHINE.

Les alcaloïdes ont acquis un nouveau degré d'intérêt depuis les dernières recherches de Liébig, parce qu'elles nous font entrevoir quelques idées générales, qui, si elles se vérifiaient, en simplifieraient singulièrement l'histoire. Mais craignons de trop nous hâter, et regardons-y de plus près avant d'admettre comme certain que ces bases ne se combinent, comme les oxides inorganiques, qu'en des proportions bien définies et susceptibles d'être soumises à des lois sans exceptions. J'ai dit autrefois, en parlant de la quinine, qu'on ne pouvait en opérer la complète saturation que dans des dissolutions, et qu'on n'obtenait par cristallisation que des sous-sels ou des sur-sels, susceptibles eux-mêmes de varier dans leurs proportions, en les soumettant simplement à des cristallisations réitérées. Cette opinion était appuyée de l'analyse de trois sulfates acides de quinine obtenus de trois cristallisations successives; et je démontrai qu'ils avaient à chaque fois perdu une certaine quantité de leur acide. Il est d'ailleurs certain que dans la fabrication du sulfate de quinine on est obligé, pour conserver la même cristallisation, d'ajouter une petite quantité d'acide à chaque nouvelle dissolution. Ces remarques m'avaient porté à

conclure que les alcaloïdes ne contractaient avec les acides que des combinaisons éphémères et sans proportions bien déterminées. M. Baup s'éleva fortement contre cette idée, et il affirma que la quinine ne se combinait qu'en deux proportions à l'acide sulfurique, dont l'une formait le sel neutre et l'autre le bi-sel. Pour mettre son opinion en harmonie avec les faits, M. Baup prétendit que les sulfates de quinine, qui étaient autrement composés, n'étaient qu'un mélange des deux espèces qui servaient de type. Cette opinion est généralement adoptée, et je regrette de n'avoir pas encore acquis une conviction entière à cet égard; mais il me semble que des résultats aussi constants ne devraient s'établir que sur des données plus précises que celles que nous possédons. Dans son beau travail sur les alcaloïdes M. Liébig fixe à 6,33 p. 0/0 l'eau de cristallisation contenue dans la morphine. J'avais cru jusqu'à présent que la température de 100° suffisait pour débarrasser la morphine de son eau de cristallisation, et il est positif qu'à cette température elle conserve parfaitement sa forme cristalline et sa transparence, et qu'elle ne perd point d'eau; j'aurais donc volontiers admis que celle qui se dégage à une plus forte chaleur est de l'eau de composition; mais en adoptant, avec M. Liébig, qu'il en soit autrement, je demanderai pourquoi on s'arrête à 120°, et quel est le motif qui empêche de pousser jusqu'à la fusion, vrai type d'une complète dessiccation. On objectera sans doute qu'il y aurait alors décomposition; mais ce serait à tort, car il est facile de l'éviter en chauffant la morphine avec précaution dans une petite boule de verre assez mince pour que la chaleur se transmette facilement, et que le verre n'acquière pas une température plus élevée que celle nécessaire à la fusion, car alors il y aurait en effet décomposition.

De cette incertitude sur le vrai point de dessiccation naît une première source d'erreurs pour l'évaluation de la capacité de saturation.

M. Liébig a trouvé que 0,600 de morphine exige, pour sa complète saturation, 0,076 de gaz hydro-chlorique sec; et il dit

que la solution de ce sel était parfaitement neutre, et qu'elle lui a fourni, par le nitrate d'argent, une quantité de chlorure correspondant exactement à l'acide employé, bien que l'hydro-chlorate de morphine ait été longtemps exposé à une température de 100°. Ce résultat suppose une grande stabilité dans cette combinaison, cependant j'ai souvent observé, ainsi que je l'ai dit dans le chapitre précédent, que le muriate de morphine perd par simple dessiccation à 100° plus que ne le comporte sa composition. Je m'en suis positivement assuré de la manière suivante. J'ai délayé 8 gr. de morphine broyée dans une quantité d'acide hydro-chlorique représentant 1 gr. d'acide sec, et j'y ai ajouté assez d'eau chaude pour dissoudre l'hydro-chlorate. La solution incolore et transparente a été évaporée au bain-marie dans une capsule exactement tarée, et le sel étant desséché je l'ai pesé à diverses reprises jusqu'à ce qu'il cessât d'éprouver une nouvelle perte par une nouvelle dessiccation, je suis parvenu à n'avoir ainsi que $8^{gr},2$ de résidu. Ce déchet est beaucoup trop considérable pour qu'on puisse l'attribuer à l'eau de cristallisation de la morphine et même à la combinaison de l'hydrogène de l'acide avec une quantité correspondante d'oxygène de la base; en effet, 8 gr. morphine cristallisée contiennent, d'après Liébig, 0,5 d'eau, reste 7,7; 1 gr. acide hydro-chlorique contient 0,026, et à cette proportion d'hydrogène répond 0,2084 oxygène, ce qui ferait un total 0,2314 à retrancher de $8,7 = 8,1656$ au lieu de 8,2 trouvé par expérience. Ainsi on voit que, quand bien même l'hydrogène de l'acide se combinerait avec tout ou partie de l'oxygène de la base, ce qui est on ne peut plus douteux, on devait trouver un résidu plus considérable que celui qu'on obtient; on pourrait encore admettre qu'une portion du muriate a été décomposée, et qu'en le reprenant par l'eau, une quantité proportionnelle de morphine se trouverait éliminée; mais, loin de là, tout se redissout et même dans une moindre quantité d'eau qu'auparavant, en raison sans doute de la volatilisation d'une petite quantité d'acide.

Ainsi, en dernière analyse, on ne sait où prendre le type de ces sels, car comment déterminera-t-on le vrai point de dessiccation?

D'une part, elle ne sera jamais complète si on opère en vaisseaux clos, c'est-à-dire n'ayant qu'une issue; de l'autre, il y aura réaction et altération d'une partie de la matière organique. Il faudra donc de toute nécessité s'en rapporter au point de saturation du sel en dissolution; mais ici s'élève une nouvelle difficulté, car j'ai souvent observé que ce point de saturation varie avec la température. Ainsi en admettant qu'on ait à 80° une solution de muriate de morphine bien neutre, on la verra prendre une réaction acide de plus en plus manifeste, à mesure que la température s'abaissera, et longtemps avant que la cristallisation ait lieu. Il semblerait donc que l'alcalescence de la base accroît ou diminue suivant que les molécules se distendent ou se rapprochent. Au reste, quelle que soit l'explication qu'on puisse donner de ce singulier phénomène, le fait existe et démontre le peu d'affinité des alcaloïdes pour les acides, et qu'il est bien douteux, comme je l'ai avancé depuis longtemps, que leurs combinaisons ne puissent s'opérer que dans les limites précises qu'on prétend leur assigner.

Prouver que toutes les combinaisons chimiques sont régies par les mêmes lois serait sans doute un des plus beaux résultats que la science pût atteindre, et on en peut juger par les efforts multipliés des hommes habiles qui cherchent à soulever le voile de l'organisme, pour tout soumettre à un même système. Espérons tout de la puissance du génie, mais ne cherchons point à deviner les découvertes, et n'admettons pas comme vérité tout ce qui paraît vraisemblable. Il se peut qu'un même lien unisse toute la matière et l'enchaîne dans ses nombreuses ramifications, mais jusqu'à présent nous n'avons point saisi la corde principale de ce réseau commun, et nous sommes obligés, dans l'état actuel de la science, de convenir que l'organisme est en dehors des lois qui régissent la matière brute.

CHAPITRE III.

DE L'ACIDE MÉCONIQUE.

Ce corps est le moins connu de tous les produits essentiels de l'opium. Séguin, qui le premier en a signalé l'existence, s'est borné à dire qu'il y avait dans l'opium un acide particulier qui jouissait de la propriété de développer une belle teinte rouge dans les dissolutions de fer au maximum. Cette unique observation ne lui aura sans doute pas paru suffisante pour constater la spécialité de cet acide, et il n'aura pas cru devoir lui donner un nom nouveau. Aussi la découverte en est-elle généralement attribuée à Sertuerner, qui quelques années plus tard parla de ce même acide, remarqua qu'il se sublimait et l'appela *acide méconique*, sans rien ajouter à son histoire, pas même le moyen de l'extraire. C'est probablement pour éviter d'éprouver de pareilles pertes que quelques chimistes se sont hâtés de donner des noms à des produits dont ils se réservent sans doute de nous démontrer l'existence un peu plus tard.

Les auteurs qui depuis cette époque ont fait mention de l'acide méconique n'ont considéré comme tel que le sublimé qu'on obtient en soumettant ce qu'ils regardaient comme l'acide impur, à l'action de la chaleur. Je crois être en mesure de démontrer que jusqu'à présent on n'a point connu le véritable acide de l'opium et que ce singulier produit mérite de fixer l'attention des chimistes.

Deux causes principales ont surtout contribué à retarder l'étude de l'acide méconique : c'est d'un côté la difficulté de pouvoir l'extraire, de l'autre le peu de stabilité de ses propriétés. Aujourd'hui il se présente avec telles formes et telles propriétés qui demain se seront éclipsées pour faire place à d'autres. On conçoit que de pareilles anomalies laissent dans un vague immense, et qu'on est peu tenté de poursuivre l'étude d'un corps qui, après tout, ne semblait pas fait pour exciter un grand intérêt. Cependant il arrive

assez souvent qu'irrité par les obstacles on y apporte d'autant plus d'opiniâtreté, et que le zèle croît avec la difficulté; c'est sans doute là ce qui m'aura engagé plus avant, car je suis revenu bien des fois à la charge, et j'éprouve enfin aujourd'hui la satisfaction de n'avoir pas fait d'inutiles recherches.

Lorsque je répétai pour la première fois les expériences de Sertuerner je substituai, pour séparer la morphine de la dissolution d'opium, la magnésie à l'ammoniaque, afin de m'assurer si l'alcalinité de la base organique ne dépendait pas de l'ammoniaque elle-même. En suivant ce mode, je remarquai qu'une grande partie de l'acide méconique était lui-même précipité par l'excès de magnésie à l'état de sous-sel insoluble. Je repris donc, pour obtenir cet acide, le précipité magnésien, après toutefois en avoir séparé la morphine à l'aide de l'alcool, et je le traitai d'abord à froid par de l'acide sulfurique affaibli, afin d'enlever seulement l'excès de magnésie; j'ajoutai peu à peu de l'acide sulfurique tant qu'il se neutralisait, puis j'étendis d'eau et je lavai par décantation pour éliminer le sulfate de magnésie produit; cela fait, je mélangeai ce dépôt lavé avec une assez forte proportion d'acide sulfurique, étendu seulement de deux ou trois parties d'eau. Je soumis ensuite à l'action de la chaleur, et après quelque temps de réaction je filtrai bouillant: l'acide méconique cristallisait par refroidissement, mais excessivement coloré et impur. Il restait à poursuivre la purification jusqu'à ce qu'il ne contînt ni acide sulfurique ni magnésie. J'ai longtemps préparé ce que j'appelais *l'acide méconique brut;* par ce procédé il me réussissait assez bien, mais je sais que d'autres chimistes l'ont employé sans succès. Cela tenait sans doute à ce qu'ils n'avaient pas comme moi la précaution d'enlever préablement l'excès de magnésie, et surtout à ce qu'ils étaient trop réservés sur l'emploi de l'acide sulfurique. Non-seulement il en faut une forte proportion, mais il est nécessaire de traiter le produit obtenu à diverses reprises par une nouvelle dose d'acide, autrement on n'obtient qu'un méconate acide de magnésie. Il est peu d'acide qui ait autant de tendance que l'acide méconique à faire des bi-sels avec les prin-

cipales bases, et qui défendent avec autant de force les dernières portions qu'il retient.

J'ai dû renoncer à ce mode d'extraction depuis qu'on est généralement revenu dans les laboratoires à l'emploi de l'ammoniaque pour la séparation de la morphine. Quand on opère ainsi, une partie de l'acide méconique, combiné à de la chaux et à de l'ammoniaque, accompagne la morphine; l'autre, quoique dans le même état de combinaison, reste dans le liquide. C'est ce méconate triple qu'on obtient pour résidu quand on a épuisé, par l'alcool bouillant, le précipité par l'ammoniaque. Si on veut en extraire l'acide méconique, on devra éviter d'employer dans ces traitements du noir d'os, dont les sels calcaires viendraient s'ajouter au méconate et compliquer l'opération.

Pour obtenir le méconate de chaux et d'ammoniaque qui reste dans la liqueur, il faut la concentrer presque en consistance sirupeuse et l'abandonner au repos dans un lieu frais pendant plusieurs mois. Il se forme avec le temps un dépôt grenu qu'on sépare en jetant sur une toile serrée et soumettant à la presse.

Enfin il existe encore un autre moyen de se procurer le méconate de chaux, et sans doute le meilleur de tous, c'est celui employé par William Gregory. Ce chimiste, au lieu d'extraire directement la morphine au moyen des alcalis, puis de la purifier, comme nous le faisons, à l'aide de l'alcool, l'obtient d'abord à l'état de muriate par suite d'une double décomposition qui résulte de l'addition d'une quantité convenable de muriate de chaux. Les détails de ce procédé seront incessamment publiés dans le Journal de pharmacie. Mais n'en voulant parler ici qu'en ce qui concerne l'acide méconique, je dirai que le méconate et le sulfate de morphine qui sont naturellement contenus dans l'opium sont transformés, par le muriate de chaux ajouté, en muriate de morphine qui reste dans la liqueur et qu'on obtient par évaporation et cristallisation, et en méconate et sulfate de chaux qui se précipitent en abondance sous forme pulvérulente. On lave bien ce précipité, qui est d'une couleur brune plus ou moins foncée, suivant son degré de pureté; on se sert

d'abord d'eau, puis d'alcool bouillant, et on le soumet ensuite au traitement que nous allons décrire.

Il m'est arrivé une fois d'obtenir du méconate de potasse et d'ammoniaque au lieu de méconate de chaux. Je ne pourrais pas affirmer que ce méconate était tout formé dans l'opium, je n'avais pas fait moi-même l'extraction de la morphine de cette opération; peut-être ce méconate résultait-il de quelque sel de potasse, employé à mon insu, car on sait que chaque opérateur a ses tours de main dont il a grand soin de faire mystère, même à ceux qui le dirigent. Ce qu'il y a de bien certain, c'est que j'ai recueilli au moins 10 onces de méconate de potasse de ces eaux-mères, et que c'est la seule fois que cela ait eu lieu.

PRÉPARATION DE L'ACIDE MÉCONIQUE.

Quel qu'ait été le mode d'obtention du méconate de chaux, il faut, pour lui enlever la base qui le sature, le traiter par des acides énergiques et les employer à haute dose; encore est-il que l'acide méconique a une telle tendance à faire des bi-sels qu'on ne saurait lui soustraire du premier traitement que la moitié de la base qui le sature, à moins qu'on mette une dose excessive d'acide et qu'on ait recours à l'action soutenue de la chaleur; mais alors l'acide méconique subit une modification. Il faut donc, de toute nécessité, pour éviter cet inconvénient, modérer la réaction et la rendre successive; ainsi on prend 100 parties de méconate brut, on le délaie dans 1,000 parties d'eau chauffée à 90° environ, on agite vivement et on ajoute peu à peu autant d'acide muriatique pur qu'il en est nécessaire pour dissoudre la presque totalité du méconate; une partie résiste, c'est du sulfate de chaux, qui est plus lourd et plus blanc que le méconate. On verse immédiatement sur un filtre préalablement lavé à l'acide muriatique pour éviter que la dissolution ne se colore par le fer du papier. On obtient par refroidissement une grande quantité de cristaux légers et nacrés ou de pe-

tites aiguilles brillantes; c'est du bi-méconate de chaux. On le réunit sur une toile serrée et on le soumet à la presse, puis on le dissout de nouveau dans une quantité suffisante d'eau chauffée à 90° centigr., et la dissolution étant faite on y ajoute 50 gr. d'acide hydro-chlorique pur. On chauffe de nouveau pendant quelques instants: mais on évite d'élever la température jusqu'à 100°, on retire du feu et on laisse refroidir. Ordinairement on enlève à cette reprise la majeure partie de la chaux restante. Quelquefois cependant il n'y a qu'une partie du bi-méconate de décomposé, et on s'en aperçoit à l'aspect des cristaux, dont les uns plus denses et souvent plus colorés, se précipitent plus promptement au fond du vase quand on vient de l'agiter, tandis que les autres, plus légers et plus blancs, restent plus longtemps en suspension : ceux-ci sont du biméconate qui a résisté à l'action de l'acide. Lorsque le refroidissement a été très-lent, il arrive souvent que les cristaux d'acide méconique sont assez denses pour qu'on puisse les séparer du bi-méconate par simple lévigation. Autrement il faut tout redissoudre et faire subir un traitement semblable au précédent. Enfin on ne cesse d'avoir recours à l'addition de l'acide hydro-chlorique que quand les cristaux qu'on obient ne laissent aucun résidu sensible lorsqu'on les brûle sur une lame de platine. Arrivé à ce point on jette les cristaux sur un filtre lavé à l'acide hydro-chlorique; on les arrose à diverses reprises avec de petites quantités d'eau froide pour les débarrasser de l'acide dont ils sont imprégnés, et pour les en priver complétement on les dissout une dernière fois dans de l'eau pure et chaude. On pourrait considérer l'acide méconique ainsi obtenu comme parfaitement pur, car il ne laisse aucun résidu de combustion, et le précipité qu'il forme avec le nitrate d'argent se redissout complétement dans l'acide nitrique pur. Cependant quelque soin qu'on ait pris, les cristaux ont une couleur de bois, et pour les obtenir parfaitement blancs, il faut les soumettre à un nouveau traitement, qui consiste à broyer ces cristaux, qui sont ordinairement formés de belles écailles micacées, et à les délayer dans trois ou quatre parties d'eau froide, puis on sature par l'addition

successive d'une solution de potasse caustique, mais étendue. 100 gr. d'acide méconique exigent ordinairement 55 gr. de potasse caustique sèche. Lorsque la saturation est opérée, on verse dans un matras l'espèce de bouillie plus ou moins épaisse qui en résulte et on ajoute un peu d'eau, puis on chauffe, mais assez seulement pour dissoudre le méconate de potasse. Par le refroidissement le tout se prend en masse, on passe sur une toile et on soumet le magma à la presse. Les eaux-mères retiennent la matière colorante. On dissout de nouveau le méconate de potasse, et après refroidissement on l'exprime de nouveau; il est alors du plus beau blanc. On évapore les eaux-mères pour en retirer autant que possible le méconate qu'elles retiennent; mais ces dernières portions sont toujours très-colorées et peu propres à la préparation de l'acide méconique. Pour obtenir cet acide dans son plus grand état de pureté, on prend le méconate de potasse et on le soumet à un traitement en tout semblable à celui que je viens d'indiquer pour le méconate de chaux, et si on a bien eu soin d'éviter à chaque dissolution une trop forte élévation de température, on obtient l'acide méconique en belles écailles blanches, transparentes et micacées qui jouissent des propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉS DE L'ACIDE MÉCONIQUE.

Cet acide ne paraît subir aucune altération au contact de l'air ordinaire; mais lorsqu'on le soumet à une température de 100°, il devient opaque comme du gypse calciné et il perd avec le temps jusqu'à 21,5 p. 0/0 de son poids; l'effet est plus prompt à une température de 120°. Ainsi privé de son eau de cristallisation l'acide méconique, étant redissous dans de l'eau chaude, reprend par refroidissement sa forme et sa transparence premières; quatre parties d'eau bouillante suffisent pour le dissoudre; mais si cette dissolution se fait en vaisseaux clos, et qu'on ait adapté à la fiole qui contient le liquide un tube courbé de manière à pouvoir recueillir

les gaz, on obtient, après avoir laissé dégager tout l'air de l'appareil, un fluide élastique qui trouble les eaux de chaux et de baryte, et qui est complétement absorbé par une dissolution de potasse. Il se dégage donc de l'acide carbonique dans cette circonstance.

Pour savoir si cette production était due au calorique seul, ou si elle résultait de l'action simultanée de l'eau et de la chaleur, j'exposai à une température de 110° environ de l'acide cristallisé et séché au seul contact de l'air. L'appareil était disposé de manière à pouvoir recueillir tous les produits. On vit immédiatement de l'humidité ruisseler dans le tube, et de l'eau de chaux, que traversait l'air qui se dégageait, fut manifestement troublée; mais à mesure que la dessiccation faisait des progrès, le dégagement de gaz se ralentissait, et il cessa bientôt complétement. Cependant il s'en produisait de nouveau dès qu'on réintroduisait un peu d'eau dans le tube qui contenait l'acide méconique. Ainsi, point de doute, l'eau contribue à cette formation d'acide carbonique; mais ici se présente naturellement une autre question.

Ce développement d'acide carbonique est-il la conséquence d'une décomposition totale d'une portion d'acide méconique, ou bien ne résulte-t-il que d'une réaction entre ses principes, et n'amène-t-il qu'une simple modification de composition? C'est ce que je me propose d'examiner dans le paragraphe suivant.

Lorsqu'on s'est borné à chauffer de l'acide méconique cristallisé, à une température sèche qui n'excède pas 120°, nous avons vu qu'il ne subissait d'autre altération apparente que de perdre son eau de cristallisation et sa transparence, et qu'on pouvait lui faire reprendre son premier aspect en le faisant dissoudre dans de l'eau chaude et le laissant cristalliser. Mais il en est tout autrement lorsqu'on soumet à une ébullition soutenue une dissolution d'acide méconique écailleux. Tant que l'ébullition a lieu il y a dégagement continuel d'acide carbonique, et on voit en même temps la liqueur, qui primitivement était incolore, prendre d'abord une teinte jaunâtre qui se fonce de plus en plus, et finit par atteindre le rouge brun foncé. Le même effet a lieu, quoique plus lentement,

à la simple chaleur du bain-marie. Cette réaction est très-lente, car elle peut durer plusieurs jours, quoique n'agissant que sur de petites quantités. Néanmoins avec de la patience et en ayant soin de renouveler l'eau de la dissolution au fur et mesure du besoin, on peut arriver à son terme; le dégagement du gaz cesse sans que tout l'acide soit détruit, et ce qui reste présente de nouvelles propriétés. Mais avant de les indiquer, il est essentiel d'observer qu'il y a eu ici altération et altération profonde, produite sous la seule influence de l'eau. Ce fait, à mon avis, est bien digne de remarque, et surtout bien capable de nous armer de défiance contre les corps nouveaux que nous obtenons à la suite des divers traitements qu'on fait subir aux matières organiques. Quoi qu'il en soit, je poursuis, et nous allons chercher ce que devient l'acide méconique soumis à cette influence.

Nous l'avions pris en belles écailles transparentes incolores, perdant 21,5p.0/0 d'eau par la chaleur; soluble dans quatre parties d'eau bouillante, tandis qu'après sa longue ébullition dans l'eau, les cristaux qui se précipitent sont durs, grenus, d'une couleur très-intense; ils ne contiennent plus d'eau de cristallisation et ils exigent au moins seize parties d'eau bouillante pour se dissoudre; mais c'est toujours un acide, et un acide très-énergique, rougissant fortement comme le précédent les dissolutions de fer au maximum. Voilà donc deux acides dont l'un préexiste dans l'opium, tandis que l'autre n'est que le résultat d'une altération.

Reste à savoir si cette altération est telle que cela constitue deux acides distincts.

Avant de procéder à de nouvelles recherches, remarquons que quand le second acide est obtenu par le moyen que nous venons de décrire, on ne peut rien conclure des différences que présentent ces deux corps, parce qu'on pourrait objecter qu'elles dérivent de la matière organique qui s'est formée par suite de la réaction indiquée, et dont une partie reste inhérente à l'acide qui en est fortement coloré. Il est heureusement possible d'obtenir la même modification sans qu'elle résulte de cette longue réaction. Ainsi,

lorsqu'on fait bouillir un méconate de chaux ou de potasse avec un acide capable d'en déterminer la décomposition, le dégagement d'acide carbonique se manifeste également et même parfois d'une manière si rapide, qu'on ne peut agiter le vase sans qu'il se produise une véritable effervescence. Il paraît que cette prompte réaction ne permet pas à la même matière colorante de se développer, du moins en aussi grande quantité, ou peut-être est-elle détruite à mesure qu'elle se produit. Ce qu'il y a de certain, c'est que l'acide qu'on obtient ainsi sans être aussi incolore que le premier, l'est infiniment moins que celui produit par l'eau seule. Il a ordinairement une teinte jaunâtre qui dépend en grande partie de sa plus forte cohésion et qu'on peut lui enlever en le passant au noir d'os purifié. Cet acide anhydre est le seul que j'aie connu pendant longtemps, parce que je soumettais toujours les liquides à l'ébullition pour faciliter la décomposition des méconates, et j'ai obtenu parfois l'acide méconique en concrétions hémisphériques très-volumineuses et aussi dures que la pierre. Tous les chimistes qui se sont occupés de l'acide méconique n'ont considéré comme pur que celui obtenu par sublimation, et ils ont supposé que celui dont nous venons de faire mention contenait une matière organique qui lui était étrangère. Nous allons voir ce qu'on doit penser de cette opinion.

Le moyen le plus prompt et le plus certain de savoir à quoi s'en tenir sur les véritables rapports qui existent entre ces acides est sans contredit d'en faire l'analyse élémentaire, et d'en déterminer la capacité de saturation, et enfin d'étudier comparativement leurs principales combinaisons : telle est en effet la marche que j'ai suivie.

Je commencerai par faire observer qu'aucun de ces trois acides, que je distinguerai désormais sous les épithètes d'*hydraté*, d'*anhydre* et de *pyrogéné*, n'a fourni, par sa combustion avec l'oxyde de cuivre, la plus légère trace d'azote. Cela posé, voici la moyenne des résultats fournis par plusieurs analyses de chacun de ces trois acides. J'ai eu recours pour ces analyses à la méthode décrite par

Liébig, dans le numéro de juin des Annales de chimie et de physique, 1831.

ACIDE MÉCONIQUE ANHYDRE.

Acide employé 0,500.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.		DEUXIÈME EXPÉRIENCE.	
Acide carbonique. .	0,821	Acide carbonique. .	0,816
Eau.	0,167	Eau.	0,162
d'où			
Oxygène.	50,865	Oxygène.	51,283
Hydrogène.	3,708	Hydrogène.	3,593
Carbone.	45,427	Carbone.	45,276
	100,000		100,000

MOYENNE.

Oxygène.	51,073
Hydrogène.	3,651
Carbone.	45,427
	100,000

nombres qui correspondent à

Carbone.	6,930 atomes.
Hydrogène.	6,870
Oxygène.	6,000

En adoptant la formule

$$C^7,\ H^7,\ O^1,$$

on aurait, pour la composition de l'acide méconique anhydre, les

nombres suivants, qui se rapprochent, autant qu'on peut le désirer, des précédents,

Oxygène	50,901
Hydrogène	3,705
Carbone	45,394
	100,000

ACIDE MÉCONIQUE HYDRATÉ.

Acide employé 0,500.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.		DEUXIÈME EXPÉRIENCE.	
Acide carbonique..	0,738	Acide carbonique..	0,745
Eau	0,205	Eau	0,200

d'où

Carbone	40,811	Carbone	41,199
Hydrogène	4,543	Hydrogène	4,436
Oxygène	54,646	Oxygène	54,365
	100,000		100,000

EN ATOMES.

C	6,849	C	6,939
H	9,324	H	9,149
O	7,000	O	7,000

ou

C^7, H^9, O^7,

ou

C^7, H^7, $O^6 + H^2$, O^1.

ANALYSE COMPARATIVE DES DEUX MÉCONATES DE PLOMB.

Un gramme de méconate de plomb laisse après sa combustion une quantité de métal et d'oxyde correspondant au poids total de

	Oxyde de plomb.....	0,541
d'où	Acide méconique.....	0,459

ce qui donne le nombre 1183,133 pour le poids atomique de l'acide méconique; le calcul indique que cet atome devrait peser 1178,745; nombre, comme on le voit, très-rapproché du précédent.

Un gr. de méconate de plomb fait avec l'acide hydraté, brûlé par l'oxyde de cuivre, donne

Acide carbonique.....	0,756
Eau.....	0,151

Un gr. de celui fait avec l'acide anhydre produit

Acide carbonique.....	0,760
Eau.....	0,149

ce qui établit de la manière suivante la composition de ces sels,

MÉCONATE DE L'ACIDE HYDRATÉ.		MÉCONATE DE L'ACIDE ANHYDRE.	
Oxyde de plomb..	54,100	Oxyde de plomb...	54,100
Carbone.....	21,014	Carbone.....	20,903
Hydrogène.....	1,674	Hydrogène.....	1,674
Oxygène.....	23,212	Oxygène.....	23,323
	100,000		100,000

ces nombres traduits en atomes donnent pour leur moyenne

C.....	7,080
H.....	6,916
O.....	6,000

ou $C^7\ H^7\ O^6$

100 parties de l'acide hydraté perdent par simple dessiccation 21,5 d'eau de cristallisation, quantité qui correspond à 3 atomes d'eau. Il y a donc dans cet acide 4 atomes d'eau, dont 3 peuvent être éliminés par la chaleur, et le quatrième alors seulement qu'il se combine avec les bases.

L'acide pyro-méconique a donné, en le brûlant par l'oxyde de cuivre, pour $0^g,500$,

Eau.....	0,164
Acide carbonique.....	0,966

d'où

Hydrogène.....	3,637
Carbone.....	53,420
Oxygène.....	42,943

EN ATOMES.

Carbone.....	9,7638
Hydrogène.....	8,1432
Oxygène.....	6,0000

nombres qui se rapprochent beaucoup de la formule

$C^{10}\ H^8\ O^6$ ou $C^{10}\ H^6\ O^5 + H^2\ O$.

Le pyro-méconate de plomb a été trouvé formé de

Oxyde.....	0,517
Acide.....	0,483

D'autre part, un gr. pyro-méconate de plomb sec a donné par l'oxyde de cuivre

Eau	0,122
Acide C.....	1,035

ou

Hydrogène.....	2,816
Carbone.....	59,281
Oxygène.....	37,903

EN ATOMES.

Hydrogène.....	5,975
Carbone.....	10,220
Oxygène.....	5,000

H^6 C^{10} O^5.

Cet acide perd donc 1 atome d'eau par sa combinaison avec l'oxyde de plomb. Son poids atomique calculé serait de 1301,814; celui déduit de l'expérience est de 1307,8.

Sa capacité de saturation est de 7,681, ou le cinquième de l'oxygène qu'il contient.

Toutes ces analyses concourent à démontrer d'une manière évidente que ces trois acides sont tout à fait distincts les uns des autres, et que le premier ne diffère du deuxième qu'en ce qu'il renferme 3 atomes d'eau de cristallisation qu'une température de 100° suffit pour lui faire perdre, plus un atome d'eau de compo-

sition qu'il n'abandonne qu'en se combinant aux bases énergiques. Ces résultats me parurent d'autant plus satisfaisants, qu'en lisant le beau mémoire de Berzélius sur les acides tartrique et racemiques, j'avais été tellement frappé de certaines analogies entre les propriétés de ces isomères et celles de mes deux acides méconiques, que je conçus, dès ce moment, l'espoir de fournir un nouvel exemple d'isomérie. Cependant, j'étais loin, je l'avoue, de prévoir alors que je serais assez heureux pour faire naître moi-même cette isomérie, en suivre les progrès et en assigner les causes. Ces curieuses observations nous conduisent, si je ne m'abuse, à élever des doutes sur la préexistence de l'acide racemique dans le tartre, et nous autorisent à le considérer comme le résultat d'une réaction entre les principes de l'acide tartrique. Cette opinion acquiert d'autant plus de probabilité, que M. Pelouze, jeune chimiste d'un mérite bien reconnu, a fait d'inutiles tentatives pour trouver l'acide racemique dans les principales variétés de tartre du commerce. Quoi qu'il en soit, j'ai voulu, avant d'admettre une complète analogie, m'assurer si les deux acides méconiques qui, une fois combinés aux bases, n'offrent plus qu'une composition identique, pouvaient être reproduits avec leurs qualités premières, et j'ai vu, en effet, qu'en décomposant les deux méconates de plomb par l'hydrogène sulfuré, j'obtenais d'une part de l'acide hydraté, et de l'autre de l'acide anhydre; ainsi, il n'est plus permis d'en douter, ces deux acides sont de véritables isomères, et je dois, pour me conformer à la nomenclature établie par Berzélius, désigner désormais l'acide anhydre qui est le dérivé, par le nom d'acide *paraméconique.*

Quand on soumet l'un ou l'autre de ces deux acides à une distillation sèche, ils fournissent environ le cinquième de leur poids d'un acide volatil très-fusible dont les premières portions passent presque incolores et toujours accompagnées d'humidité imprégnée d'acide acétique. A cette époque de la distillation, il ne se dégage aucun gaz; mais lorsque la chaleur devient plus intense, il se produit une huile empyreumatique qui se fige avec l'acide dans le col

de la cornue et colore le produit ; en même temps il se développe de l'acide carbonique mélangé d'une très-petite quantité de gaz inflammable. Sur la fin de l'opération et lorsque la chaleur est toujours soutenue, on voit se grouper à la voûte de la cornue quelques longues aiguilles d'un blanc mat, ramifiées en barbes de plumes, difficilement fusibles, très-acides et peu solubles, rougissant les dissolutions de fer au maximum. Il m'a été malheureusement impossible d'en faire un examen plus étendu, car non-seulement il s'en produit fort peu, mais en outre, ces cristaux, qui n'apparaissent qu'à la fin de la distillation, sont presque toujours détruits par les progrès de la chaleur. Je le regrette d'autant plus que j'aurais été bien curieux de m'assurer si ce deuxième acide pyrogéné qui, à coup sûr, est différent du premier, n'est point son isomère. J'espère pouvoir étudier plus tard cette question ; mais, revenant à mon sujet, je dirai qu'il suffit pour purifier l'acide pyro-méconique ordinaire, de le pulvériser et de le tenir longtemps comprimé entre des doubles de papier joseph, afin de le priver de l'acide acétique et de la majeure partie de l'huile empyreumatique dont il est imprégné, puis on le dissout à chaud, soit dans l'eau, soit dans l'alcool pour l'obtenir cristallisé par refroidissement. C'est le seul, comme je l'ai déjà dit, qui ait été connu et étudié ; voici les propriétés qui lui ont été attribuées. Cet acide est incolore, il peut être sublimé de nouveau et sans reste, il se dissout également bien dans l'eau et dans l'alcool. Cependant celui-ci, à température égale, en dissout davantage ; il se fond entre 120 et 125°, et coule comme une huile. Du reste, on ne peut guère compter sur ce qu'on a dit de ses combinaisons salines, car il est à remarquer qu'on en a souvent obtenu directement avec l'infusion d'opium, et que dans ce cas on a eu tantôt affaire à l'un des acides dont il a été mention, tantôt à l'autre, et de là vient qu'on attribue le peu de solubilité des méconates de chaux et de baryte à des matières étrangères ; attendu, dit-on, que l'acide sublimé ne précipite par aucune de ces bases. Avec un peu plus d'attention, on eût reconnu que ces différences de solubilité dépendaient, non de matières étrangères, mais de la matière même

des acides qui faisaient partie de ces combinaisons. Ainsi, la plupart des méconates à bases terreuses ou métalliques sont peu solubles, et le contraire a lieu, en général, pour les pyro-méconates. Cependant celui de plomb est à peu près insoluble, quoique l'acétate de plomb versé dans une dissolution d'acide pyrogéné n'y occasionne pas de précipité; mais cela tient uniquement à ce que ce sel est soluble dans un excès de son propre acide ou dans l'acide acétique. Il faut donc le préparer avec l'oxyde de plomb hydraté, et c'est alors qu'on peut juger de son peu de solubilité, car aussitôt que l'acide approche de la saturation on voit tout le méconate se déposer.

La capacité de saturation de cet acide déduite de son analyse et de la composition du méconate de plomb a été trouvée assez forte, bien qu'inférieure à celle des deux autres. Cependant si on sature des poids égaux de ces trois acides par une même solution alcaline on trouve une prodigieuse différence entre les quantités d'alcali absorbé. L'acide pyrogéné n'exige guère que le cinquième des deux autres, pour manifester une réaction sensiblement alcaline; et, chose fort étrange, les cristaux qui se forment dans cette liqueur alcaline sont de l'acide presque pur : il semblerait que ces deux corps ne peuvent se combiner par leur contact, du moins à la température ordinaire. Je me propose d'étudier ce phénomène de plus près et d'en rechercher la cause.

En exécutant cette saturation comparative, il est encore une autre observation curieuse à faire, c'est que la solubilité des sels marche d'une manière inverse pour les acides méconique et paraméconique. Ainsi quand le premier a à peu près atteint la moitié de sa saturation, on voit le bi-méconate de potasse, qui est fort peu soluble, se précipiter, tandis que l'autre, arrivé au même point, reste parfaitement dissous. On remarque précisément le contraire lorsque la saturation s'achève; le bi-méconate se redissout peu à peu et le liquide reprend toute sa transparence quand il contient assez d'alcali; mais le para-méconate se précipite quand il est saturé. Il en est de même pour l'ammoniaque. Le bi-méconate de cette base est très-peu soluble.

Les acides méconiques résistent fortement à l'action de l'acide sulfurique, et c'est à tort qu'on a dit tout récemment qu'on devait craindre d'employer pour la décomposition du méconate de baryte un excès d'acide sulfurique, parce que l'acide méconique serait charbonné : ce n'est qu'après un long temps d'ébullition que l'acide sulfurique à 66° réagit assez fortement sur l'acide méconique pour qu'il y ait dégagement d'acide sulfureux, et le liquide conserve la propriété de rougir les dissolutions de peroxyde de fer presque indéfiniment. Mais avec l'acide nitrique il en est tout autrement : la réaction est si prompte, qu'on ne peut l'exercer que sur de petites quantités à la fois, autrement il y a projection du mélange. Il se produit par cette réaction une très-grande quantité d'acide oxalique. Quant à l'acide muriatique, il n'exerce d'autre influence sur l'acide méconique que de diminuer sa solubilité dans l'eau.

Je n'entrerai pas dans de plus longs détails sur ces réactions, je craindrais d'abuser de l'indulgence de l'Académie, et je me hâte de terminer par la remarque suivante ce chapitre déjà trop long :

Lorsqu'on voit ainsi une série de corps qui semblent dériver les uns des autres, la première idée qui s'offre à l'esprit, c'est que ces corps ont un type commun qui se trouve plus ou moins modifié par des matières étrangères. Mais s'il en était ainsi pour le cas qui nous occupe, la capacité de saturation irait toujours croissant à mesure qu'on approcherait davantage de la pureté, et à ce compte notre acide pyrogéné devait l'emporter par sa capacité sur les deux autres, et c'est précisément le contraire qui arrive. Cependant, si nous observons que ces trois acides méconiques conservent, au milieu de toutes ces perturbations, une propriété commune qui est comme le type de la famille, celle de rougir les persels de fer, il nous faudra bien admettre l'existence d'un radical inamovible qui porte son caractère essentiel partout. On me permettra sans doute de rappeler ici que j'ai toujours insisté sur l'existence probable de radicaux composés pour les acides organiques, et que j'ai formellement annoncé, conjointement avec M. Boutron, que l'acide benzoïque ne préexistait que par son radical dans l'huile essentielle

d'amandes ameres. Cette idée, qui pouvait sembler paradoxale alors, vient d'être confirmée par les nouvelles expériences de M. Liébig, et elle donne, soyons-en certains, la clef d'un grand nombre de phénomènes dont les explications laissent encore beaucoup à désirer.

Berzélius, dans son cinquième volume (p. 163), nous a fait apercevoir que la cinchonine et la quinine pouvaient être considérées comme deux oxydes différents d'un même radical. Les dernières recherches de M. Pelletier l'ont conduit à donner encore plus d'extension à ces nouvelles vues, et on remarque que de toutes parts nous pénétrons plus avant dans la composition organique; mais on ne peut se dissimuler qu'il reste encore beaucoup à faire pour débrouiller cet immense chaos.

CHAPITRE IV.

A mesure que l'analyse organique fait des progrès, nous demeurons plus convaincu qu'une des grandes difficultés qu'elle présente est d'extraire les corps tels qu'ils préexistent, car leurs éléments, et nous venons d'en acquérir de nouvelles preuves, sont souvent unis par un lien si faible, que sous les moindres influences nous les voyons varier et d'ordre et de proportion. On ne pourra donc compter désormais sur les résultats d'une analyse de ce genre, qu'autant qu'on aura eu recours à des moyens d'extraction simples et presque mécaniques, ou bien lorsque les mêmes produits auront été obtenus par des méthodes différentes. J'ai été chargé il y a peu de temps, par la société de pharmacie, d'examiner un procédé qui a été proposé par M. William Gregory, d'Édimbourg, pour extraire la morphine; ce procédé consiste à faire dissoudre, comme d'habitude, l'opium dans l'eau; à rapprocher la dissolution en consistance convenable, et à décomposer par une dissolution de muriate de chaux. Il se forme un précipité de méconate de chaux, et la morphine est retenue dans la liqueur à l'état de muriate; on rapproche

pour faire cristalliser le sel, et on réitère les cristallisations pour l'obtenir parfaitement blanc, puis on décompose le muriate pour isoler la morphine.

La première fois que je répétai ce procédé, j'en fus peu satisfait, et je n'obtins guère que la proportion ordinaire de morphine; tandis que l'auteur l'annonçait devoir être plus élevée d'un bon tiers. Présumant que cette différence pouvait dépendre des qualités d'opium employées de part et d'autre, j'écrivis à M. Gregory pour le prier de me céder quelques livres de l'opium dont il se servait. Il eut l'obligeance de m'en envoyer un échantillon, et il me fit observer qu'il ne décomposait point son muriate de morphine, attendu que ce sel avait été substitué dans le pays, avec le plus grand avantage, à toutes les autres préparations d'opium. Je fis donc un nouvel essai et je partageai cet échantillon en deux parties égales: l'une fut traitée par la méthode de Gregory pour obtenir le muriate; l'autre fut soumise au traitement habituel pour extraire immédiatement la morphine. Je reconnus bientôt que l'opium de M. Gregory était d'une qualité supérieure à celui que nous trouvons ordinairement dans le commerce. Mais la quantité de morphine que j'obtins de l'un des deux essais était loin de représenter la proportion de muriate recueillie dans l'autre, bien que ce sel, parfaitement blanc, ne retînt aucune portion d'eau de cristallisation. Je soupçonnai donc que le muriate de Gregory renfermait quelque chose d'étranger; je le soumis à différents essais qui ne m'y firent rien découvrir. Je supposai d'abord que ce muriate s'était trisulé avec la chaux; mais la calcination n'y décélait pas la plus légère trace de matière inorganique; une dernière expérience me parut propre à obtenir quelque certitude à cet égard.

Je pris poids égaux de muriate de Gregory, et de muriate fait directement avec de la morphine très-pure; je les décomposai l'un et l'autre par de l'ammoniaque en me mettant rigoureusement dans les mêmes circonstances pour les deux cas; j'avais agi sur 5 gr. Le muriate de Gregory me fournit 4^{gr}, 10 de morphine, et l'autre 4^{gr}, 55.

Frappé de cette différence et n'en pouvant trouver la cause, ayant agi sur une trop petite quantité, je résolus de répéter l'expérience très en grand. 100 livres d'opium furent mises en traitement à ma fabrique et l'opération fut confiée à M. Berthemot, jeune chimiste qui s'est déjà fait connaître avantageusement par plusieurs observations intéressantes qui ont été publiées dans les recueils périodiques : elle fut conduite avec tout le soin possible et eut un plein succès.

Ce fut à cette époque que MM. Pelletier et Couerbe firent connaître leurs intéressantes découvertes de la narcéine et de la méconine; c'était un motif de plus pour éveiller notre attention et rechercher ces nouveaux produits que je n'avais pas encore eu le bonheur de rencontrer. L'occasion était belle, le procédé de Gregory étant d'une extrême simplicité, on avait droit de s'attendre à obtenir tous les produits sans altération, et j'avais fondé les plus grandes espérances sur nos prochains résultats. Cependant l'opération touchait à son terme sans que nous eussions aperçu la moindre particularité. Enfin il ne nous restait plus qu'à décomposer le muriate pour rechercher la cause du déchet observé primitivement. Je fis opérer sur un kilogr. seulement; et le poids de morphine obtenue fut encore cette fois inférieur à ce que comportait la proportion de muriate employé. Les eaux-mères réunies aux eaux de lavage furent évaporées, et, après concentration convenable, nous obtînmes une masse cristalline qui, soumise à la presse, présenta les caractères de l'union triple d'une matière organique, de l'acide hydro-chlorique, et de l'ammoniaque. Brûlés sur une lame de platine, ces cristaux ne laissaient aucun résidu. L'ammoniaque ne formait aucun précipité dans leur solution. Cependant, si on broyait ces cristaux avec une dissolution de potasse caustique un peu étendue, il s'en exhalait une forte odeur d'ammoniaque, et on voyait se réunir au fond du vase une petite masse translucide et visqueuse qui semblait être une matière grasse. Je crus avoir enfin rencontré la *méconine;* mais, en poursuivant l'examen, je reconnus bientôt que c'était un corps tout différent; en effet, le globule visqueux qui

s'était réuni au fond de la capsule perdit peu à peu de sa transparence, et tout en devenant opaque, il augmenta de volume et acquit une telle consistance, qu'une fois séparé de la liqueur surnageante, et lavé avec une petite quantité d'eau froide, je pus le réduire en poudre. Une portion de cette matière, qui paraissait s'être transformée en une espèce d'hydrate, fut soumise à l'action de l'eau bouillante; elle fut dissoute en partie et communiqua à l'eau une alcalinité très-prononcée. Ce n'était donc point de la méconine, du moins à s'en rapporter à ces simples essais. Mais pour acquérir plus de conviction à cet égard, je cherchai à obtenir ce produit dans son plus grand état de pureté, et mon premier soin fut de soumettre la masse cristalline dont j'ai fait mention à une nouvelle cristallisation. J'obtins cette fois de petites houppes soyeuses et mamelonnées parfaitement blanches qui ne contenaient plus d'ammoniaque. L'eau-mère en fut soustraite à l'aide de papier joseph, et je traitai une certaine quantité de ces cristaux par une solution de potasse caustique. Les mêmes phénomènes déjà indiqués se reproduisirent, et je recueillis sur un filtre tout l'hydrate pulvérulent qui s'était déposé au fond de la capsule; je le lavai en l'arrosant de temps à autre avec des petites quantités d'eau froide. Puis je laissai sécher et je le traitai par de l'éther bouillant, que l'expérience m'avait démontré être son meilleur dissolvant. Une partie seulement de cette poudre fut dissoute, l'autre résista. La dissolution qui ramenait au bleu le tournesol rougi fut abandonnée à une évaporation spontanée; il se forma bientôt sur les parois supérieures du vase, et à une assez grande distance du niveau du liquide, de petites plaques radiées dures et transparentes, qui devenaient autant de centres de cristallisation alimentés par des stries ascendantes. Cependant cette cristallisation était fort limitée et l'évaporation ne semblait plus faire de progrès. Le résidu liquide avait acquis une consistance presque sirupeuse. Pensant que l'eau était probablement nécessaire à la formation des cristaux, j'en ajoutai et je vis immédiatement se précipiter une foule de petites aiguilles très-blanches, dont le nombre augmenta à tel point que

la masse en fut presque solidifiée ; j'ajoutai encore un peu d'eau et je jetai le tout sur un filtre. Ces cristaux une fois séchés ont présenté les caractères suivants :

Exposés à la chaleur sur une lame de platine, ils se brûlent avec flamme et ne laissent aucun résidu. Chauffés dans un tube recourbé, ils n'entrent en fusion qu'à 150° environ : si on laisse refroidir immédiatement après la fusion, le tout ne présente plus qu'une masse cristalline ; mais si on continue l'action de la chaleur, le liquide oléagineux grimpe le long des parois, semble fuir la chaleur, mais ne se volatilise cependant pas. Délayés dans l'eau, ils manifestent une alcalinité très-sensible, même à froid.

1000 parties d'eau à	15°	en dissolvent	12,6
1000..... à	43°.....		37
1000..... à	100°.....		58,8

Lorsqu'on en ajoute dans l'eau bouillante plus qu'elle n'en peut dissoudre, l'excès entre en fusion et forme une couche comme huileuse, au fond du vase. Cette solution aqueuse fournit par un refroidissement bien ménagé des cristaux isolés transparents et parfaitement terminés.

Cette matière, à laquelle j'ai donné le nom de *codéine,* est insoluble dans les solutions alcalines ; elle se combine bien avec les acides et forme de véritables sels ; le nitrate surtout cristallise avec la plus grande facilité.

1 gr. d'acide muriatique sec sature 7,837 de codéine.

Le même poids d'acide sature 7,88 de morphine. On voit que ces deux capacités de saturation sont infiniment rapprochées.

La teinture de noix de galle détermine un abondant précipité dans la dissolution de codéine, ce qui la distingue essentiellement de la morphine, dont elle diffère d'ailleurs par beaucoup d'autres caractères. Ainsi l'acide nitrique ne la rougit pas, elle ne bleuit pas par les persels de fer, etc.

L'analyse élémentaire m'a fourni les proportions suivantes :

EN CENTIÈMES		Divisant par les poids atomiques correspondants.	
Carbone.....	71,339	Carbone.....	0,93330
Azote.....	5,353	Azote.....	0,06047
Hydrogène.....	7,585	Hydrogène....	1,21550
Oxygène.....	15,723	Oxygène.....	0,15720
	100,000		

Partant comme Liébig de 2 d'azote et établissant les proportions

$$0{,}06047 : 0{,}933 :: 2 . x, \text{ etc.}$$

on aura

Carbone.....	30,86
Azote.....	2,00
Hydrogène.....	40,00
Oxygène.....	5,19

ou en nombre rond

$$C^{31} + AZ^{2} + H^{40} + O^{5}.$$

Calculant d'après cette formule le poids atomique de la codéine, on obtient le nombre 3296, 206.

Ce poids, déduit de la capacité de saturation prise avec le gaz hydro-chlorique sec, donne 3250, 93.

On trouve par expérience que 100 de codéine contiennent 6,5 d'eau, d'où on tire la proportion suivante :

$$93{,}5 : 6{,}5 :: 3296{,}2 : x = 229{,}10.$$

Divisant par le nombre 112, 48, poids de l'atome d'eau, on a pour quotient 2,03, d'où on peut conclure que la codéine hydratée contient

1 atome codéine; 2 atomes d'eau.

Voilà donc encore une nouvelle substance trouvée dans l'opium, et on m'excusera sans doute si, par une prédilection bien naturelle, je la considère comme plus importante que la plupart des autres. Au reste, on en jugera par les motifs que je vais exposer.

Je rappellerai d'abord que ce nouveau produit est obtenu directement et sans avoir passé par toutes les filières qui autorisent à craindre une altération plus ou moins profonde. Elle marche de pair avec la morphine, la suit dans sa combinaison avec l'acide muriatique, et son extraction n'offre aucune difficulté. On ne voit donc nulle raison pour émettre plus de doute sur la préexistence de l'une que de l'autre. De plus, elle est alcaline et à ce caractère se rattache nécessairement un grand intérêt, car toutes les substances de ce genre ont une action plus ou moins marquée sur l'économie animale. Or on sait que la morphine, qui a passé jusqu'à présent pour l'unique principe actif de l'opium, n'en réunit cependant pas toutes les propriétés, et il y a longtemps que nous sommes avertis par les physiologistes qu'il reste là une lacune à remplir. La codéine viendra, selon toute probabilité, démontrer la justesse de leur observation; et déjà je puis annoncer que le jeune docteur Künckel, à qui j'ai remis une petite quantité de cette nouvelle base, s'est assuré qu'elle a une action très-prononcée sur la moelle épinière et qu'elle ne paralyse pas, comme la morphine, les parties postérieures. Elle se rapproche beaucoup, selon

M. Künckel, de l'action qu'exerce l'opium lui-même sur l'économie animale. Il a pu se convaincre d'ailleurs que, prise à une dose un peu élevée, elle est réellement délétère.

Ainsi, nous le voyons, il y a tout à attendre de cette substance considérée comme complément de l'opium; et si cet espoir se réalise, cela viendra nous dire pourquoi les praticiens d'Édimbourg préfèrent employer le muriate de Gregory à toutes les autres préparations d'opium.

MÉMOIRE

SUR

LA RESTAURATION DU PÉRINÉE

CHEZ LA FEMME

DANS LES CAS DE DIVISION OU DE RUPTURE COMPLÈTE DE CETTE PARTIE;

PAR M. ROUX.

(LU À L'ACADÉMIE DES SCIENCES, LE 6 JANVIER 1834.)

Le travail dont l'Académie veut bien me permettre de lui donner lecture aujourd'hui lui était destiné dès le moment où j'ai eu recueilli, et je crois pouvoir dire créé, les faits qui en sont la base. Il a rapport à une chose trop importante et trop féconde en résultats pour que je ne désirasse pas soumettre ces faits à l'examen et au jugement du corps savant dont j'ai toujours ambitionné le suffrage, qui tant de fois a daigné applaudir à mes efforts, et auquel je serais si glorieux d'appartenir. Pourquoi faut-il que j'aie été devancé dans mon projet par un événement qui remplit mon âme d'une vive affliction, et qu'au lieu de vouloir seulement acquérir de nouveaux droits à l'estime et à la bienveillance de l'Académie, j'aie à lui exprimer trop tôt, et trop directement, un

vœu qui, s'il s'accomplit, aura été préparé par tant de regrets! Je supplie l'Académie de croire à la sincérité de mon langage, et d'accueillir mon travail comme si je l'eusse soumis à sa sanction il y a quelques semaines, ainsi que je devais le faire, dès lors en temps plus opportun, ou tout au moins sous l'empire d'autres circonstances.

1. Vous le savez, messieurs, chez la femme comme chez l'homme la nature a rapproché, elle a même uni assez étroitement les uns aux autres, et mis dans une sorte de dépendance mutuelle pour leurs fonctions respectives, les organes extérieurs de la génération et ceux par lesquels se termine l'appareil de la digestion. Chez la femme particulièrement, ces derniers (le rectum et l'anus) sont accolés immédiatement au vagin et à la vulve : entre le rectum et le vagin, il n'y a que la cloison qui résulte de l'adossement de leurs parois. Un pont un peu plus solide, mais un simple pont, un espace de dix-huit à vingt lignes, sépare l'anus de l'entrée du vagin. Ce pont, qui soutient les organes au-dessous desquels il est situé, et qui limite en arrière les formes propres de la vulve, c'est le périnée : seule partie qui fasse résistance à l'extérieur dans l'acte de l'accouchement; susceptible toutefois d'une grande extension, et pouvant s'élargir, se distendre, et prêter assez pour que, généralement, l'expulsion du fœtus s'accomplisse sans désordre aucun, sans autre circonstance que l'ampliation momentanée de la vulve.

2. Ainsi, du moins, a été arrêtée la conformation des parties extérieures de la génération de la femme, et telle est la destination importante du périnée. Mais chez beaucoup de femmes le périnée n'existe pas : je me trompe, et je dois dire qu'il a été brisé, rompu, détruit d'une manière quelconque, en un mot, qu'il n'existe plus; car c'est chose inouïe, je crois, que les parties extérieures de la génération de la femme et l'anus se soient trouvées confondues par une disposition primordiale. Il n'est pas à ma connaissance qu'on ait vu naître des femmes, et que des femmes aient vécu avec une division originelle du périnée, et ne possédant qu'à demi les attributs

extérieurs de leur sexe; tandis qu'on voit si souvent la division congéniale des lèvres, de la voûte palatine, du voile du palais; tandis qu'on observe assez fréquemment encore la séparation du sternum en deux moitiés, celle des parois de l'abdomen, l'ectrophie de la vessie, l'hypospadias; toutes divisions occupant la ligne médiane du corps; toutes anomalies de conformation qui ont entre elles la plus grande analogie, reconnaissent à peu près la même origine, et proviennent, comme on le sait, dans le plus grand nombre des cas d'un arrêt de développement.

3. La division du périnée chez la femme est donc toujours le résultat d'un accident; toujours elle est l'effet d'une violence physique exercée sur cette partie. De quelque manière qu'elle ait été produite, de graves incommodités, des incommodités dégoûtantes en sont l'inévitable conséquence, et par elle s'évanouit une partie des charmes que la nature a réunis chez la femme pour assurer le rapprochement des sexes. On conçoit de quel intérêt il peut être de faire cesser cette horrible mutilation. Jusqu'ici les tentatives de l'art avaient eu peu de succès; et si la chirurgie n'avait pas tout à fait déclaré son impuissance, du moins montrait-elle peu de confiance dans ses ressources : on ne compte qu'en très-petit nombre dans ses fastes les cas dans lesquels on ait essayé de refaire un périnée par la suture. Combien de femmes, au contraire, ont été abandonnées, combien le sont encore, à l'une des plus tristes conditions qu'il y ait! Plus heureux que d'autres chirurgiens ne l'ont été, je suis parvenu à triompher d'une grande difficulté : je crois être en possession d'un moyen sur l'efficacité, et l'efficacité presque constante duquel on peut compter pour la reconfection du périnée. Des faits, et des faits déjà assez nombreux, eu égard à l'objet dont il s'agit, semblent ne laisser aucun doute à cet égard. Ce sont ces faits, avec leurs résultats curieux, que je viens communiquer à l'Académie. Je n'entreprendrai pas ici une description détaillée de tout ce qui a rapport aux ruptures ou aux divisions du périnée; le moment serait mal choisi pour entrer dans tous les développements qu'une telle matière pourrait com-

porter : quelques considérations préliminaires, tant sur l'origine de ces ruptures et leurs effets, que sur ce qui a été tenté pour réparer un tel désordre, suffiront pour le but que je me suis proposé.

4. Ce qui dispose le plus à la mutilation dont il s'agit, ce qui la produit dans le plus grand nombre des cas, ce sont les efforts de l'accouchement. Pour cela même, il n'est pas besoin d'une extrême étroitesse naturelle ou de quelque autre conformation défectueuse de la vulve ou des parties adjacentes : avec les meilleures dispositions de ces parties, une rupture peut advenir, parce que la tête de l'enfant est très-volumineuse; parce que le travail s'effectue avec trop de promptitude, surtout s'il s'agit d'une première parturition; parce que ce travail aura été mal dirigé, mal conduit; ou bien encore quand il faut en venir à l'application du forceps, si cette application n'est pas faite avec l'art et les précautions convenables. Toutefois, d'autres circonstances peuvent aussi donner lieu à une destruction complète ou incomplète du périnée chez la femme; telle une blessure causée par accident, bien que la région occupée par les parties extérieures de la génération et les régions circonvoisines soient peu exposées à l'injure des corps extérieurs; telle encore une ulcération gangréneuse, ou une gangrène proprement dite, comme il s'en développe ailleurs et sous l'influence de causes si variées. Ne pourrait-elle pas provenir aussi de quelque acte volontaire, mais criminel ou insensé? J'ai souvenance, sans pouvoir bien me rappeler la source où ce fait est consigné, qu'une fois cette mutilation du périnée a été le résultat d'une atroce vengeance exercée par un mari sur sa femme, qu'il savait lui être infidèle. Il n'y a pas jusqu'à l'art lui-même qui ne puisse, dans certains cas, occasionner un tel désordre : chez une des femmes dont j'aurai à parler spécialement, une division, la plus complète possible, du périnée avait succédé à une opération entreprise inutilement, je crois, pour guérir une simple fistule.

5. Par quelque cause et dans quelque circonstance qu'advienne

une division ou une rupture du périnée, et je comprends avec le périnée proprement dit la cloison recto-vaginale, cette division n'a pas toujours la même étendue, ne présente pas toujours la même manière d'être, et ne doit pas avoir infailliblement les mêmes résultats. Quelquefois, chose très-remarquable, c'est cette cloison recto-vaginale qui est seule rompue, le périnée restant intact. On croirait qu'alors il doit s'établir inévitablement une communication permanente du rectum avec le vagin, avec passage habituel d'une partie des matières fécales du premier de ces organes dans l'autre. Eh bien! non; des cas ont été vus dans lesquels la nature s'est suffi à elle-même pour opérer une guérison complète.

6. Le plus ordinairement, au contraire, c'est le périnée lui-même qui a éprouvé le principal désordre; et ce peut être une simple perforation, mais une perforation étendue, une déchirure centrale, par laquelle on a vu quelquefois sortir l'enfant tout entier. Ici encore la nature livrée à ses propres forces peut faire des efforts salutaires : que dis-je? constamment alors la déchirure disparaît, les parties se consolident sans réunion artificielle, sans suture. Dans d'autres cas, il s'agit d'une déchirure plus ou moins étendue de la seule partie antérieure du périnée; le sphincter de l'anus et l'anus lui-même conservent toute leur intégrité. Quoique ce cas semble moins grave que le précédent, moins heureuses peut-être sont les femmes qui ont eu le périnée rompu de cette manière : les efforts réparateurs de la nature sont toujours incomplets; une partie de la déchirure seulement se consolide; vient alors l'inconvénient grave, surtout pour une femme jeune encore, d'une vulve qui se prolonge beaucoup en arrière et qui est sans ressort, sans contractilité. D'autres fois, enfin, il y a division de tout le périnée, déchirure complète de cette partie, et cette division, cette déchirure peut s'étendre à une partie de la cloison recto-vaginale.

7. C'est à ce dernier cas seulement que je m'arrêterai; à lui seul se rapportent les faits que je dois faire connaître. C'est incontestablement le plus grave qui puisse se présenter, et malheureusement il n'est que trop commun. Parmi les accidents et les lésions physiques qui ne compromettent pas la vie, il n'en est guère de plus déplorables, et je conçois peu de conditions plus dignes de pitié que celle d'une femme qui a éprouvé une rupture complète du périnée et du sphincter de l'anus, avec ou sans déchirure d'une partie de la cloison recto-vaginale, et chez laquelle la partie inférieure du rectum et celle du vagin sont confondues en une sorte de cloaque. Dans ces cas, en effet, il n'y a rien à espérer des efforts de la nature; seule, elle est impuissante à réparer un tel désordre : il faudrait que l'art pût agir incontinent; et je dirai plus tard comment et pourquoi il ne le pourrait alors qu'avec quelques désavantages. Constamment donc les bords de la fente du périnée, ceux de l'échancrure qui existe à la cloison recto-vaginale, quand cette cloison elle-même participe à la rupture, restent séparés l'un de l'autre : d'abord ils suppurent, puis ils se cicatrisent isolément; et bientôt la solution de continuité revêt les apparences d'une conformation vicieuse naturelle. Toujours alors, à moins d'une heureuse intervention des ressources de la chirurgie, le périnée a complétement disparu; la vulve et l'anus ne forment plus qu'une seule et même voie : là où ces deux ouvertures étaient si distinctes l'une de l'autre et si bien séparées par le périnée, il n'y a plus qu'une fente unique, un sinus profond à bords, ou droits, ou irrégulièrement ondulés et revêtus par un tissu muqueux; et pour peu que la division s'étende à la cloison recto-vaginale, la partie inférieure du rectum et celle du vagin forment un vrai cloaque.

8. Combien est triste la condition d'une femme en cet état! Ce n'est pas qu'il soit interdit à cette femme de concourir encore à la propagation de son espèce; désormais elle pourra même éprouver le bonheur d'être mère sans l'acheter par de trop vives souffrances. Une dame dont je parlerai avait éprouvé une déchirure complète du

périnée dans un premier accouchement, et venait de mettre au monde un second enfant peu de temps avant que je lui fisse la suture de cette partie. J'ai connu une dame anglaise qui avait éprouvé le même malheur dans un premier accouchement, et qui était en possession d'une famille composée de douze enfants. Je suis sûr qu'on recueillerait dans le monde nombre de cas semblables; et peut-être qu'à force d'art, de ruse, d'adresse, et par je ne sais quelles supercheries, des femmes parviennent à cacher une infirmité si propre à inspirer du dégoût. Mais quand elle est connue, et pour que ce dégoût soit surmonté, ne faut-il pas ou le délire des sens porté à l'excès, ou un sentiment plus qu'ordinaire des devoirs presque sacrés qu'impose l'union conjugale? Non-seulement une femme chez qui le périnée n'existe plus n'est plus femme qu'à demi, au moins en ce qui concerne l'appareil extérieur de la génération; non-seulement elle a perdu, toute jeune qu'elle peut être, et qu'elle est le plus ordinairement, une partie des charmes physiques dont la nature l'avait pourvue; mais une des plus graves incommodités qu'il y ait, une incommodité dégoûtante l'afflige encore continuellement : son sort est presque aussi misérable que celui des personnes qui sont affectées d'un anus contre nature. Comme le sphincter de l'anus a été déchiré et ne peut plus se contracter, comme toute action a cessé à la partie inférieure du rectum, rien ne s'oppose à l'issue des gaz intestinaux aussitôt qu'ils parviennent au terme de leur cours, ni à la sortie ou continuelle, ou du moins trop souvent répétée, et presque involontaire des matières fécales. Sans doute celles-ci peuvent séjourner quelque temps encore dans l'intestin rectum quand elles y arrivent avec une certaine consistance; mais sont-elles molles, le besoin de les rendre se produit à tout instant; il est vif et pressant: et si elles sont encore à un état plus voisin de l'état liquide, elles s'échappent involontairement, inondent le vagin et toutes les parties voisines. Les femmes qui sont en proie à une telle infirmité sont presque toutes obligées de vivre dans une solitude contraire à leur âge, à leur sexe, à leurs habitudes; elles tombent dans une profonde tristesse, presque toujours leur santé s'al-

tère; elles perdent leur fraîcheur. Je connais peu de positions plus dignes de pitié.

9. Dès longtemps les chirurgiens ont pensé qu'il n'était peut-être pas impossible de reconstituer ou de refaire le périnée rompu dans l'accouchement. Quelques-uns seulement l'ont tenté; et si quelque chose doit étonner, c'est que ce projet n'ait pas été suivi avec plus d'ardeur, c'est qu'on n'ait pas fait plus d'efforts pour réussir. Sans doute l'état naturel de tension, ou le peu d'extensibilité des parties voisines du périnée, rend le rapprochement de ces parties difficile à opérer; sans doute la communication incessante ou continuelle d'une plaie qu'on veut réunir avec des organes d'où sortent continuellement aussi du mucus, des matières, des liquides, peut être un empêchement à la réunion de cette plaie; sans doute l'évacuation des matières fécales par l'anus, si elle devait se faire trop promptement, est une autre circonstance contre laquelle il faut être en garde; sans doute, enfin, c'est une chose désavantageuse que les parties qui entrent dans la composition du périnée soient si molles, si lâches, si peu charnues, et si peu propres conséquemment à éprouver une inflammation simplement adhésive. Voilà des difficultés à vaincre, des obstacles à éloigner; mais ces difficultés, ces obstacles ne sont point absolus, puisque déjà depuis longtemps, mais de loin en loin, on a obtenu quelques succès. Il s'agissait donc de trouver le moyen de réussir, ou toujours, ou dans le plus grand nombre de cas.

10. L'honneur de la première tentative appartient à la chirurgie française. C'est Guillemeau, disciple, émule et contemporain de notre Ambroise Paré, qui rapporte le premier fait relatif à la suture du périnée; c'est par lui que l'opération avait été pratiquée. Il avait mis en usage ce que nous appelons la *suture à points entrecoupés :* l'opération avait réussi. Indépendamment de la grande confiance que ce célèbre chirurgien inspire, le fait est rapporté avec les circonstances les plus propres à en garantir l'authenticité.

Je n'en puis dire autant d'un cas de succès attribué à un chirurgien obscur dont il est parlé dans les *Éphémérides des curieux de la nature,* recueil qui n'a pas toujours un caractère suffisant de vérité. Plus tard Mauriceau, Lamotte, Smellie ont paru croire qu'on pouvait entreprendre la restauration du périnée; ils la conseillent, indiquent la suture à points passés, mais sans dire s'ils ont réellement tenté cette opération, et sans faire connaître les résultats qu'ils en auraient obtenus. C'était y attacher peu d'importance; c'était en quelque sorte l'abandonner. On n'y pensait plus, en effet, lorsque, vers la fin du siècle dernier, deux chirurgiens français, Noël, de Reims, et Saucerotte, de Lunéville, l'entreprirent une fois chacun séparément, et l'entreprirent avec succès, l'un et l'autre en employant la suture qu'on nomme *suture entortillée.* Ces deux faits font époque dans la science. Pendant longtemps ils ont été les seuls connus, les seuls cités, et faisaient la base unique des brèves considérations qu'on trouve consignées sur la restauration du périnée dans nos ouvrages classiques. Noël et Saucerotte ont presque passé pour des inventeurs; on admira leur courage, mais sans montrer beaucoup d'empressement à marcher sur leurs traces. La chirurgie anglaise, si belle à tant d'égards, émule et rivale de la nôtre, s'est montrée tout à fait stérile sur ce point. Les chirurgiens français de notre époque ont montré presque tous la même indifférence, ou bien ont été découragés par quelques non réussites, sans rechercher aucunement si par des voies nouvelles on ne pouvait point arriver à de meilleurs résultats. L'homme célèbre qui avait été mon maître avant que je tinsse à lui par les liens du sang, et que la mort vient d'enlever à l'Académie, n'avait jamais, dans le cours de sa longue carrière, pratiqué la suture du périnée; et dans son grand ouvrage de chirurgie, il se borne à ne pas désapprouver les nouveaux essais qu'on voudrait faire, mais sans montrer beaucoup de confiance. Son contemporain d'âge et son égal en renommée, qui vit encore, M. Dubois, l'a faite une seule fois, et n'avait point réussi; le fils de ce Nestor de la chirurgie française, M. Paul Dubois, l'a tentée une fois aussi pareillement, à l'hospice de la ma-

ternité : même revers. L'un et l'autre avaient suivi les errements tracés par Noël et Saucerotte, c'est-à-dire, qu'ils avaient mis en usage la suture entortillée. Cependant, depuis que mes succès connus ont rappelé l'attention sur ce sujet, on parle d'une tentative, et d'une tentative heureuse faite par M. Dupuytren, il y a douze ou quinze ans, mais à laquelle il avait attaché peu d'importance ; et l'un de nos recueils périodiques de médecine, celui qu'on nomme *Revue médicale,* contient le récit d'un cas où cette suture du périnée a été pratiquée à peu près dans le même temps et avec un résultat également favorable, par M. Montain le jeune, l'un des plus habiles chirurgiens de Lyon ; et je dois à la vérité de dire que dans le cas dont il s'agit, cas dont j'ai eu connaissance il y a très-peu de temps, M. Montain a fait, pour une partie de son opération, quelque chose qui se rapproche du procédé dont je croyais avoir eu complétement la première idée.

11. Cependant aussi, et depuis le commencement de ce siècle, quelques chirurgiens allemands ont eu pitié de ces malheureuses femmes chez lesquelles le périnée a été rompu dans l'accouchement. Ils ont essayé de faire revivre la suture de cette partie; surtout ils ont discuté avec sagesse la question de l'époque la plus opportune pour entreprendre cette opération : tels Mursinna, Mentzel, Osiander, et plus spécialement encore M. Dieffenbach à Berlin. Les uns proposent la suture à point passés ou séparés, les autres recommandent la suture entortillée. Aucun n'a eu la pensée d'appliquer ici cet autre moyen de synthèse qui a nom *suture en-chevillée;* et, s'il faut en croire M. Dieffenbach, il n'y a guère à espérer de succès qu'en pratiquant deux incisions parallèles sur les côtés de la vulve et du périnée, incisions par lesquelles on prévient le tiraillement et une trop forte distension des parties voisines de celles qui doivent être embrassées dans des anses de fil, ou traversées par des aiguilles. C'est ainsi qu'a agi le chirurgien de Berlin dans plusieurs cas ; et deux fois, mais deux fois seulement ses efforts ont été couronnés de succès. Osiander a pareillement réussi

une fois, et sans le secours de ces incisions verticales sur les cotés du périnée. On connaissait ces nouvelles tentatives faites par les chirurgiens allemands, on voulait bien croire à la vérité de quelques succès obtenus par eux; mais ces succès étaient considérés comme des faits tout à fait exceptionnels. En France surtout on ne pouvait croire qu'il fût jamais possible de trouver pour la restauration du périnée une méthode applicable à tous les cas, et qui dans la main même des chirurgiens les plus habiles pût offrir des probabilités suffisantes de succès. On avait donc abandonné cette opération comme étant, sinon trop difficile dans l'exécution, du moins trop incertaine et trop chanceuse dans ses résultats.

12 Tel était donc naguère l'état de la science, telle était aussi parmi nous, en France, à Paris, la disposition des esprits relativement à la suture du périnée; et moi-même, si impatient, si désireux de voir reculer le plus possible les limites de ce que dans cette enceinte, il y a quatre ans, j'ai appelé *la chirurgie restauratrice*, et qui ai tant recherché les occasions de concourir aux progrès de l'art sous ce rapport, moi-même, dis-je, je partageais la prévention générale contre cette opération; je n'avais pas la moindre velléité de renouveler les tentatives faites à différentes époques par les chirurgiens dont j'ai parlé, lorsque se présenta le cas suivant qui a fait une si grande révolution dans mes pensées, et qui sera, j'en suis convaincu, le signal d'un heureux progres en chirurgie, et un premier pas assuré vers une conquête durable.

13. Une jeune dame de la Normandie vint à Paris au mois de décembre de l'année 1831, il y a deux ans. C'était l'épouse de M. ***, médecin dans une petite ville du département de la Manche; elle avait vingt-deux ans. Mariée à dix-neuf, elle était devenue enceinte presque immédiatement après son mariage, et accoucha lorsqu'elle touchait à peine à sa vingtième année. L'accouchement avait été long, pénible; on avait dû recourir a l'application du forceps; et

les efforts nécessaires pour amener au dehors la tête de l'enfant, et mettre fin à son séjour trop prolongé dans l'excavation du bassin, efforts bien ou mal conduits, bien ou mal dirigés, avaient produit la déchirure du périnée. Cette déchirure avait été aussi complète que possible; la cloison recto-vaginale y avait participé dans l'étendue d'un demi-pouce environ. La nature n'avait rien fait pour la réparation du désordre. Deux ans s'étaient écoulés depuis l'événement lorsque cette jeune dame, pour qui j'avais été consulté d'avance, me fut présentée, et lorsqu'il me fut loisible de l'examiner attentivement. La déchirure s'était faite très-exactement sur la ligne médiane; les bords parfaitement cicatrisés étaient d'ailleurs souples, flexibles, sans induration, sans callosités aucunes. On eût dit, à leur apparence, une division congéniale plutôt qu'une fente du périnée provenant d'une solution de continuité accidentelle. L'anus et la vulve ne formaient qu'une seule et grande ouverture; il fallait en écarter les bords pour apercevoir ses limites sur la cloison recto-vaginale. Toutes les incommodités dont j'ai parlé précédemment, et qui sont la suite inévitable de toute déchirure complète du périnée, cette jeune dame les éprouvait au plus haut degré. Aussi était-elle tombée dans la plus grande tristesse et la plus profonde mélancolie : et cependant, pour être moins fatiguée par le besoin trop souvent répété d'aller à la garde-robe, ou pour éviter l'issue involontaire des matières fécales, elle avait la ressource des préparations d'opium, dont elle éprouvait l'action astringente d'une manière remarquable, et au moyen desquelles elle pouvait se procurer à volonté et au besoin une constipation plus ou moins longtemps prolongée. Malgré cela, elle s'était réduite à ne prendre que la quantité d'aliments bien strictement nécessaire à l'entretien de la vie, en même temps que, dans la crainte d'être surprise par un besoin impérieux de rendre des vents ou des matières, besoin qu'elle n'aurait pu maîtriser, elle vivait presque entièrement retirée du monde.

14. Pressé par le mari de cette jeune dame, j'accédai aux vœux de

l'un et l'autre, et je consentis à faire une opération sur laquelle je ne connaissais alors avec quelques détails que les observations déjà un peu anciennes de Noël et de Saucerotte, et les tentatives plus nouvelles de M. Dieffenbach. Je n'espérais pas réussir; et cependant la forme régulière de la solution de continuité, le si vif désir qu'avait la malade d'être affranchie de ses incommodités, et d'être délivrée de sa triste position, la patience et le courage dont elle se sentait capable, quelles que dussent être les douleurs de l'opération, son âge, la parfaite santé dont elle jouissait malgré sa profonde affliction, et bien qu'elle eût perdu une partie de son embonpoint naturel, tout semblait se réunir pour autoriser l'entreprise. Je devais aussi considérer comme une circonstance favorable la facilité que cette jeune dame avait acquise de supporter pendant un temps assez long le régime le plus austère, et de se procurer une constipation prolongée au moyen des préparations d'opium. De cette manière, en effet, il y avait possibilité de suspendre les évacuations alvines, non pas seulement pendant quelques jours, mais pendant tout le temps nécessaire à l'entière et parfaite consolidation du périnée, si cette consolidation devait avoir lieu, et d'éloigner ainsi un des plus grands obstacles au succès de l'opération: et toutefois ce que j'ai cru devoir faire à cet égard chez la dame dont il s'agit ne conviendrait certainement pas dans d'autres cas. J'ai pu, chez elle, profiter d'une circonstance toute particulière, et l'on verra que je l'ai fait sans inconvénient; mais il doit être généralement préférable de provoquer de bonne heure des selles très-molles ou même liquides, afin d'éviter toute dilatation de l'anus et tout tiraillement des parties dont on veut obtenir la réunion. Telle a été ma règle de conduite dans toutes mes autres sutures du périnée.

15. L'opération tant désirée par cette jeune dame fut faite une première fois au mois de janvier de l'année dernière (1832). Comme je n'avais encore aucune expérience propre relativement à la suture du périnée, je crus devoir suivre la route frayée, et je fis

choix pour moyen de rapprocher les parties amenées à l'état de cruentation, et de les maintenir dans un contact exact, de la suture dite *entortillée*, dans laquelle les bords d'une plaie restent traversés pendant plusieurs jours par des aiguilles droites ou verges métalliques, et sont maintenus rapprochés par un long fil qu'on contourne un grand nombre de fois sur les extrémités libres de ces tiges inflexibles. C'est celle qu'on pratique si communément aux lèvres, aux paupières et sur d'autres parties du visage, et ailleurs encore toutes les fois qu'on tient à ce que la cicatrice qui doit suivre la guérison d'une plaie soit simplement linéaire, et qu'elle soit exempte autant que possible de difformité, ou bien encore quand on veut contenir un liquide dont le passage entre les bords d'une plaie pourrait mettre empêchement à leur adhésion. A peine est-il besoin de dire qu'on emploie des aiguilles courtes ou longues, petites ou grosses, selon la force et l'épaisseur des bords de la plaie qu'il s'agit de réunir : nulle part il n'en faut d'aussi longues et d'aussi grosses que pour le périnée.

16. En choisissant la suture entortillée pour l'opération que j'avais à faire, je suivais une route frayée, je n'étais qu'imitateur. Comme à tous ceux qui ont parlé jusqu'ici de la restauration du périnée, ou qui l'ont tentée, cette suture me paraissait le procédé à l'aide duquel on pouvait le mieux établir entre les parties fraîchement avivées un contact si exact, une coaptation si parfaite qu'elles ne pussent pas être humectées par les mucosités du vagin, ou par les excréments liquides pendant le temps nécessaire à leur consolidation. Il ne me vint pas d'abord à l'esprit que la chirurgie possédait, pour atteindre ce but, un moyen encore plus efficace; je ne pensai point à une suture qui, jusqu'ici, n'avait été affectée qu'aux plaies des parois de l'abdomen, et qu'on nomme *suture enchevillée* ou *emplumée;* et peut-être a-t-il fallu la non réussite d'une première opération faite avec la suture entortillée pour que je songeasse plus tard à appliquer cet autre moyen de synthèse à la restauration du périnée.

17. J'avais fait construire tout exprès de très-longues et très-grosses aiguilles d'argent, garnies à l'une de leurs extrémités d'un fer de lance amovible en acier. Une première partie de l'opération consista dans l'avivement des bords de la division : j'enlevai de chaque côté un lambeau à peu près quadrilatère, long d'un pouce et demi à deux pouces environ, mais fort mince; car, bien que les parties qui avaient formé autrefois le périnée fussent assez souples, et pussent être assez aisément rapprochées d'un côté à l'autre, encore devais-je éviter de leur faire éprouver une perte de substance trop considérable. Mais en formant chacun de ces deux lambeaux, je pris le soin d'anticiper un peu sur la peau d'une part, et d'une autre part sur les parois du vagin; et tous deux furent assez prolongés de l'anus vers les grandes lèvres, pour qu'après la suture faite, et l'opération terminée, l'entrée du vagin fût plutôt un peu trop étroite que trop large. Je voulais aussi mettre en contact des surfaces aussi étendues que possible, et augmenter de cette manière les chances de succès de l'opération. J'avivai séparément et en second lieu, les deux lèvres de la petite fente qui se prolongeait sur la cloison recto-vaginale, et les embrassai dans un point de suture simple. Tout cela fait, je procédai à la suture entortillée sur les parties molles extérieures, c'est-à-dire sur le périnée proprement dit.

18. Avoir indiqué précédemment en quoi cette suture consiste, c'est presque avoir dit comment on la pratique, et comment je l'ai faite dans le cas dont il s'agit : une description détaillée de la manière dont elle a été exécutée serait chose superflue. On présume bien que j'ai dû placer plusieurs aiguilles; j'en ai mis quatre, en effet, séparées les unes des autres par des intervalles d'un demi-pouce : on devine le soin que j'ai eu de les engager d'un côté, et de les faire sortir de l'autre à plus d'un pouce de chacune des lèvres de la division; celui que j'ai eu de les faire pénétrer profondément, jusque près des parois du vagin, de manière à comprendre dans les points de suture toute l'épaisseur du périnée; et comment enfin, en con-

tournant les fils sur les extrémités des aiguilles, je dus être attentif à ne les serrer ni trop ni trop peu. Sous ces divers rapports, tout se passa au gré de mes désirs; et bien que les parties du périnée qui restaient à découvert me parussent un peu tendues, elles ne étaient pas assez pour qu'on pût craindre une déchirure des parties embrassées par les points de suture : je me dispensai donc, et il l'était réellement inutile de faire les entailles latérales qui ont été tant recommandées par M. Dieffenbach. Je retranchai les bouts trop longs des aiguilles : sous ces bouts ainsi réduits, je plaçai du linge pour garantir la peau de toute pression douloureuse; après quoi, j'avisai au moyen de tenir les cuisses exactement rapprochées l'une de l'autre et de prévenir leur écartement involontaire pendant le sommeil.

19. Médecin, comme je l'ai dit, et médecin habile, le mari de la malade l'entoura de la plus tendre sollicitude, lui prodigua des soins dirigés avec une grande intelligence. Malgré ses efforts et les miens, malgré le courage dont la malade avait fait preuve, et la patience qu'elle montra consécutivement à l'opération, je devais être une première fois trompé dans mon attente, ou plutôt mes craintes devaient se réaliser. Cependant les choses se passèrent d'abord de la manière la plus heureuse, ou du moins la plus favorable en apparence. Il ne survint pas d'accidents : autant qu'on pouvait juger de l'état des bords de la plaie et des autres parties cachées par les fils de la suture, l'inflammation ne s'y était développée qu'à un degré convenable; la malade n'y ressentait qu'une douleur légère. On avait le soin de la sonder chaque fois qu'elle éprouvait le besoin de rendre l'urine, pour éviter l'écoulement de ce liquide sur la plaie; et la seule diète, mais une diète absolue, avait suffi pour suspendre les évacuations alvines, qui ne se rétablirent même que quelques jours après l'entière désunion des parties. Nous étions arrivés au septième jour; six jours pleins s'étaient écoulés depuis le moment de l'opération, lorsque je me décidai à retirer les aiguilles et à enlever les fils qui avaient servi à faire la

suture. On eût dit alors que la réunion s'était opérée; les deux parties du périnée se maintenaient en contact immédiat. Mais une matière simplement glutineuse mettait momentanément obstacle à leur rétraction; la réunion n'était qu'apparente : deux jours après tout était désuni; après quoi les choses reprirent promptement leur aspect primitif.

20. Malgré ce fâcheux résultat, bien propre à décourager, il fut bientôt décidé entre la patiente, son mari et moi qu'une nouvelle opération serait pratiquée. Nul motif, en effet, autre que la crainte de ne pas mieux réussir une seconde fois que la première, ne pouvait détourner de l'entreprendre : je n'avais eu à vaincre que des difficultés fort ordinaires, et aucun changement n'était advenu par le fait de la première opération, qui dût être une source de difficultés plus grandes, ou d'obstacles nouveaux à la réussite : les parties sur lesquelles il fallait agir devaient avoir repris bientôt leur souplesse et leur extensibilité première; elles n'avaient éprouvé aucune déchirure nouvelle, aucune nouvelle déformation, puisqu'aucune escarre ne s'y était formée; et l'on ne devait tenir aucun compte de la perte de substance si légère qui avait été produite par un premier avivement des bords de la déchirure. Mais la malade avait été affaiblie par un assez long séjour au lit, par la diète rigoureuse à laquelle elle avait été soumise pendant quelque temps, par le chagrin que lui causa le non succès d'une première tentative, et par la crainte qu'elle dut naturellement concevoir de ne pas recueillir le prix d'un nouveau courage, et d'une nouvelle résignation : il fallait lui laisser reprendre des forces, et se donner le temps de voir renaître l'espérance dans son âme. Puis, nous avions atteint le fort de la saison rigoureuse; c'était un moment peu favorable pour une opération qui n'avait rien d'urgent. Enfin, nous étions alors dans la pénible attente de l'épidémie qui a fait parmi nous de si grands ravages, et bientôt, en effet, éclata cette épidémie, que la malade eut le courage de braver, et qui ne l'empêcha pas de rester à Paris. Ainsi plusieurs mois s'écoulèrent, et nous ne

trouvâmes le moment opportun pour entreprendre une opération nouvelle qu'à la fin du mois de mai.

21. Toutefois, durant ce long délai ou cette longue temporisation, je méditai sur ce qui avait pu me faire échouer une première fois, et sur ce qui avait fait échouer d'autres chirurgiens, et des chirurgiens habiles, dans d'autres tentatives du même genre. Je ne tardai pas à être convaincu que ce qui avait dû mettre obstacle à la réussite, c'était que même avec la suture entortillée, qui n'agit avec toute la puissance possible qu'à l'extérieur, on ne peut pas établir un contact exact entre les parties les plus profondes de la plaie ; c'était que le fond de celle-ci reste béant du côté du vagin, et qu'ainsi ses bords peuvent être continuellement humectés par des mucosités, qui découlent d'autant plus abondamment de cette dernière partie, qu'elle-même participe à l'inflammation du périnée. Dans ma pensée, je considérais comme une moindre source d'inconvénients la nécessité du passage des matières fécales par l'anus, puisque d'une part il n'est pas impossible d'obtenir, par des moyens artificiels, une constipation prolongée; et que par des moyens d'un autre genre on peut rendre les excréments tellement liquides, ou si mous que leur sortie puisse s'effectuer sans qu'il y ait à craindre le déchirement des parties qu'on veut réunir. Il me vint assez promptement à la pensée que je multiplierais les chances de succès de l'opération nouvelle, et que j'éloignerais presque infailliblement la circonstance principale qui avait dû empêcher la réussite de la première, en substituant à la suture entortillée une autre suture jusqu'ici réservée pour les plaies pénétrantes de l'abdomen, précisément parce qu'elle est plus propre que toute autre à agir sur les parties profondes d'une plaie de ce genre, et qu'on nomme *suture enchevillée*. Elle tire son nom de ce que des chevilles ou de petits corps cylindriques sont placés parallèlement aux bords d'une plaie, et parallèlement à eux-mêmes, dans des fils dont les extrémités font anse, et qui, traversant les parties qu'on a l'intention de rapprocher et de réunir, peuvent être tendus à un degré plus

ou moins considérable. Dans cette suture, me suis-je dit, comme c'est avec des aiguilles courbes qu'on conduit et qu'on place les fils ou ligatures, on doit pouvoir agir plus profondément, et embrasser avec les ligatures, qui d'ailleurs doivent être très-fortes, plus de parties qu'avec des aiguilles droites. Les fils, bien qu'ils se redressent par la tension qu'on leur fait subir, ne doivent pas prendre une rectitude et surtout une rigidité semblables à celles des aiguilles droites qui restent dans une plaie réunie par la suture entortillée; on a, dès lors, moins à craindre une trop prompte division des parties qu'ils touchent immédiatement; puis, au moyen des cylindres, et quoique des intervalles plus ou moins grands séparent les ligatures elles-mêmes, la double pression latérale de laquelle résulte le rapprochement des bords de la plaie est égale, uniforme dans toute leur longueur, et doit produire une coaptation plus exacte; et cette double pression produit son effet autant et plus même sur les parties profondes que sur les parties superficielles : à quoi il faut ajouter que dans la suture enchevillée il n'y a point étreinte, constriction des bords de la plaie; ces bords sont seulement attirés de loin, poussés, pressés l'un contre l'autre, et tout a fait libres à l'extérieur; dès lors, ils sont moins susceptibles d'être coupés ou déchirés par des points de suture qui seraient trop longtemps en place; et, chose non moins importante, tout passage de liquide entre les surfaces rapprochées, et mises en contact, doit être impossible, toute communication entre le fond de la plaie et l'extérieur doit être interceptée. Voilà par quels raisonnements je parvins à me persuader qu'il y avait plus de chances de succès en appliquant la suture enchevillée à une division, et surtout à une division complète du périnée, qu'en pratiquant la suture entortillée.

22. L'événement a confirmé toutes mes conjectures, et justifie mes prévisions. Quelques mots suffiront maintenant pour faire comprendre le caractère particulier de la seconde opération pratiquée à ma jeune dame de la Normandie. Les apprêts et tous les soins préli-

minaires furent les mêmes que pour la première. L'avivement des parties cicatrisées fut fait de la même manière absolument, et par les mêmes moyens; peut-être seulement y ai-je apporté un soin encore plus grand, et ai-je été encore plus attentif à faire que les deux plaies fussent parfaitement régulières et bien semblables l'une à l'autre. Je plaçai quatre ligatures, comme dans le premier cas j'avais placé quatre aiguilles droites; et en faisant agir les aiguilles courbes conductrices des fils, d'un côté de dehors en dedans, et de l'autre de dedans en dehors, j'eus le soin d'anticiper un peu sur les parois du vagin, mais assez seulement pour opérer sur ces parois une légère traction, et pour pouvoir mettre en contact les deux plaies dans tous les points de leur étendue. Les ligatures étant placées, j'employai pour cylindres deux morceaux d'une bougie de gomme élastique un peu forte : l'une des deux fut placée dans les anses que les ligatures doublées formaient d'un côté, et l'autre, du côté opposé, entre les chefs isolés de toutes ces ligatures; je terminai en formant avec les deux bouts de chaque fil sur le second cylindre, d'abord un nœud simple très-serré, puis un nœud bouclé. Je ne craignis pas de presser les bords de la plaie l'un contre l'autre un peu fortement. Je ne dois pas oublier de dire que comme, par la manière dont elle agit, la suture entortillée fait un peu saillir en dehors les bords de la plaie, et qu'ainsi par elle la coaptation n'est jamais aussi parfaite à l'extérieur qu'on pourrait le désirer, j'avais songé d'avance à prévenir cet effet, et à mettre la peau en contact avec elle-même. J'y parvins au moyen de ligatures minces que j'avais engagées dans les différents points de suture avec les ligatures principales, et qui me servirent à faire comme autant de points de suture simple, fort peu serrés toutefois. Ainsi j'avais tout prévu, tout calculé, tout combiné si bien, et tout se passa si bien aussi comme je l'avais désiré, que j'ai fait peu de choses en chirurgie qui m'aient autant satisfait sous le rapport de l'exécution. Après la suture terminée, les parties voisines du périnée ne me paraissant pas plus tendues que dans la première opération, je me dispensai encore de faire les incisions latérales recommandées par

M. Dieffenbach. La malade fut ensuite soumise aux mêmes soins qui déjà lui avaient été prodigués.

23. Je ne fis rien pour provoquer les selles, pensant bien que la constipation qui, la première fois, n'avait cessé que bien après la désunion des parties, nous favoriserait pareillement dans cette seconde tentative. En effet, elle a persisté jusqu'au vingt-deuxième jour. C'est à cette époque seulement que la malade dut satisfaire pour la première fois au besoin d'aller à la garde-robe. Toutefois l'expulsion des matières, lesquelles formaient une masse assez considérable, et avaient acquis une grande consistance, ne se fit pas sans beaucoup de peine; il fallut même y aider par des pressions exercées de haut en bas avec un doigt introduit dans le vagin. Mais à l'époque dont il s'agit, une défécation encore plus laborieuse n'aurait pu rompre des parties entre lesquelles s'était opérée l'union la plus intime, et dont la continuité était parfaitement rétablie. En m'exprimant ainsi, j'indique quels ont été l'issue et le résultat de la seconde opération dont j'ai rapporté les principaux détails. Cette opération, en effet, eut le succès le plus complet. J'avais enlevé les cylindres et retiré toutes les ligatures au commencement du septième jour. Déjà, à cette époque, on voyait distinctement qu'il y avait entre les deux moitiés du périnée autre chose qu'une simple agglutination : déjà elles étaient assez solidement réunies, et il aurait fallu un certain effort pour les séparer : insensiblement la cicatrice avait acquis plus de force et de solidité, et bientôt la consolidation du périnée avait été parfaite. A l'époque où la malade dut aller à la garde-robe pour la première fois, l'anus était plutôt trop étroit que trop large. Le périnée ainsi reconstitué ne différait en rien de ce qu'est cette partie dans l'état naturel, surtout chez une femme dont les organes sexuels n'ont point encore été mis en jeu. Il avait deux pouces de longueur; un raphé linéaire le partageait en deux moitiés parfaitement semblables. En l'explorant soit du côté du vagin, soit du côté de l'anus, on le sentait épais et solide, j'oserais même dire vigoureusement constitué.

C'est ce qu'a pu constater avec moi un accoucheur célèbre de notre capitale, M. Danyau, qui, après avoir assisté aux deux opérations, a pu examiner attentivement notre jeune malade avant qu'elle quittât Paris, ce qu'elle fit vers la fin du mois de juin. A cette époque, toutefois, il existait encore sur la cloison recto-vaginale, immédiatement au-dessus du périnée, une ouverture de communication du rectum avec le vagin, une sorte de fistule. Mais cette ouverture était fort petite; elle livrait passage à des gaz, et de temps à autre seulement; les matières fécales ne la franchissaient pas. Depuis elle s'est fermée complétement.

24. Dès cette époque aussi j'avais permis à la femme et au mari de reprendre leurs habitudes conjugales : seulement je désirais que cette dame ne fût point exposée à devenir enceinte, au moins prochainement; j'étais même enclin à souhaiter pour elle qu'elle ne le redevînt jamais. Mais il devait en être autrement, et il m'était réservé d'avoir le complément heureux d'un cas aussi remarquable. Quelques mois seulement s'étaient écoulés, et le mari me mandait du lieu qu'il habite : « Nous avons usé de la liberté que vous nous «avez accordée; les habitudes conjugales ont été reprises, non sans «quelques difficultés premières à vaincre, mais bientôt avec toute «l'aisance et tout le charme désirables : je verrais ma femme enceinte «sans trop d'inquiétudes. » C'était assez dire que je ne tarderais pas à recevoir l'annonce de son état de grossesse. En effet, nonobstant mes vœux et mes désirs, cette dame est devenue enceinte vers la fin de l'année même de l'opération. Elle est accouchée il y a trois mois. Nonobstant aussi les appréhensions qu'il était bien permis d'avoir, l'accouchement a été des plus heureux; il s'est terminé par les seuls efforts de la nature, après quelques heures de souffrances, et sans avoir présenté rien de particulier : quoique le périnée se soit trouvé exposé pendant assez longtemps à tous les efforts d'un travail fort actif, cette partie n'a éprouvé aucune déchirure nouvelle, ou complète ou incomplète, pas même le plus léger éraillement. Ainsi donc cette jeune dame n'est plus seulement délivrée d'une

horrible mutilation, qui semblait marquée au coin de l'incurabilité; elle jouit encore une fois du bonheur d'être mère, sans que son amour-propre ait eu à souffrir d'un trop froid dévouement de l'amour conjugal.

25. Un fait de cette importance, un fait aussi complet et aussi décisif, tant en faveur de la suture du périnée elle-même, qu'en faveur du procédé que j'avais cru devoir substituer à tous autres, ce fait, dis-je, bien qu'il se fût passé dans le silence de la pratique particulière, devait avoir du retentissement; et, en effet, il fut bientôt connu. Je devais compter que je serais bientôt à même de recueillir d'autres faits du même genre, ou du moins de soumettre à de nouveaux essais cette suture enchevillée appliquée au traitement de la suture du périnée; et, en effet, depuis l'année dernière, quatre nouveaux cas de déchirure ancienne du périnée se sont offerts à moi; et quatre fois aussi j'ai pratiqué l'opération de la même manière exactement, et par le même procédé qui avait si bien réussi chez la jeune dame de Valognes.

26. Dans ces quatre cas il s'agissait encore d'une division complète du périnée, et d'une division à bords cicatrisés depuis longtemps. Il est probable que toujours on aura à faire la restauration du périnée dans des circonstances de ce genre, bien plus souvent que pour des divisions récentes. En effet, outre que quelques-unes de celles-ci ne sont pas connues dès l'abord, outre que quelques-unes aussi sont susceptibles de guérir spontanément, il est très-certain que dans les cas où l'on devrait désespérer des efforts de la nature abandonnée à elle-même, ce n'est pas alors que la solution de continuité vient d'être faite qu'il est le plus opportun d'agir. Cela est vrai du moins pour le plus grand nombre des cas, et notamment pour ceux dans lesquels une déchirure complète du périnée est le résultat d'un accouchement laborieux. Naguère, en effet, les parties rompues ont subi la plus grande violence; elles ont été soumises à une distension extraordinaire :

bientôt un gonflement considérable va s'en emparer; il faudrait peu de chose pour qu'elles éprouvassent une inflammation des plus vives, et pour que cette inflammation prît un fâcheux caractère; bientôt aussi elles seront inondées par l'écoulement des lochies, et l'on aurait sans doute bien plus de peine que dans toute autre circonstance à tenir les bords de la plaie dans une exacte coaptation, et à faire qu'ils ne fussent pas humectés par les fluides qui doivent couler si abondamment du vagin. Certes, toutes ces circonstances ne sont pas favorables pour le succès d'une suture du périnée, même de la suture la plus avantageuse en soi. Et puis, les soins qui devraient suivre l'opération sont-ils bien compatibles avec ceux que réclame l'espèce de maladie qui succède à l'accouchement? Serait-il prudent d'ailleurs de soumettre à une opération longue, douloureuse, une femme nouvellement accouchée, un être devenu momentanément si nerveux, si impressionnable, chez qui les moindres émotions pénibles peuvent avoir de si fâcheuses conséquences, et auquel il faudrait faire connaître un malheur qu'il ignore, sans pouvoir même garantir l'efficacité des moyens qu'on emploie pour y remédier? Non assurément : mieux vaut temporiser et remettre les tentatives de guérison à l'époque où la santé de la femme est rétablie, où les bords de la solution de continuité se sont revêtus d'une cicatrice, où toutes les parties circonvoisines sont rentrées dans leur état naturel.

27. Je reviens à mes quatre autres tentatives de restauration du périnée. L'une d'elles, mais une seule, n'a point eu de succès : loin de là même, la femme y a succombé. Mais aussi c'était le cas le plus désavantageux qui pût se voir; d'ailleurs, un état maladif, très-fâcheux en soi, compliquait la difformité, et ce sont les progrès rapides de cette complication qui ont causé la mort, bien plus que l'opération elle-même. En fût-il autrement, un tel fait ne déposerait pas contre la suture du périnée; on pourrait seulement en déduire cette conséquence, qu'à côté d'immenses probabilités de succès cette opération, comme toute autre, peut offrir des chances

désavantageuses. Car, il faut bien le dire, non-seulement, en chirurgie, et bien que par son caractère cette partie de la médecine semble se rapprocher à la fois des sciences exactes et des arts les plus positifs dans leurs procédés et dans leurs résultats, il y a bien souvent des doutes et des incertitudes; non-seulement on peut y commettre des méprises fâcheuses, des fautes graves, des erreurs funestes, et que le vrai talent doit avoir le courage d'avouer et de faire connaître; mais encore, dans les actes principaux auxquels elle se livre, combien souvent les plus grandes espérances sont-elles déçues! que de mécomptes! que de revers qu'on ne prévoyait pas, ou qui ne semblaient pas dans l'ordre des probabilités! D'ailleurs dans toutes les grandes œuvres de la chirurgie, et pour chacune d'elles en particulier, soit qu'il s'agisse seulement d'un but déterminé qu'on peut atteindre ou ne pas atteindre, soit que la conservation de la vie soit mise en jeu, il y a un certain rapport de revers et de succès, une certaine porportion des uns aux autres à laquelle il faut se soumettre, et que les temps, les lieux, les hommes ne changent guère. Ajoutez enfin qu'il n'est pas d'opération si simple, si minime, et si généralement innocente en soi, qui ne puisse communiquer un ébranlement fâcheux à tout le système de l'économie animale, et qui ne puisse, chez les sujets mal disposés physiquement et moralement, devenir l'occasion d'accidents graves, ou même mortels.

28. Ce seul revers que j'aie encore éprouvé en pratiquant la suture du périnée est tout récent: c'est ma dernière opération de ce genre; elle a été faite dans les premiers jours du mois qui finit. La femme avait quarante ans; chez elle, ainsi que je l'ai déjà dit, la destruction du périnée, qui datait de dix-huit mois, avait été le résultat non d'un accouchement laborieux, mais d'une opération pratiquée pour guérir une fistule à l'anus, communiquant sans doute du rectum dans la partie inférieure du vagin. On avait voulu la délivrer d'un mal très-supportable, et elle avait été laissée en proie à une infirmité des plus grandes, qui a hâté, je n'en doute

pas, le terme de son existence. C'est chez cette femme aussi qu'aux effets ordinaires, et déjà si fâcheux, de toute division permanente du périnée, se joignait un prolapsus, un renversement complet du rectum. Pour peu qu'elle restât debout, et surtout quand à la position verticale du corps venait se joindre quelqu'un des mouvements un peu forcés et involontaires de la respiration, comme la toux, l'éternument, le rire, tout l'intestin, retourné sur lui-même, franchissait l'énorme fente du périnée, et formait au dehors une tumeur plus volumineuse que le poing, qu'on avait quelque peine à réduire, et qui reparaissait presque incontinent. Alors la position de cette malheureuse femme faisait pitié; son infirmité était horrible à voir.

29. Encore s'il n'y avait eu que le désordre local avec ses conséquences immédiates! Mais au moment où cette femme me fut adressée, et fut admise à l'hôpital confié à mes soins (c'était vers le milieu du mois de novembre 1833), elle était fort souffrante, elle avait une fièvre continue, une diarrhée abondante, et se plaignait d'un grand embarras dans l'abdomen : toutes choses qui dénotaient une inflammation sourde du tube intestinal, et qu'on ne pouvait pas ne pas attribuer à ce que si souvent une partie fort étendue de la surface muqueuse du gros intestin était exposée à l'impression de l'air et à l'injure des corps extérieurs. Je dus songer à combattre et à éloigner ces complications avant d'entreprendre la suture du périnée, bien que l'opération pût paraître et fût en effet plus nécessaire, plus indispensable, plus urgente même que dans aucun autre cas. Après trois ou quatre semaines, durant lesquelles la femme dont il s'agit fut soumise au repos, à un régime convenable et à tout ce qui pouvait modérer à la fois l'irritation des intestins et les évacuations diarrhéiques, sa position s'était singulièrement améliorée, et je crus pouvoir céder au désir extrême qu'elle avait de subir une opération dont elle espérait la fin de ses incommodités et de ses souffrances. Peut-être n'ai-je point assez temporisé, peut-être me suis-je laissé dominer par une compassion

bien naturelle sans doute, et aussi par l'espérance et le désir assez légitimes de voir promptement un nouveau succès s'ajouter à ceux que j'avais déjà obtenus. L'événement m'a conduit à m'adresser moi-même ces reproches : en effet, dès le troisième jour après l'opération, un dévoiement considérable se déclara ; la fièvre survint; bientôt le ventre devint douloureux à la pression, et la malade perdit ses forces et son énergie. Du côté de la plaie, les parties comprises entre les points de suture n'éprouvèrent pas cette tuméfaction, ce boursouflement inflammatoire, cette fluxion vive, franche, légitime, qui présage, annonce et prépare une adhésion immédiate : loin de là, elles étaient sensiblement affaissées. D'ailleurs les points de suture eux-mêmes s'étaient exulcérés ; quelques-uns d'entre eux, qui communiquaient dans l'intérieur même du rectum, laissaient passer quelque peu de matières diarrhéiques.

30. Cependant la vie se maintint et la malade survécut jusqu'au neuvième jour. Au commencement du septième, j'avais enlevé les cylindres, et retiré les fils des points de suture; il semblait y avoir un commencement d'union; du moins les lèvres de la plaie étaient légèrement agglutinées l'une à l'autre; mais le lendemain leur désunion était complète, et deux jours après la malade n'existait plus. Chez cette femme l'opération avait présenté cela de particulier seulement, qu'à cause de l'ampliation qu'avaient fait éprouver aux parties divisées l'invagination et le prolapsus si souvent répétés de l'intestin rectum, j'avais dû mettre quatre points de suture, tandis que trois m'avaient suffi jusqu'alors, et doivent suffire dans le plus grand nombre de cas. A quoi il faut ajouter que ces points de suture avaient dû agir et ont agi au moins autant et plus même sur l'intestin que sur le vagin; dernière circonstance qui a pu concourir au retour si prompt et à la marche si rapide des accidents qui ont causé la mort. C'était, sous tous les rapports, le cas le plus désavantageux qui pût se présenter : en pareille circonstance un succès, bien qu'il ne fût pas tout à fait improbable, aurait eu néanmoins

quelque chose de plus remarquable encore que tous ceux que j'avais obtenus précédemment.

31. Dans les trois autres cas, toutes les conditions étaient favorables, et le résultat de l'opération a été le même exactement que chez la jeune dame de la Normandie. Ils sont antérieurs à celui dont je viens de rapporter la fin malheureuse. J'abuserais des moments de l'Académie, de l'attention qu'elle veut bien m'accorder, si j'entrais dans des détails étendus sur chacun de ces nouveaux cas de suture du périnée. Ils sont si semblables entre eux, au moins sous les rapports principaux; si semblables, chacun en particulier, à celui qui a été pour moi le point de départ, qu'ils n'ont d'intérêt que par le résultat que j'ai obtenu : et les développements dans lesquels il convenait que j'entrasse au sujet de mon opération première, et du cas en quelque sorte générateur des autres, deviendraient fastidieux et inutiles. L'Académie trouvera bon, je pense, que je me borne, par rapport à ces derniers faits, à l'indication rapide des circonstances propres à chacun en particulier, et de ce qui peut en établir l'authenticité.

32. Le sujet d'un premier était une jeune fille de vingt et un ans, devenue mère une première fois à dix-neuf ans, et chez laquelle, dans ce premier accouchement terminé par les seuls efforts de la nature, il s'était fait une déchirure complète du périnée. Elle avait nom Joséphine Érard, et sortait de l'hôpital des vénériens, où elle venait de subir un traitement anti-syphilitique, au moment où je la reçus dans mon service à l'hôpital de la Charité. C'était cette année même (1833), dans les premiers jours de mars. Avant de l'opérer, il avait fallu, seulement pendant quelques jours, la mettre à un régime un peu sévère pour faire qu'elle n'éprouvât pas trop promptement le besoin d'aller à la garde-robe. Elle fut donc opérée très-peu de temps après que je l'eus examinée pour la première fois; elle le fut publiquement, en présence des

nombreux élèves qui fréquentent la clinique chirurgicale de la Charité, et de quelques praticiens qui m'avaient exprimé le désir d'être témoins de mes essais sur la suture du périnée. L'opération elle-même fut une répétition exacte de la suture qu'avait eue à subir la dame de la Normandie. Même procédé, mêmes soins, mêmes détails dans l'exécution, soit pour l'avivement des chairs, soit pour l'application de la suture enchevillée; mêmes précautions ultérieures pour prévenir tout mouvement, tout effort qui aurait pu faire éprouver aux parties quelque tiraillement, et partant quelque déchirure. Toutefois dans ce but, et parce que je ne pouvais pas compter ici sur le bénéfice d'une constipation prolongée jusqu'à l'entière et parfaite consolidation du périnée, la veille du jour où je devais enlever les points de suture, c'était le sixième après l'opération, je provoquai des selles liquides au moyen d'un minoratif. Plus tard, la même précaution a été renouvelée plusieurs fois à des intervalles de temps convenables. Je l'ai prise dans toutes mes autres opérations, et je la donne comme règle importante de conduite pour assurer le succès de la suture du périnée. Trois semaines environ suffirent, chez cette fille Érard, pour le parfait rétablissement de la vulve et de l'anus dans leur état naturel. Une petite ouverture occupant la partie la plus profonde de la division, sur la cloison recto-vaginale, et qui laissait passer en partie les gaz intestinaux du rectum dans le vagin, subsista encore quelque temps; mais elle était réduite aux plus petites dimensions lorsque la malade nous quitta vers la fin du mois de mai. Nous avons su que cette fille avait cédé promptement à son penchant pour la vie de concubine, et qu'elle n'avait pas tardé beaucoup à courir le risque de devenir enceinte. A la vérité, je redouterais moins pour elle, comme pour toute autre, une nouvelle gestation et les efforts d'un nouvel accouchement, maintenant que je sais que la dame de la Normandie est devenue enceinte assez peu de temps après sa guérison, et que la délivrance s'est faite sans plus de peine que dans les circonstances ordinaires,

et sans le moindre désordre dans les parties qui avaient été restaurées.

33. Le second cas est celui d'une femme des environs de Compiègne, âgée de vingt-neuf ans, et que je reçus également à l'hôpital de la Charité, au mois d'octobre dernier. Elle avait été sollicitée pour y venir, et m'avait été présentée par un jeune médecin bien connu d'un grand nombre de membres de cette Académie, et qui se recommande à leur estime par son goût pour les sciences physiques, comme il est prisé de nous pour l'étendue et la solidité de ses connaissances médicales, par M. Donné. C'était à l'époque où M. Jacobson, de Copenhague, visitait notre capitale; et je pus rendre témoin de l'opération ce célèbre chirurgien danois, qui a bien voulu assister souvent à mes leçons et à mes opérations durant le temps de son séjour à Paris. Avant de nous quitter, il a pu constater par lui-même un nouveau succès de la suture du périnée, et s'est exprimé, sur ce qu'un heureux hasard lui avait permis de voir, en termes dont je puis conserver le souvenir, mais qu'il ne m'est pas permis de répéter. Il était difficile, en effet de voir une réhabilitation plus parfaite de l'anus, du périnée et de la vulve dans leur état naturel, que ce qui a eu lieu chez la femme Claye, que beaucoup de praticiens de Paris, parmi ceux surtout qui se livrent à l'art des accouchements, se sont empressés de visiter. Il faut noter, comme chose assez remarquable chez cette femme, que, mariée à dix-huit ans, elle était accouchée quatre fois heureusement et à terme : c'est dans un cinquième accouchement, qui nécessita l'application du forceps, que se fit la déchirure du périnée. Cette déchirure était complète, comme toutes celles que j'ai observées jusqu'à présent, et comprenait pareillement une petite portion de la cloison recto-vaginale.

34. Mon dernier cas enfin est celui d'une dame du monde dont je dois taire le nom et la position sociale, qui, jusqu'au moment où je la vis, avait soigneusement gardé le silence sur son horrible infirmité, comme elle fait mystère de l'opération qu'elle a eue à subir,

bien que cette opération ait eu le résultat le plus heureux. C'est le mois dernier que je la lui ai pratiquée, avec l'assistance seulement de deux de mes élèves, comme aides, et de l'un de nos accoucheurs les plus distingués, M. Maygrier, par qui cette dame avait été accouchée trois mois auparavant, à qui elle avait dû dire qu'elle avait le périnée rompu depuis deux ans, et de qui elle avait appris que l'art venait de conquérir un nouveau moyen de restauration de cette partie, moyen dont les avantages et l'efficacité étaient déjà constatés par plusieurs succès. M. Maygrier est donc la seule personne dont je puisse invoquer ici le témoignage. Quoique la dame dont il s'agit eût déjà trente-cinq ans, le résultat de l'opération, toujours faite par la suture enchevillée, a été aussi complet, aussi parfait que dans les cas précédents : toutes les circonstances, tous les détails d'exécution avaient été exactement les mêmes. Un événement aurait pu tromper nos espérances : peu de temps après avoir été opérée, cette dame perdit son enfant dernier né, ce qui lui causa un vif chagrin ; mais déjà les points de suture avaient été enlevés ; déjà les parties avaient contracté un certain degré d'union ; et malgré le trouble survenu dans toute l'économie, le travail ultérieur de la consolidation ne se ralentit point.

35. Ne serait-ce que pour préparer les matériaux d'une histoire plus complète de la restauration du périnée, opération qui va devenir, je n'en doute nullement, une chose familière en chirurgie, je n'omettrai pas de mentionner que, dans tous les cas où je l'ai pratiquée, l'inflammation n'est survenue dans les parties sur lesquelles j'avais agi qu'au degré très-strictement nécessaire pour la réunion que je voulais obtenir ; jamais elle n'a pris le caractère d'un accident grave, comme aucun symptôme fâcheux d'un autre genre ne s'est déclaré. Toutefois quelques phénomènes particuliers ont eu lieu, dont il est bon de prévenir. Toujours le vagin a été le siége d'un flux puriforme assez abondant : j'en ai modéré les effets, et j'ai prévenu la stagnation des mucosités purulentes, par l'injection souvent répétée d'un liquide émollient. Chose assez remarquable ;

dans tous les cas, soit par l'effet du rapprochement exact des cuisses, soit, et plus vraisemblablement, à cause de la fluxion étendue à toute la vulve et du boursoufflement des parties circonvoisines du méat urinaire ou de ce méat lui-même, il y a eu pendant quelques jours impossibilité de l'émission spontanée de l'urine; il a fallu recourir au cathétérisme. Au reste, peut-être serait-il bon d'adopter pour coutume de placer une sonde à demeure dans l'urètre et dans la vessie, ou de l'y introduire à des époques convenables pendant quelques jours, alors même qu'il n'y aurait pas rétention d'urine, pour prévenir l'écoulement de ce fluide sur des parties enflammées. Dans tous les cas aussi, les points de suture étant enlevés, et bien qu'après très-peu de temps la consolidation dût être parfaite, les bords de la division étaient désunis, ou plutôt séparés près de l'anus : vers ce point la plaie était un peu béante; il y avait là une petite fente, comme celle qui aurait pu résulter d'une opération faite pour une fistule à l'anus, qui aurait eu son siége en avant ; mais constamment cette petite fente a disparu, et l'anus, dans lequel j'avais soin de placer une petite mèche enduite de cérat, a repris promptement sa disposition naturelle. Constamment enfin, et malgré le soin que j'avais pu prendre dans l'opération d'agir sur le petit bord libre ou sur l'éperon de la cloison recto-vaginale, de l'aviver, et de traverser cette cloison avec l'un des fils de la suture pour la rapprocher des parties molles du périnée proprement dit, il a fallu un temps assez long pour que toute communication cessât entre le rectum et le vagin; toujours des gaz intestinaux et des matières excrémentielles, seulement à la vérité quand elles étaient liquides, ont passé par le vagin, et cela lorsque le périnée était déjà bien solide; mais insensiblement l'ouverture de la cloison s'est resserrée; elle a fini par s'oblitérer tout à fait, ou par devenir si étroite, qu'elle ne livrait passage, et de temps à autre seulement, qu'à une très-petite quantité de gaz.

36. Tels sont, Messieurs, les faits importants dont j'avais à vous donner communication. Quatre fois donc successivement en moins

de dix-huit mois, et trois fois dans le cours de la seule année qui vient de finir, j'ai réussi par un procédé nouveau à refaire le périnée, à restaurer complétement la vulve et l'anus, à rétablir toutes ces parties dans un état aussi parfaitement semblable qu'on puisse se le figurer à leur état naturel, à faire disparaître toute trace du désordre dont elles avaient été le siége, et à les rendre de nouveau susceptibles de remplir les fonctions que la nature leur a départies. Quatre femmes qui n'avaient plus, ou qui n'avaient plus qu'imparfaitement la conformation extérieure propre à leur sexe, qui paraissaient vouées pour toute leur vie à la plus triste condition, en même temps qu'elles étaient en proie à des infirmités dégoûtantes, jouissent maintenant de tous les bienfaits possibles d'une opération qui était presque tombée en désuétude, et qui, bien qu'elle eût réussi quelquefois, de loin en loin, et malgré l'imperfection des procédés auxquels on avait eu recours, n'était jamais entreprise par les chirurgiens qu'avec une sorte de répugnance, parce qu'elle leur offrait trop peu de probabilités de succès. Quatre femmes ont recouvré les attributs de leur sexe, sont maintenant rendues à leurs penchants, à leurs habitudes; elles n'inspirent plus aucun dégoût : libres de toutes souffrances, au moins de celles qui étaient dues à la destruction du périnée, elles peuvent remplir toutes les fonctions dont le parfait accomplissement exige la bonne conformation de cette partie : en un mot, elles sont ce qu'elles étaient avant leur accident, ce que la nature avait voulu qu'elles fussent. C'est une idée simple, mais peut-être m'est-il permis de dire heureuse, qui m'a conduit à ce par quoi j'ai obtenu d'aussi importants résultats. Je n'ai rien créé, rien imaginé, je le confesse franchement : j'ai seulement appliqué un procédé connu, toutefois en lui faisant subir les modifications que la disposition des lieux exigeait, à une opération pour laquelle il n'avait pas été imaginé; je l'ai fait servir à une chose pour laquelle il n'avait pas été destiné primitivement, et le succès a justifié mes pressentiments. Les premières réussites en amèneront d'autres à leur suite; je les considère comme une voie ouverte à de nouveaux et de nombreux succès.

Tant de femmes vivent maintenant chez lesquelles le périnée a été rompu dans un accouchement, tant d'autres auront à éprouver le même malheur, que la suture de cette partie va devenir une des opérations les plus communes de la chirurgie. Avec le procédé que je recommande, et au moyen duquel j'ai si merveilleusement réussi, on doit atteindre le but dans le plus grand nombre des cas. Bientôt, je n'en doute pas, il en sera de la suture du périnée chez la femme, comme il en a été de la suture du voile du palais ou de la staphyloraphie, opération qui n'existait pas dans l'art il y a quinze ans, qu'alors on croyait impraticable, ou plutôt qu'on n'avait pas même eu la pensée d'entreprendre, que j'ai imaginée et pratiquée pour la première fois vers la fin de l'année 1819, que tous les chirurgiens ont adoptée, qu'on pratique familièrement en pays étranger comme en France, et que j'ai faite, il y a peu de semaines encore, pour la soixante-cinquième fois [1].

[1] Depuis l'époque à laquelle le mémoire qui précède fut composé pour l'Académie des sciences, à laquelle je n'avais point encore l'honneur d'appartenir, j'ai pratiqué la suture du périnée cinq autres fois, sur quatre femmes. Chez l'une de ces femmes une première opération ne réussit pas : un succès complet, au contraire, a été le résultat de la seconde. Deux autres femmes n'ont eu à subir, chacune en particulier, qu'une seule opération, dont le résultat a été des plus favorables. Enfin, des accidents, dont la mort a été la suite, sont survenus chez la quatrième, opérée pour une rupture incomplète du périnée, s'étendant seulement jusqu'à la circonférence de l'anus.

Depuis la même époque j'ai fait encore dix fois la staphyloraphie : je suis arrivé à la soixante et quinzième opération de ce genre.

SECOND MÉMOIRE

SUR

LA PROPAGATION DE LA CHALEUR

DANS LES POLYÈDRES;

PAR G. LAMÉ,

INGÉNIEUR DES MINES,
PROFESSEUR DE PHYSIQUE À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PRÉSENTÉ À L'ACADÉMIE DES SCIENCES LE 6 FÉVRIER 1832.

Les recherches physico-mathématiques composent aujourd'hui la partie la plus intéressante des sciences exactes; rien ne paraît plus digne qu'elles de fixer l'attention des géomètres; en effet, quoi de plus parfait, de plus rationnel et de plus complet que la manière dont elles procèdent?

Établir sur un petit nombre de faits incontestables la démonstration d'une ou de plusieurs équations aux différences partielles, qui représentent à la fois toute une théorie physique, toute une classe de phénomènes; analyser ces équations, déduire de leurs combinaisons ou de leurs transformations une multitude de propriétés générales qui définissent complétement la question physique; passer ensuite des propriétés différentielles aux propriétés intégrales, et, comme pour s'essayer dans cette seconde voie, traiter des cas très-particuliers, et déduire ainsi, d'intégrations simples et élémentaires, des rapports numériques précieux, des formules exactes à substi-

tuer aux tables que le physicien a tant de peine à composer, ou aux lois empiriques par lesquelles il cherche à les résumer; enfin, s'élevant à des cas plus étendus et plus compliqués, faire dépendre la solution complète, celle qui doit satisfaire à toutes les exigences de la question, d'une somme algébrique de solutions beaucoup plus simples et beaucoup plus faciles à étudier, qui séparément ne remplissent qu'une partie des conditions imposées, mais desquelles chacune peut, suivant les circonstances données, représenter à elle seule la presque totalité du phénomène : telle est la marche que les géomètres de ce siècle ont assignée aux sciences physico-mathématiques.

Les découvertes que le mathématicien fait dans cette direction l'attachent de plus en plus à ce genre de travaux; car, indépendamment de l'intérêt qui préside à toutes les recherches utiles, un attrait nouveau est dû à une circonstance qui me paraît particulière aux sciences dont il s'agit, et qui prouve, suivant moi, la vérité de leurs calculs, et la liaison intime qu'ils ont avec les phénomènes naturels. Lorsque l'on veut appliquer l'analyse mathématique à l'étude des lois de quelque phénomène physique sur un corps de forme donnée, il se présente ordinairement des difficultés particulières; c'est, ou la complication des équations des surfaces qui limitent le corps que l'on considère, ou la recherche des fonctions qui, satisfaisant aux équations différentielles générales du phénomène physique, doivent remplir des conditions spéciales; ces difficultés exigent souvent toute la puissance de l'analyse, et toute l'attention que le géomètre peut concentrer vers un même but; mais lorsqu'une de ces difficultés est surmontée, les résultats obtenus si péniblement se prêtent ensuite d'eux-mêmes aux recherches ultérieures; des conséquences importantes se présentent en foule, comme pour récompenser le savant de sa persévérance, et lui donner le courage de s'attaquer à de nouveaux obstacles; jusqu'à ce qu'enfin les formules définitives, par leur forme, par leur symétrie, par leur généralité et par les nombreuses

vérifications qu'elles présentent, viennent compléter la découverte, et apporter un nouvel exemple de cette sorte de spontanéité de la science.

(Ce qui suit est extrait des préliminaires du premier mémoire[1].)

« De toutes les équations aux différences partielles offertes par « l'analyse physico-mathématique, les plus simples sont celles qui « expriment les lois générales du mouvement de la chaleur dans « les corps solides homogènes. Il y a tout lieu de croire, d'après « cela, que l'on ne parviendra à la découverte des équations inté- « grales qui représentent les phénomènes physiques d'un corps « solide de forme donnée, qu'en cherchant d'abord celles qui ap- « partiennent au phénomène particulier du mouvement de la cha- « leur dans ce corps.

« C'est en suivant cette marche méthodique que les géomètres « peuvent espérer d'aborder un jour avec succès l'intégration des « équations différentielles, déjà connues, du mouvement et de « l'équilibre intérieur des corps solides élastiques de dimensions « finies, ainsi que la recherche des lois de la propagation de la lu- « mière dans les corps diaphanes, et particulièrement dans les « substances cristallisées, phénomène général dont les équations « différentielles sont sans doute à la veille d'être trouvées.

« Dans toutes ces applications de l'analyse physico-mathéma- « tique, les corps de forme polyédrique se présenteront à chaque « pas : soit lorsqu'on se proposera d'évaluer exactement les efforts « supportés et les résistances offertes par les différentes parties « d'une construction, ou qu'on cherchera les lois complètes des « mouvements vibratoires des corps solides de dimensions finies ; « soit lorsqu'on arrachera à l'analyse le secret de la double réfrac- « tion et de la polarisation, ou qu'on se proposera d'étudier les cir- « constances qui président à la formation des cristaux.

« On doit donc citer en première ligne, parmi les questions les « plus importantes que les géomètres puissent se proposer actuelle-

[1] Journal de l'École polytechnique, XXII^e cahier, tome XIV.

« ment, la recherche des lois du mouvement de la chaleur dans les « polyèdres.

« Le parallélipipède rectangle est le seul corps polyédrique dont « les équations intégrales soient connues depuis longtemps, et c'est « principalement à la découverte des lois de la propagation de la « chaleur dans son intérieur que l'on doit tous les progrès que « l'analyse physico-mathématique a faits dans ces derniers temps. »

Dans un mémoire concernant la théorie du mouvement de la chaleur dans les corps de forme polyédrique, que j'ai eu l'honneur d'adresser à l'Académie, dans le courant de l'année 1828, j'ai considéré particulièrement le cas d'un nouveau polyèdre, celui d'un prisme droit ayant pour base un triangle équilatéral; la difficulté que présentait ce corps consistait à trouver la fonction des coordonnées qui devait multiplier l'exponentielle relative au temps, dans chacun des termes de la série intégrale, représentant la température variable d'un point quelconque du polyèdre proposé. J'ai employé, pour découvrir cette fonction, une méthode analytique particulière, que je n'ai pas développée dans mon premier travail, pour ne pas interrompre la marche de la solution par une digression trop étendue. Le mémoire que je présente aujourd'hui est destiné à remplir cette lacune.

L'expression intégrale de la température d'un corps solide de forme donnée, lorsque l'on connaît, et les conditions auxquelles sont assujetties les températures de la surface, et l'état calorifique initial de tous les points intérieurs, paraît pouvoir se composer, dans tous les cas, d'une série de termes qui satisfont à l'équation aux différences partielles du mouvement de la chaleur, et qui contiennent chacun trois facteurs distincts : l'un de ces facteurs est une exponentielle variable avec le temps seulement, le second une fonction des coordonnées indépendante du temps, enfin le troisième un coefficient constant dont la valeur numérique est différente d'un terme à l'autre de la série; de plus, chaque terme simple est particularisé par certains paramètres qui entrent à la fois

dans l'exponentielle relative au temps, et dans la fonction des coordonnées, et dont les valeurs numériques sont les racines réelles de certaines équations transcendantes.

La recherche de cette expression intégrale, renfermant les lois du mouvement de la chaleur dans le corps donné, a été ramenée par les géomètres à la solution de plusieurs problèmes qui se présentent dans l'ordre suivant, il faut : 1° choisir le système de coordonnées qui simplifie le plus les équations de la surface, sans compliquer les recherches ultérieures; 2° chercher une fonction simple qui satisfasse à l'équation aux différences partielles générales, et qui puisse se prêter facilement à y introduire les conditions de la surface; 3° déterminer les éléments, les paramètres de cette fonction de manière à ce qu'elle satisfasse à ces conditions; 4° enfin trouver les valeurs numériques des coefficients qui doivent multiplier les différentes fonctions simples, pour que leur somme satisfasse à l'état calorifique initial.

De tous ces problèmes successifs le dernier est le seul que les géomètres soient parvenus à résoudre d'une manière générale. La solution des premiers dépend de la forme des corps que l'on considère; très-facile pour un petit nombre d'entre eux, très-difficile pour d'autres, elle est le plus souvent impossible dans l'état actuel de l'analyse.

Chaque terme simple de la série qui exprime la température variable d'un prisme rectangulaire, solide et homogène, contient comme facteurs les cosinus ou sinus de trois angles, respectivement proportionnels aux trois coordonnées orthogonales; chacun de ces facteurs devient constant ou nul sur deux faces opposées du polyèdre; cette séparation des coordonnées, sous des lignes trigonométriques différentes, donne une grande facilité pour satisfaire aux conditions de la surface.

Dans le cas du prisme droit ayant pour base un triangle équilatéral, le choix des coordonnées capables de simplifier les équations de la surface offrait une plus grande difficulté, et il était

encore plus difficile de trouver une fonction de ces coordonnées satisfaisant à l'équation aux différences partielles générales et aux conditions de cette surface.

Je suis parvenu à écarter la première difficulté en prenant quatre coordonnées au lieu de trois, l'une parallèle à l'axe du prisme, les trois autres parallèles au plan de la base et perpendiculaires à ses trois faces latérales, ces trois dernières coordonnées étant liées entre elles par une équation fort simple; ce choix établit dans les calculs une symétrie correspondante à celle du corps proposé, sans laquelle ils eussent été inabordables.

La fonction des coordonnées dont la recherche constituait la seconde difficulté peut être composée de sinus et de cosinus, comme dans le cas des prismes rectangulaires; mais ici les coordonnées ne sont plus toutes séparées dans des facteurs transcendants différents; celles qui sont parallèles au plan de la base sont réunies par voie d'addition sous les mêmes lignes trigonométriques, où elles sont respectivement multipliées par des coefficients dépendant d'un paramètre commun à l'exponentielle et à la fonction simple; ces coefficients peuvent varier sans que ce paramètre cesse d'avoir la même valeur; il suit de là que la fonction cherchée peut être conçue d'abord comme composée d'une infinité de termes correspondant à tous les systèmes de valeurs des coefficients dont je viens de parler, mais à la même valeur numérique du paramètre qui particularise cette fonction. Il faut ensuite distinguer parmi tous ces termes les seuls qu'il faille conserver pour que la série satisfasse aux conditions de la surface latérale du prisme proposé. C'est la détermination de ces termes uniques qui constitue le but de l'analyse que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie.

Dans mon premier mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps de forme polyédrique, j'ai indiqué les vérifications au moyen desquelles on s'assure que la fonction simple dont il s'agit satisfait effectivement à toutes les conditions qui lui étaient

imposées. J'ai ensuite développé, dans le même travail, l'usage qu'il faut faire de cette fonction pour obtenir l'expression intégrale des lois du refroidissement du prisme triangulaire régulier, et toutes les conséquences importantes pour la question physique qui découlent de ces lois.

J'énoncerai ici quelques-unes de ces conséquences; je choisirai le cas où le prisme triangulaire régulier, d'abord échauffé uniformément dans toute son étendue, se refroidirait par le contact de sa surface avec un fluide entretenu à une température constante.

Alors, si l'on imagine une des trois faces latérales du prisme triangulaire partagée en trois bandes égales par deux lignes perpendiculaires aux bases, on trouve que, vers la fin du refroidissement, la tranche ou bande du milieu laissera échapper à elle seule une quantité de chaleur presque double de celle écoulée par les deux tranches extrêmes ensemble.

Un autre calcul indique que, vers la fin du refroidissement, la quantité de chaleur écoulée par les deux bases réunies est à celle qui s'écoule latéralement, comme le carré de l'épaisseur du prisme est au carré du double de sa hauteur; à l'époque voisine de l'état initial, ce rapport était celui des surfaces correspondantes, ou celui du tiers de l'épaisseur à la hauteur du prisme. De ces deux rapports le premier surpasse le second, l'égale, ou est plus petit que lui, suivant que le triple de l'épaisseur est plus grand que le quadruple de la hauteur du prisme, l'égale ou lui est inférieur. Ainsi, lorsque le triple de l'épaisseur du prisme surpassera le quadruple de sa hauteur, les parties voisines des bases se refroidiront proportionnellement moins vite que celles voisines des faces latérales; l'inverse aura lieu dans le cas contraire.

On obtiendrait des conséquences analogues si l'état initial des températures était plus compliqué, ou si le prisme perdait son calorique par le rayonnement.

Je crois devoir faire mention ici d'une innovation que j'ai introduite dans le mode de rédaction de ce second travail : j'ai réuni

toutes les équations, dont l'ensemble constitue la méthode analytique que je me proposais de développer, sur plusieurs tableaux placés à la fin du mémoire, à la manière des figures de géométrie. Par ce moyen le texte, plus concis et non interrompu, permet de saisir plus rapidement le but et la succession des raisonnements, tandis que les calculs, rangés sur les tableaux dans leur ordre naturel, offrent la marche de l'opération sous un second point de vue, tout aussi clair et tout aussi complet pour les personnes habituées aux mathématiques.

RECHERCHE ANALYTIQUE

D'UNE FONCTION SERVANT À EXPRIMER LES LOIS DU REFROIDISSEMENT D'UN PRISME DROIT, TRIANGULAIRE ET RÉGULIER.

Il s'agit de trouver une fonction u des deux coordonnées orthogonales x et y, qui satisfasse à l'équation aux différences partielles [1] (voyez le tableau des équations placé à la fin de cette note), et qui devienne nulle pour tous les points situés sur le périmètre d'un triangle équilatéral. Le paramètre θ est aussi inconnu, et l'on doit déterminer sa valeur de manière à remplir les conditions précédentes.

Soit pris pour origine des coordonnées le centre du cercle inscrit au triangle proposé; soit l le rayon de ce cercle; soient α, α', α'', les angles compris entre l'axe des x et les perpendiculaires abaissées de l'origine sur les côtés de ce triangle; a, a', a'', les cosinus de ces angles; b, b', b'', leurs sinus; soient représentés par P, P′, P″, les binomes $(ax+by)$, $(a'x+b'y)$, $(a''x+b''y)$.

D'après ces données, il faudra que la fonction u satisfasse à l'équation [1], et devienne nulle pour $P=l$, $P'=l$, ou $P''=l$. On peut regarder P, P′, P″, comme trois coordonnées nouvelles, substituées aux deux anciennes coordonnées x et y, liées à ces dernières par les équations de transformation [2], mais non arbitraires toutes les trois, car l'élimination de x et y entre les équations [2] conduit à la relation [3], à laquelle doivent toujours satisfaire P, P′ et P″.

Soient p, p', p'', des constantes liées entre elles et avec le paramètre θ par l'équation [5]; la fonction u, donnée par l'équation [4], satisfera évidemment à l'équation [1]; le sigma indique une somme de termes semblables, correspondant à autant de systèmes de valeurs de p, p', p''; A et B peuvent varier d'un terme à l'autre.

L'équation [5] peut être remplacée par les deux équations [6], en y introduisant l'angle φ, variable, ainsi que p, p', p'', d'un terme à l'autre de la série [4]. Ces deux nouvelles équations de condition permettent d'éliminer p, p', p'', du trinome $(p\mathrm{P}+p'\mathrm{P}'+p''\mathrm{P}'')$, et de l'exprimer en P, P', P'' et φ : en effet l'équation unique [3], qui lie les trois coordonnées P, P', P'', peut être remplacée par les trois équations [7], en y introduisant trois constantes arbitraires m, m', m'', et ces équations [7] conduisent au système d'équations [8], et à trois formes de la valeur du trinome $(p\mathrm{P}+p'\mathrm{P}'+p''\mathrm{P}'')$ exprimé en θ et φ; ces trois formes pourront être substituées successivement dans l'équation [4], afin de trouver les relations qui doivent lier θ, φ, A et B, pour que cette série [4] devienne séparément nulle pour $\mathrm{P}=l$, $\mathrm{P}'=l$, ou $\mathrm{P}''=l$, c'est-à-dire sur les trois côtés du triangle.

La série u [4] peut ainsi se mettre sous la forme [9]; φ, A et B, varient seuls d'un terme à l'autre de cette série; on peut regarder A et B comme des fonctions de $(\sin\varphi)$ et $(\cos\varphi)$, et prendre pour limites du sigma les angles $\varphi=0$ et $\varphi=2\pi$; enfin ces limites peuvent être rapprochées sans détruire la généralité de la série, en remarquant que les lignes trigonométriques qui entrent dans son terme général ne changent pas de valeurs absolues lorsqu'on y change φ en $(\varphi+\pi)$, ce qui permettra de réunir deux termes en un, et de prendre pour limites du sigma les angles $\varphi=0$ et $\varphi=\pi$. D'après cela, la fonction u prend la forme [11], les coefficients $\mathrm{F}\varphi$ et $f\varphi$ satisfaisant aux relations [10].

Il faut exprimer maintenant que u [11] devient identiquement nul lorsque $\mathrm{P}=l$. Pour cela il convient de transformer encore le terme général; cette transformation résulte du système d'équations [12], dans lequel on fait usage de la relation [3], et où l'on représente par Q une fonction de P et P'' indépendante de l'angle φ; la fonction u est alors amenée à la forme [13], et conduit à l'équation [14] lorsque $\mathrm{P}=l$.

Dans la série qui compose le second membre de cette équation, les lignes trigonométriques de l'angle dont Q est facteur, et qui

varie conséquemment avec les coordonnées, conservent la même valeur absolue lorsque l'on change $(\varphi - \alpha)$ en $(\pi - (\varphi - \alpha))$ ou φ en $(\pi + 2\alpha - \varphi)$. Cette circonstance exige que l'on réunisse deux à deux les termes de cette série avant d'exprimer qu'elle est identiquement nulle. L'équation [14] prend alors la forme [15], et conduit aux deux équations de condition [16] ou [17], qui peuvent être remplacées par les deux premières des six formules [18].

Si l'on cherche pareillement les relations auxquelles conduit la double condition que u soit nul pour $P' = l$ et pour $P'' = l$, on obtiendra les quatre dernières des six formules [18]. Ainsi les équations [18] établissent entre le paramètre θ, l'angle φ, et les formes F et f, les relations nécessaires et suffisantes pour que la fonction u [11] soit nulle sur les trois côtés du triangle proposé. En combinant ces équations de condition on obtient les formules [19], qui peuvent les remplacer.

Jusqu'ici rien n'indique dans le calcul que le triangle proposé est équilatéral; pour exprimer cette particularité il faut établir que

$$\alpha' = \frac{2\pi}{3} + \alpha, \quad \alpha'' = \frac{2\pi}{3} + \alpha';$$

on peut d'ailleurs donner a α telle valeur que l'on voudra; on choisira

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \text{d'où} \quad \alpha' = \pi \quad \text{et} \quad \alpha'' = \frac{5\pi}{3}.$$

Les équations [19], après la substitution de ces valeurs, fournissent alors les équations [20], qui donnent trois valeurs de $F\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)$, et trois de $f\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)$; en égalant entre elles les valeurs de chacun de ces deux systèmes, on est conduit aux six équations [21], qui n'en comportent réellement que quatre distinctes, et qui ne peuvent évidemment être satisfaites qu'en posant les équations [22].

Ces équations [22] exigent que les angles $\left[3l\theta \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\right]$,

$\left[3l\theta\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$ et $[3l\theta\cos\varphi]$, soient des multiples de la demi-circonférence; or, en égalant respectivement les deux premiers angles à $m\pi$ et $n\pi$ (m et n étant des nombres entiers quelconques), le troisième sera comme conséquence égal à $[m+n]\pi$, car la somme des deux cosinus $\left[\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$, $\left[\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right]$, est égale à $[\cos\varphi]$. Les équations [23] suffisent donc pour que les équations [21] soient satisfaites. On en déduit la valeur de l'angle φ au moyen de sa tangente, et le paramètre θ en fonction des nombres entiers m et n. Le groupe des équations [24] présente les principales conséquences des équations [23].

D'après cette analyse la série [11] ne doit contenir que des termes correspondant aux valeurs de φ moindres que π et satisfaisant aux équations [23] ou [24]. Or la valeur de φ donnée par sa tangente $\left[\frac{n-m}{(n+m)\sqrt{3}}\right]$ étant moindre que $\frac{\pi}{3}$, les angles

$$\left[\frac{\pi}{3}+\varphi\right],\quad \left[\frac{2\pi}{3}+\varphi\right],\quad \left[\frac{\pi}{3}-\varphi\right],\quad \left[\frac{2\pi}{3}-\varphi\right],\quad [\pi-\varphi],$$

seront encore compris entre les limites 0 et π; et si l'on substitue successivement ces cinq angles dans les expressions

$$\left[3l\theta\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right],\quad \left[3l\theta\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right],\quad [3l\cos\varphi],$$

elles seront encore des multiples de π en vertu des équations (23) ou [24]. La série [11] contiendra donc nécessairement six termes correspondant à l'angle φ dont la tangente est $\left[\frac{n-m}{(n+m)\sqrt{3}}\right]$, et aux cinq angles

$$\left[\frac{\pi}{3}+\varphi\right],\quad \left[\frac{2\pi}{3}+\varphi\right],\quad \left[\frac{\pi}{3}-\varphi\right],\quad \left[\frac{2\pi}{3}-\varphi\right],\quad [\pi-\varphi].$$

Il s'agit maintenant de trouver les valeurs des coefficients $F\varphi$ et $f\varphi$ correspondant à ces six termes : pour cela il faut recourir

aux équations [20] et [18], qui donnent, soit directement, soit combinées entre elles, le système des équations [25].

Si l'on substitue les valeurs [25] des coefficients généraux $F\varphi$ et $f\varphi$, et celles des lignes trigonométriques des six angles φ satisfaisant aux conditions [22], dans les six termes de la série [11], qui seuls doivent être conservés, on aura la fonction u demandée. On obtient ainsi l'équation [26] en faisant usage de la relation [3], qui se réduit à $[P+P'+P''=0]$ dans le cas du triangle équilatéral.

Pour donner à la fonction u [26] une forme plus symétrique, on peut : 1° introduire au lieu des nombres entiers positifs et négatifs $m, n, -(m+n)$, trois nombres λ, μ, ν, liés conséquemment entre eux par l'équation $[\lambda+\mu+\nu=0]$; 2° substituer aux deux constantes F et f deux nouvelles constantes M et N, liées aux premières par les équations [27]; 3° et remarquer que l'on peut supprimer ou ajouter sous les lignes trigonométriques des multiples quelconques de 2π. On obtient ainsi, toute réduction faite, la formule [28].

Ainsi la fonction u, qui satisfait aux conditions demandées, est nécessairement de la forme suivante :

$$
u = \left\{ \begin{array}{l}
\mathrm{M} \left\{ \begin{array}{l}
\cos\frac{2\pi}{9l}(\lambda \mathrm{P} + \mu \mathrm{P}' + \nu \mathrm{P}'' + 3\lambda l) \\
\qquad - \cos\frac{2\pi}{9l}(\nu \mathrm{P} + \mu \mathrm{P}' + \lambda \mathrm{P}'' + 3\nu l) \\
+ \cos\frac{2\pi}{9l}(\mu \mathrm{P} + \nu \mathrm{P}' + \lambda \mathrm{P}'' + 3\mu l) \\
\qquad - \cos\frac{2\pi}{9l}(\mu \mathrm{P} + \lambda \mathrm{P}' + \nu \mathrm{P}'' + 3\mu l) \\
+ \cos\frac{2\pi}{9l}(\nu \mathrm{P} + \lambda \mathrm{P}' + \mu \mathrm{P}'' + 3\nu l) \\
\qquad - \cos\frac{2\pi}{9l}(\lambda \mathrm{P} + \nu \mathrm{P}' + \mu \mathrm{P}'' + \lambda l)
\end{array} \right. \\
+ \mathrm{N} \left\{ \begin{array}{l}
\sin\frac{2\pi}{9l}(\lambda \mathrm{P} + \mu \mathrm{P}' + \nu \mathrm{P}'' + 3\lambda l) \\
\qquad + \sin\frac{2\pi}{9l}(\nu \mathrm{P} + \mu \mathrm{P}' + \lambda \mathrm{P}'' + 3\nu l) \\
+ \sin\frac{2\pi}{9l}(\mu \mathrm{P} + \nu \mathrm{P}' + \lambda \mathrm{P}'' + 3\mu l) \\
\qquad + \sin\frac{2\pi}{9l}(\mu \mathrm{P} + \lambda \mathrm{P}' + \nu \mathrm{P}'' + 3\mu l) \\
+ \sin\frac{2\pi}{9l}(\nu \mathrm{P} + \lambda \mathrm{P}' + \mu \mathrm{P}'' + 3\nu l) \\
\qquad + \sin\frac{2\pi}{9l}(\lambda \mathrm{P} + \nu \mathrm{P}' + \mu \mathrm{P}'' + 3\lambda l)
\end{array} \right.
\end{array} \right.
$$

Les coordonnées P, P′, P″, sont liées entre elles par l'équation

$$\mathrm{P} + \mathrm{P}' + \mathrm{P}'' = 0.$$

Les trois nombres entiers λ, μ, ν, sont liés entre eux par l'équation

$$\lambda + \mu + \nu = 0.$$

Enfin le paramètre θ est lié à ces trois nombres par l'équation

$$\theta^2 = \frac{2\pi^2}{27l^2}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2).$$

Dans le mémoire auquel cette note doit être ajoutée, j'ai indiqué les vérifications qu'il est nécessaire de faire pour s'assurer que la fonction u qui précède satisfait évidemment à toutes les conditions imposées; j'ai ensuite développé, dans ce même mémoire, l'usage qu'il faut faire de cette fonction pour obtenir l'expression intégrale des lois du refroidissement du prisme triangulaire régulier.

TABLEAU

DES ÉQUATIONS INDIQUÉES DANS LA NOTE CI-DESSUS.

[1] $$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \theta^2 u = 0.$$

[2] $$P = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad P' = x\cos\alpha' + y\sin\alpha',$$
$$P'' = x\cos\alpha'' + y\sin\alpha''.$$

[3] $$P\sin(\alpha'-\alpha'') + P'\sin(\alpha''-\alpha) + P''\sin(\alpha-\alpha') = 0$$

[4] $$u = \Sigma\{A\cos(pP+p'P'+p''P'') + B\sin(pP+pP'+p''P'')\}.$$

[5] $$(pa+p'a'+p''a'')^2 + (pb+p'b'+p''b'')^2 = \theta^2.$$

[6] $$pa+p'a'+p''a'' = \theta\cos\phi, \quad pb+p'b'+p''b'' = \theta\sin\phi.$$

[7]
$$\left\{\begin{array}{l} P = m'\sin(\alpha-\alpha') - m''\sin(\alpha''-\alpha) = m'(ba'-ab') - m''(ba''-a''b) \\ \qquad = b(ma+m'a'+m''a'') - a(mb+m'b'+m''b'') \\ P' = m''\sin(\alpha'-\alpha'') - m\sin(\alpha-\alpha') = m''(b'a''-a'b'') - m(ba'-ab') \\ \qquad = b'(ma+m'a'+m''a'') - a'(mb+m'b'+m''b'') \\ P'' = m\sin(\alpha''-\alpha) - m'\sin(\alpha'-\alpha'') = m(b''a-a''b) - m'(b'a''-a'b'') \\ \qquad = b''(ma+m'a'+m''a'') - a''(mb+m'b'+m''b''). \end{array}\right.$$

$$[8]\quad \begin{cases} ma+m'a'+m''a'' = \begin{cases} \dfrac{a''P'-a'P''}{a''b'-a'b''} = \dfrac{aP''-a''P}{ab''-a''b} = \dfrac{a'P-aP'}{a'b-ab'} = \\ \dfrac{P'\cos\alpha''-P''\cos\alpha'}{\sin(\alpha'-\alpha'')} = \dfrac{P''\cos\alpha-P\cos\alpha''}{\sin(\alpha''-\alpha)} = \dfrac{P\cos\alpha'-P'\cos\alpha}{\sin(\alpha-\alpha')}. \end{cases} \\ mb+m'b'+b''m'' = \begin{cases} \dfrac{b''P'-b'P''}{a''b'-a'b''} = \dfrac{bP''-b''P}{ab''-a''b} = \dfrac{b'P-bP'}{a'b-ab'} = \\ \dfrac{P'\sin\alpha''-P''\sin\alpha'}{\sin(\alpha'-\alpha'')} = \dfrac{P''\sin\alpha-P\sin\alpha''}{\sin(\alpha''-\alpha)} = \dfrac{P\sin\alpha'-P'\sin\alpha}{\sin(\alpha-\alpha')}. \end{cases} \\ Pp+P'p'+P''p'' = \begin{cases} (pb+p'b'+p''b'')(ma+m'a'+m''a'') - \\ \qquad (pa+p'a'+p''a'')(mb+m'b'+m''b'') = \\ \theta\left\{\dfrac{P'\sin(\varphi-\alpha'')-P''\sin(\varphi-\alpha')}{\sin(\alpha'-\alpha'')}\right\} = \theta\left\{\dfrac{P''\sin(\varphi-\alpha)-P\sin(\varphi-\alpha'')}{\sin(\alpha''-\alpha)}\right\} \\ \qquad = \theta\left\{\dfrac{P\sin(\varphi-\alpha')-P'\sin(\varphi-\alpha)}{\sin(\alpha-\alpha')}\right\}. \end{cases} \end{cases}$$

$$[9]\quad u = \sum_{0}^{2\pi}\left\{A\cos\theta\left\{\frac{P'\sin(\varphi-\alpha'')-P''\sin(\varphi-\alpha')}{\sin(\alpha'-\alpha'')}\right\} + B\sin\theta\left\{\frac{P'\sin(\varphi-\alpha'')-P''\sin(\varphi-\alpha')}{\sin(\alpha'-\alpha'')}\right\}\right\}.$$

$$[10]\quad \begin{cases} A\begin{pmatrix}\sin\varphi_1\\ \cos\varphi_1\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}-\sin\varphi_1\\ -\cos\varphi_1\end{pmatrix} = F\varphi, \quad F(\varphi\pm 2n\pi) = F\varphi, \\ \qquad\qquad F(\varphi\pm\pi) = F\varphi. \\ B\begin{pmatrix}\sin\varphi_1\\ \cos\varphi_1\end{pmatrix} - B\begin{pmatrix}-\sin\varphi_1\\ -\cos\varphi_1\end{pmatrix} = f\varphi, \quad f(\varphi\pm 2n\pi) = f\varphi, \\ \qquad\qquad f(\varphi\pm\pi) = -f\varphi. \end{cases}$$

$$[11]\quad u' = \sum_{0}^{\pi}\left\{F\varphi\cos\theta\left[\frac{P'\sin(\varphi-\alpha'')-P'\sin(\varphi-\alpha')}{\sin(\alpha'-\alpha'')}\right] + f\varphi\sin\theta\left[\frac{P'\sin(\varphi-\alpha'')-P''\sin(\varphi-\alpha')}{\sin(\alpha'-\alpha'')}\right]\right\}.$$

$$[12]\quad \left\{\begin{aligned} &P'\sin(\varphi-\alpha'')-P''\sin(\varphi-\alpha') = P'\sin[\varphi-\alpha-(\alpha''-\alpha)] \\ &\qquad -P''\sin[\varphi-\alpha+(\alpha-\alpha') \\ &= \sin(\varphi-\alpha)\{P'\cos(\alpha''-\alpha)-P''\cos(\alpha-\alpha')\} \\ &\qquad -\cos(\varphi-\alpha)\{P'\sin(\alpha''-\alpha)+P''\sin(\alpha-\alpha')\} \\ &= \{P'\cos(\alpha''-\alpha)-P''\cos(\alpha-\alpha')\}\sin(-\varphi\alpha) \\ &\qquad +P\sin(\alpha'-\alpha'')\cos(\varphi-\alpha) \end{aligned}\right.$$

$$\left[\frac{P'\cos(\alpha''-\alpha)-P''\cos(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha'-\alpha'')}\right] = Q.$$

$$[13]\quad u = \sum_0^{\pi}\{F\varphi\cos\theta\{Q\sin(\varphi-\alpha)+P\cos(\varphi-\alpha)\} +f\varphi\sin\theta\{Q\sin(\varphi-\alpha)+P\cos(\varphi-\alpha)\}\}.$$

$$[14]\quad 0 = \sum_0^{\pi}\{F\varphi\cos[\theta l\cos(\varphi-\alpha)]+f\varphi\sin[\theta l\cos(\varphi-\alpha)]\}\cos[\theta Q\sin(\varphi-\alpha)] + \{f\varphi\cos[\theta l\cos(\varphi-\alpha)]-F\varphi\sin[\theta l\cos(\varphi-\alpha)]\}\sin[\theta Q\sin(\varphi-\alpha)].$$

$$[15]\quad \left\{\begin{aligned} 0 = &\{(F\varphi+F(\pi+2\alpha-\varphi))\cos[\theta l\cos(\varphi-\alpha)] \\ &+(f\varphi-f(\pi+2\alpha-\varphi))\sin[\theta l\cos(\varphi-\alpha)]\}\cos[\theta Q\sin(\varphi-\alpha)] \\ &+\{(-F\varphi+F(\pi+2\alpha-\varphi))\cos[\theta l\cos(\varphi-\alpha)] \\ &+(f\varphi+f(\pi+2\alpha-\varphi))\sin[\theta l\cos(\varphi-\alpha)]\}\sin(\theta Q\sin(\varphi-\alpha)]. \end{aligned}\right.$$

$$[16]\quad \left\{\begin{aligned} &[F\varphi+F(\pi+2\alpha-\varphi)]\cos[l\theta\cos(\varphi-\alpha)] \\ &\qquad +[f\varphi-f(\pi+2\alpha-\varphi)]\sin[l\theta\cos(\varphi-\alpha)] = 0 \\ &[-F\varphi+F(\pi+2\alpha-\varphi)]\sin[l\theta\cos(\varphi-\alpha)] \\ &\qquad +[f\varphi+f(\pi+2\alpha-\varphi)]\cos[l\theta\cos(\varphi-\alpha)] = 0 \end{aligned}\right.$$

$$[17]\quad \left\{\begin{aligned} &[F\varphi+F(2\alpha-\varphi)]\cos[l\theta\cos(\varphi-\alpha)] \\ &\qquad +[f\varphi+f(2\alpha-\varphi)]\sin[l\theta\cos(\varphi-\alpha) = 0 \\ &[-F\varphi+F(2\alpha-\varphi)]\sin[l\theta\cos(\varphi-\alpha)] \\ &\qquad +[f\varphi-f(2\alpha-\varphi)]\cos[l\theta\cos(\varphi-\alpha)] = . \end{aligned}\right.$$

$$[18]\quad \begin{cases} F\varphi\cos[2l\theta\cos(\varphi-\alpha)]+f\varphi\sin[2l\theta\cos(\varphi-\alpha)]+F(2\alpha-\varphi) = 0, \\ F\varphi\sin[2l\theta\cos(\varphi-\alpha)]-f\varphi\cos[2l\theta\cos(\varphi-\alpha)]+f(2\alpha-\varphi) = 0, \\ F\varphi\cos[2l\theta\cos(\varphi-\alpha')]+f\varphi\sin[2l\theta\cos(\varphi-\alpha')]+F(2\alpha'-\varphi) = 0, \\ F\varphi\sin[2l\theta\cos(\varphi-\alpha')]-f\varphi\cos[2l\theta\cos(\varphi-\alpha')]+f(2\alpha'-\varphi) = 0, \\ F\varphi\cos[2l\theta\cos(\varphi-\alpha'')]+f\varphi\sin[2l\theta\cos(\varphi-\alpha'')]+F(2\alpha''-\varphi) = 0, \\ F\varphi\sin[2l\theta\cos(\varphi-\alpha'')]-f\varphi\cos[2l\theta\cos(\varphi-\alpha'')]+f(2\alpha''-\varphi) = 0, \end{cases}$$

$$[19]\quad \begin{cases} F(2(\alpha-\alpha')+\varphi) = F\varphi\cos 2l\theta[\cos(\varphi-\alpha')-\cos(\varphi-\alpha'+\alpha-\alpha')] \\ \qquad\qquad +f\varphi\sin 2l\theta[\cos(\varphi-\alpha')-\cos(\varphi-\alpha'+\alpha-\alpha')], \\ f(2(\alpha-\alpha')+\varphi) = -F\varphi\sin 2l\theta[\cos(\varphi-\alpha')-\cos(\varphi-\alpha'+\alpha-\alpha')] \\ \qquad\qquad +f\varphi\cos 2l\theta[\cos(\varphi-\alpha')-\cos(\varphi-\alpha'+\alpha-\alpha')], \\ F(2(\alpha''-\alpha)+\varphi) = F\varphi\cos 2l\theta[\cos(\varphi-\alpha)-\cos(\varphi-\alpha+\alpha''-\alpha)] \\ \qquad\qquad +f\varphi\sin 2l\theta[\cos(\varphi-\alpha)-\cos(\varphi-\alpha+\alpha''-\alpha)], \\ f(2(\alpha''-\alpha)+\varphi) = -F\varphi\sin 2l\theta[\cos(\varphi-\alpha)-\cos(\varphi-\alpha+\alpha''-\alpha)] \\ \qquad\qquad +f\varphi\cos 2l\theta[\cos(\varphi-\alpha)-\cos(\varphi-\alpha+\alpha''-\alpha)], \\ F(2(\alpha'-\alpha'')+\varphi) = F\varphi\cos 2l\theta[\cos(\varphi-\alpha'')-\cos(\varphi-\alpha''+\alpha'-\alpha'')] \\ \qquad\qquad +f\varphi\sin 2l\theta[\cos(\varphi-\alpha'')-\cos(\varphi-\alpha''+\alpha'-\alpha'')], \\ f(2(\alpha'-\alpha'')+\varphi) = -F\varphi\sin 2l\theta[\cos(\varphi-\alpha'')-\cos(\varphi-\alpha''+\alpha'-\alpha'')] \\ \qquad\qquad +f\varphi\cos 2l\theta[\cos(\varphi-\alpha'')-\cos(\varphi-\alpha''+\alpha'-\alpha'')]. \end{cases}$$

$$[20]\quad \begin{cases} F\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right) = F\varphi\cos\left[2l\theta\sqrt{3}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right]+f\varphi\sin\left[2l\theta\sqrt{3}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ \qquad = F\varphi\cos\left[2l\theta\sqrt{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right]+f\varphi\sin\left[2l\theta\sqrt{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ \qquad = F\varphi\cos[2l\theta\sqrt{3}\sin\varphi]-f\varphi\sin[2l\theta\sqrt{3}\sin\varphi], \\ f\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right) = -F\varphi\sin\left[2l\theta\sqrt{3}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right]+f\varphi\cos\left[2l\theta\sqrt{3}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ \qquad = -F\varphi\sin\left[2l\theta\sqrt{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right]+f\varphi\cos\left[2l\theta\sqrt{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ \qquad = F\varphi\sin[2l\theta\sqrt{3}\sin\varphi]+f\varphi\cos[2l\theta\sqrt{3}\sin\varphi]. \end{cases}$$

$$[21]\quad \begin{cases} \left\{F\varphi\sin\left[l\theta\sqrt{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right]+f\varphi\cos\left[l\theta\sqrt{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\} \\ \qquad\qquad \sin\left[3l\theta\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right]=0, \\ \left\{F\varphi\sin\left[l\theta\sqrt{3}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right]+f\varphi\cos\left[l\theta\sqrt{3}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\} \\ \qquad\qquad \sin\left[3l\theta\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right]=0, \\ \{F\varphi\sin[l\theta\sqrt{3}\sin\varphi]-f\varphi\cos[l\theta\sqrt{3}\sin\varphi]\}\sin[3l\theta\cos\varphi]=0, \\ \left\{F\varphi\cos\left[l\theta\sqrt{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right]-f\varphi\sin\left[l\theta\sqrt{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\} \\ \qquad\qquad \sin\left[3l\theta\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right]=0, \\ \left\{F\varphi\cos\left[l\theta\sqrt{3}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right]-f\varphi\sin\left[l\theta\sqrt{3}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\} \\ \qquad\qquad \sin\left[3l\theta\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right]=0, \\ \{F\varphi\cos[l\theta\sqrt{3}\sin\varphi]+f\varphi\sin[l\theta\sqrt{3}\sin\varphi]\}\sin[3l\theta\cos\varphi]=0. \end{cases}$$

$$[22]\quad \sin\left[3l\theta\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right]=0,\quad \sin\left[3l\theta\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right]=0,$$
$$\sin[3l\theta\cos\varphi]=0.$$

$$[23]\quad 3l\theta\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=m\pi,\quad 3l\theta\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)=n\pi.$$

$$[24]\quad \left\{\begin{array}{l} 3l\theta\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=m\pi, \\ 3l\theta\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)=n\pi, \\ 3l\theta\cos\varphi=(m+n)\pi. \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \tan\Phi=\frac{n-m}{(n+m)\sqrt{3}}, \\ \theta=\frac{\pi}{3l\sqrt{3}}\sqrt{3(n+m)^2+(n-m)^2}, \end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} l\theta\sqrt{3}\sin\varphi \\ =\frac{\pi}{3}(n-m), \\ l\theta\sqrt{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right) \\ =\frac{\pi}{3}(2n+m), \\ l\theta\sqrt{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right) \\ =-\frac{\pi}{3}(n+2m). \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} F\varphi = F, & f\varphi = f, \\ F\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right) = F\cos\tfrac{2}{5}(n-m)\pi + f\sin\tfrac{2}{5}(n-m)\pi, \\ f\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right) = F\sin\tfrac{2}{5}(n-m)\pi - f\cos\tfrac{2}{5}(n-m)\pi, \\ F\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right) = F\cos\tfrac{2}{5}(n-m)\pi - f\sin\tfrac{2}{5}(n-m)\pi, \\ f\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right) = F\sin\tfrac{2}{5}(n-m)\pi + f\cos\tfrac{2}{5}(n-m)\pi, \end{cases}$$

[25]
$$\begin{cases} F(\pi-\varphi) = -F\cos\tfrac{2}{5}(n+m)\pi + f\sin\tfrac{2}{5}(n+m)\pi \\ f(\pi-\varphi) = -F\sin\tfrac{2}{5}(n+m)\pi - f\cos\tfrac{2}{5}(n+m)\pi, \\ F\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi\right) = -F\cos\tfrac{2}{5}n\pi - f\sin\tfrac{2}{5}n\pi, \\ f\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi\right) = -F\sin\tfrac{2}{5}n\pi + f\cos\tfrac{2}{5}n\pi, \\ F\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right) = -F\cos\tfrac{2}{5}m\pi - f\sin\tfrac{2}{5}m\pi, \\ f\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right) = F\sin\tfrac{2}{5}m\pi - f\cos\tfrac{2}{5}m\pi. \end{cases}$$

[26]
$$\begin{aligned} u = {} & F\cos\tfrac{2\pi}{9l}(nP-(n+m)P'+mP'') \\ & + f\sin\tfrac{2\pi}{9l}(nP-(n+m)P'+mP'') \\ & + F\cos\tfrac{2\pi}{9l}(-(n+m)P+mP'+nP''+3(n-m)l) \\ & + f\sin\tfrac{2\pi}{9l}(-(n+m)P+mP'+nP''+3(n-m)l) \\ & + F\cos\tfrac{2\pi}{9l}(mP+nP'-(n+m)P''+3(m-n)l) \\ & + f\sin\tfrac{2\pi}{9l}(mP+nP'-(n+m)P''+3(m-n)l) \\ & - F\cos\tfrac{2\pi}{9l}(mP-(n+m)P'+nP''+3l(m+n)) \\ & + f\sin\tfrac{2\pi}{9l}(mP-(n+m)P'+nP''+3l(m+n)) \\ & - F\cos\tfrac{2\pi}{9l}(-(n+m)P+nP'+mP''-3lm) \\ & + f\sin\tfrac{2\pi}{9l}(-(n+m)P+nP'+mP''-3lm) \\ & - F\cos\tfrac{2\pi}{9l}(nP+mP'-(n+m)P''-3ln) \\ & + f\sin\tfrac{2\pi}{9l}(nP+mP'-(n+m)P''-3ln). \end{aligned}$$

[27] $F = M\cos\frac{4\nu\pi}{3} - N\sin\frac{4\nu\pi}{3}, \quad f = M\sin\frac{4\nu\pi}{3} + N\cos\frac{4\nu\pi}{3},$

$m = \mu, \quad n = \nu, \quad -(m+n) = \lambda; \quad \lambda + \mu + \nu = 0.$

[28] $$u = \left\{\begin{array}{l} M\left\{\begin{array}{l} \cos\frac{2\pi}{9l}(\lambda P + \mu P' + \nu P'' + 3\lambda l) \\ \quad + \cos\frac{2\pi}{9l}(\mu P + \nu P' + \lambda P'' + 3\mu l) \\ \quad + \cos\frac{2\pi}{9l}(\nu P + \lambda P' + \mu P'' + 3\nu l) \\ \quad - \cos\frac{2\pi}{9l}(\nu P + \mu P' + \lambda P'' + 3\nu l) \\ \quad - \cos\frac{2\pi}{9l}(\mu P + \lambda P' + \nu P'' + 3\mu l) \\ \quad - \cos\frac{2\pi}{9l}(\lambda P + \nu P' + \mu P'' + 3\lambda l) \end{array}\right. \\ +N\left\{\begin{array}{l} \sin\frac{2\pi}{9l}(\mu P + \lambda P' + \nu P'' + 3\lambda l) \\ \quad + \sin\frac{2\pi}{9l}(\mu P + \nu P' + \lambda P'' + 3\mu l) \\ \quad + \sin\frac{2\pi}{9l}(\nu P + \lambda P' + \mu P'' + 3\nu l) \\ \quad + \sin\frac{2\pi}{9l}(\nu P + \mu P' + \lambda P'' + 3\nu l) \\ \quad + \sin\frac{2\pi}{9l}(\mu P + \lambda P' + \nu P'' + 3\mu l) \\ \quad + \sin\frac{2\pi}{9l}(\lambda P + \nu P' + \mu P'' + 3\lambda l). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

MÉMOIRE

SUR

LE CALCUL DES ACTIONS MOLÉCULAIRES

DÉVELOPPÉES

PAR LES CHANGEMENTS DE TEMPÉRATURE

DANS LES CORPS SOLIDES;

PAR J.-M.-C. DUHAMEL.

L'illustre auteur de la théorie mathématique de la chaleur s'est borné à considérer les changements de température que subissent les différents points d'un système, et ne s'est point occupé des actions moléculaires développées par ces changements.

La figure des corps solides ne s'altérant pas en général de manière à modifier sensiblement le mouvement de la chaleur, il a pu dans ce cas dégager la question de toute considération mécanique. Lorsqu'il a voulu déterminer les équations générales de la propagation de la chaleur dans les liquides, il ne lui a plus été possible de négliger les dilatations ou contractions produites par le changement de la température, parce qu'elles influaient sur les mouvements du liquide, et par suite sur la distribution de la chaleur. Et comme la cohésion ainsi que la compressibilité des liquides est

très-petite et considérée comme nulle dans les équations de l'hydrodynamique, il a dû considérer le changement de densité résultant de la température comme déterminé, indépendamment de toute pression, par la loi connue de la dilatation du liquide.

Mais l'on serait dans une grande erreur si l'on croyait que la dilatabilité connue d'une substance solide suffirait de même pour déterminer la dilatation que subiraient ses différents points par une élévation inégale de température. Ce qui était permis pour les liquides ne l'est plus pour les solides, dont la cohésion est beaucoup plus considérable. Les forces moléculaires développées par cette élévation de température n'agissent pas sur chaque point comme s'il était isolé, et c'est l'équilibre de ces forces dans le système entier qui détermine le changement des distances mutuelles des molécules, et leur position, soit après l'établissement de l'équilibre, soit pendant le mouvement vibratoire auquel ces changements peuvent donner lieu.

Cette action de la chaleur se retrouve dans presque toutes les questions relatives à l'équilibre et au mouvement des corps élastiques; car c'est une conception purement idéale que celle d'un corps dont tous les points auraient la même température. Il était donc indispensable d'en apprécier les effets, et de déterminer les modifications qu'elle apporte aux équations générales que l'on connaissait. Ces recherches, qui font l'objet de ce mémoire, m'avaient paru depuis longtemps mériter l'attention des géomètres. Elles forment un complément nécessaire de la théorie des corps élastiques, et établissent un lien entre elle et la théorie de la chaleur, dont elle était entièrement isolée.

Lorsqu'une nouvelle classe de phénomènes est soumise au calcul, l'avantage n'est pas seulement pour la théorie physique qui acquiert de nouveaux moyens de liaison et de déduction; il est aussi pour l'analyse elle-même, qui trouve dans cette application l'occasion et même la source de nouveaux progrès. Qu'il me soit permis d'insister un peu sur ce point, qui ne me paraît pas assez senti par tous les géomètres.

Une question physique qui n'a point encore été traitée, étant réduite à une question de calcul, peut exiger une méthode nouvelle et devenir ainsi l'occasion d'un progrès; le calcul des différences partielles en a offert de nos jours des exemples remarquables : mais l'analyse abandonnée à elle-même ne parvient souvent à son but que par des circuits qu'une observation attentive du phénomène physique aurait fait éviter. Les équations n'étant que la traduction d'une hypothèse primitive, on peut indifféremment suivre le développement du phénomène au moyen de l'hypothèse ou des équations. Mais la marche physique en est quelquefois plus facile à suivre que sa traduction abstraite, sinon dans l'appréciation exacte, du moins dans sa généralité; elle sert alors de guide à l'analyse, et la conduit par la route la plus courte et la mieux appropriée à la nature de la question, puisque c'est celle que suit le développement naturel du phénomène. C'est ainsi que les théories physiques peuvent contribuer aux progrès de l'analyse pure, comme l'avaient déjà fait à un si haut degré les théories géométriques; entre toutes les applications que je pourrais citer de ces dernières, je rappellerai le parti que Monge a su tirer de la génération des surfaces pour l'intégration des équations aux différences partielles. La génération et le développement des phénomènes physiques présentent des ressources du même genre, sur lesquelles on ne saurait trop appeler l'attention des géomètres.

Dans le calcul des actions moléculaires développées par l'élévation de la température, j'ai considéré les corps solides comme composés de molécules disjointes, séparées par de très-petits intervalles. C'est ainsi que les a envisagés M. Poisson dans son mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques, et je me suis servi des procédés de sommation dont il a fait usage. On sait qu'il est parvenu ainsi aux équations données antérieurement par M. Navier.

J'ai déduit de la forme des équations générales une remarque importante, et qui consiste en ce que les effets dus à l'action des forces extérieures et à la variation de la température coexistent

indépendamment l'un de l'autre, et se superposent pour former l'effet total, soit dans l'équilibre, soit dans le mouvement. Cette remarque est utile, non-seulement en ce qu'elle peut simplifier le calcul en le divisant, mais encore en ce qu'elle met en état d'apprécier la part qui se rapporte à chacune des deux causes dans l'effet total.

J'ai démontré ensuite que les questions relatives à cette théorie n'admettent qu'une seule solution; cette proposition est indispensable lorsqu'on part de solutions particulières pour en former une plus générale qui satisfasse à toutes les conditions de la question. Cette marche, suivie habituellement par Fourier, est presque toujours la plus simple et souvent la seule praticable, mais elle exige évidemment que l'on démontre qu'il n'existe qu'un seul système qui satisfasse aux conditions données : c'est aussi ce que faisait avec beaucoup de soin ce grand géomètre dans les deux cas distincts du mouvement uniforme et du mouvement varié de la chaleur, lesquels correspondent dans notre théorie aux cas de l'équilibre et du mouvement.

Les équations auxquelles je suis parvenu renferment deux constantes, dépendantes de la loi suivant laquelle la fonction qui exprime l'action de deux molécules varie quand on change leur distance ou leur température. Elles peuvent se déterminer facilement d'après les dilatations linéaires de la substance, produites, l'une par une tension uniforme appliquée normalement à la surface, l'autre par l'élévation uniforme de la température. M. Poisson avait donné le calcul d'une expérience très-simple, propre à faire connaître la première constante : quant à la seconde, j'ai fait voir comment elle dépendait de la dilatation produite par la chaleur; et j'ai démontré à ce sujet que, quelle que soit la figure d'un corps homogène en équilibre, si l'on élève d'une quantité égale la température de tous ses points, sans rien changer aux forces qui y sont appliquées, la variation de la distance de deux points quelconques ne dépend que de l'élévation de la température et nullement de la forme du corps. Cette proposition, admise par les physiciens

comme résultat de l'expérience, est une conséquence immédiate de mes équations.

J'ai fait ensuite l'application de ces équations à quelques cas particuliers.

J'ai considéré d'abord l'équilibre d'une sphère creuse dont la température est exprimée par une fonction arbitraire de la distance au centre. Le calcul s'achève complétement sans particulariser cette fonction; je n'entrerai pas dans le détail de toutes les questions particulières auxquelles il peut donner lieu : je me bornerai à indiquer le résultat suivant, qui m'a paru remarquable: « Quelle « que soit la loi suivant laquelle la température de chaque couche « ait été élevée, les rayons extrêmes ont les mêmes grandeurs que « si tous les points de la sphère étaient affectés de la température « moyenne. »

Les rayons intermédiaires ne jouissent pas généralement de la même propriété. Les valeurs particulières de ceux pour lesquels elle a lieu sont les racines d'une équation déterminée, qu'on peut résoudre dans chaque cas particulier, et qui est toujours satisfaite par les deux rayons extrêmes, qui sont en général les plus nécessaires à connaître. Ce résultat s'applique au cas d'un thermomètre dont la température varie. Le rayon intérieur de la boule est le même que si l'enveloppe était affectée de la température moyenne, qui est différente de celle du liquide intérieur; cette différence peut rendre les indications de l'instrument très-erronées quand la variation de la température est rapide : c'est ce que j'ai eu occasion de constater par une expérience décisive que j'ai eu l'honneur de communiquer à l'Académie. J'ai traité de même le cas d'un tuyau cylindrique qui m'a offert des résultats analogues.

J'ai examiné ensuite le cas plus compliqué d'une sphère composée de deux substances différentes. On pourrait supposer de même un nombre quelconque de couches de matières différentes sans qu'il y eût d'autre difficulté que l'extrême complication des calculs.

Après avoir discuté ces différentes questions qui ne se rapportent qu'à l'équilibre, j'ai considéré les mouvements vibra-

toires des points d'une sphère dont la température varie suivant une fonction quelconque de la distance au centre, et qui se refroidit librement dans un milieu invariable. Les circonstances de cette question sont beaucoup plus compliquées que celles des précédentes, et ma formule y satisfait avec toute la généralité qu'elles comportent.

Il serait au reste impossible d'indiquer toutes les applications de cette théorie; elle se retrouve dans les plus petits comme dans les plus grands phénomènes.

C'est à elle qu'il faut rapporter la rupture des vases inégalement échauffés, les effets des lames compensatrices employées dans l'horlogerie, les thermomètres de Breguet, etc. L'explosion des chaudières des machines à vapeur est due en grande partie sans doute aux tensions énormes que produit dans l'épaisseur de la chaudière le changement rapide de température qui se manifeste quelquefois à la hauteur du niveau d'eau. Enfin les pressions ou tensions que produit le refroidissement dans l'intérieur de la terre peuvent à la longue produire des déchirements dans les couches solides qui en composent l'enveloppe ; c'est en partie à cette cause que sont dus vraisemblablement les ruptures et les cataclysmes dont la géologie nous offre tant d'exemples, et qui sans doute se reproduiront à de plus grands intervalles dans l'avenir.

RECHERCHE DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES.

Considérons un corps solide dont tous les points aient la même température, et soient en équilibre en vertu de leur action réciproque, que nous regarderons comme dépendant, pour une même substance, de la température et de la distance.

Si les points du corps, tant à l'intérieur qu'à la surface, viennent à être sollicités par des forces données, et qu'en même temps leurs températures aient varié de quantités connues, il en résultera de nouvelles positions d'équilibre, qui changeront en même temps

que les températures, et qu'on peut se proposer de déterminer pour chaque état thermométrique du corps.

Au lieu de considérer les positions successives d'équilibré, on peut chercher à déterminer le mouvement que chaque point prendra, et la manière dont il sera modifié par le refroidissement du système.

Nous allons établir les équations générales qui renferment la solution de ce nouveau genre de questions.

Soient a, b, c, les coordonnées d'un point quelconque dans l'état primitif, où l'équilibre a lieu entre les actions mutuelles des molécules ayant une même température; x, y, z, les accroissements respectifs de a, b, c, qui sont des fonctions de ces coordonnées et du temps t; et $F(\rho,u)$, la fonction qui exprime l'excès de la force répulsive sur la force attractive de deux des molécules homogènes qui composent le corps, ρ désignant la distance qui les sépare, et u leur température. Si les deux molécules avaient des températures différentes, u, u', leur action dépendrait à la fois de u et u', et pourrait être représentée par une fonction $F(\rho,u,u')$, dans laquelle u et u' entreraient symétriquement. Dans ce cas il est facile de démontrer qu'on peut prendre, au lieu de u et u', leur valeur moyenne $\frac{u+u'}{2} = u_1$, lorsque la différence $u'-u$ est une petite fraction. En effet désignons par δ cette différence, l'action des deux molécules affectées de la température moyenne sera

$$F(\rho,u_1,u_1).$$

Si l'on change les températures u_1, la première en $u_1 - \frac{\delta}{2}$, la seconde en $u_1 + \frac{\delta}{2}$, on devra retomber sur $F(\rho,u,u')$. Or on obtiendra ainsi un développement dont le premier terme sera $F(\rho,u_1,u_1)$; les termes du premier degré en δ seront égaux et de signes contraires : donc le développement ne différera de $F(\rho,u_1,u_1)$ que par les termes du second ordre relativement à δ; si δ est très-

petit, on pourra se borner au premier terme, et par conséquent remplacer les températures u, u', par leur moyenne.

Si l'on prenait la température de l'une des molécules au lieu de la moyenne, l'erreur serait du premier ordre par rapport à δ, et il sera toujours facile de reconnaître dans chaque cas s'il est permis de la négliger.

Cela posé, considérons dans l'intérieur du corps un élément plan extrêmement petit, dont l'aire soit ω, et qui serve de base à un cylindre droit; et proposons-nous de calculer l'action exercée, après le déplacement, sur l'ensemble des molécules de ce cylindre, par toute la partie du corps située de l'autre côté de la base.

Nous opérerons la sommation de toutes les actions partielles en suivant la même marche que M. Poisson, dans son mémoire sur les corps élastiques, auquel nous renvoyons pour beaucoup de détails que nous omettrons pour abréger.

Soient a, b, c, les coordonnées primitives du point M du corps par lequel passe la base du cylindre; α, β, γ, les angles que forme, avec les axes, la normale à cette base, prise du même côté que le cylindre; $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$, les angles formés avec les axes par deux droites perpendiculaires entre elles, situées dans le plan de la base; les valeurs de tous ces angles se rapportant à l'état primitif du système. Prenons ces deux dernières directions et le prolongement de la normale pour axes de coordonnées a_1, b_1, c_1, et posons

$$
\begin{aligned}
a_1\cos\alpha'' + b_1\cos\alpha' - c_1\cos\alpha &= \Phi,\\
a_1\cos\beta'' + b_1\cos\beta' - c_1\cos\beta &= \Psi,\\
a_1\cos\gamma'' + b_1\cos\gamma' - c_1\cos\gamma &= \Theta,\\
\Phi\frac{dx}{da} + \Psi\frac{dx}{db} + \Theta\frac{dx}{dc} &= \Phi',\\
\Phi\frac{dy}{da} + \Psi\frac{dy}{db} + \Theta\frac{dy}{dc} &= \Psi',\\
\Phi\frac{dz}{da} + \Psi\frac{dz}{db} + \Theta\frac{dz}{dc} &= \Theta',
\end{aligned}
$$

D'où résulte

$$\rho^2 = \Phi^2 + \Psi^2 + \theta^2,$$

et par suite

$$\rho_1 = \rho + \frac{1}{\rho}(\Phi\Phi' + \Psi\Psi' + \theta\theta').$$

ρ_1 désignant ce qu'est devenu ρ après le déplacement des molécules.

En sommant les actions exercées sur le cylindre après le dérangement, par toutes les molécules situées du côté opposé, et désignant par P, Q, R, les composantes de cette action parallèlement aux axes des *a, b, c,* M. Poisson a trouvé, en désignant par ε l'intervalle moyen des molécules dans l'état primitif,

$$\omega P = -\Sigma \frac{\varphi+\varphi'}{\rho_1} f(\rho_1), \quad \omega Q = -\Sigma \frac{\psi+\psi'}{\rho_1} f(\rho_1),$$
$$\omega R = -\Sigma \frac{\theta+\theta'}{\rho_1} f(\rho_1).$$

$f(\rho_1)$ exprimant l'action de deux molécules dans le nouvel état du corps, et les sommes s'appliquant à toutes les molécules du cylindre, et de la partie du corps située du côté opposé à la base. Mais dans la question que nous traitons, nous devons remplacer $f(\rho_1)$ par $F(\rho_1, u_0+v_1)$, si nous désignons par u_0 la température de tous les points dans l'état primitif, et par v_1 la moyenne des températures ajoutées aux deux points que l'on considère. Nous aurons donc, dans l'hypothèse où nous nous sommes placés,

$$\omega P = -\Sigma \frac{\varphi+\varphi'}{\rho_1} F(\rho_1, u_0+v_1), \quad \omega Q = -\Sigma \frac{\psi+\psi'}{\rho_1} F(\rho_1, u_0+v_1),$$
$$\omega R = -\Sigma \frac{\theta+\theta'}{\rho_1} F(\rho_1, u_0+v_1).$$

Or on a

$$\frac{1}{\rho_1}F(\rho_1,u_0+v_1) = \frac{1}{\rho}F(\rho,u_0) + \frac{d.\frac{1}{\rho}F(\rho,u_0)}{d\rho}(\rho_1-\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{dF(\rho,u_0)}{du}v_1$$

$$= \frac{1}{\rho}F(\rho,u_0) + \frac{1}{\rho}\frac{d.\frac{1}{\rho}F(\rho,u_0)}{d\rho}(\Phi\Phi'+\Psi\Psi'+\theta\theta') + \frac{1}{\rho}\frac{dF(\rho,u_0)}{du}v_1.$$

D'ailleurs, on peut remplacer v_1 par l'accroissement v de la température du point M, dont elle ne diffère que d'une quantité extrêmement petite; on aura donc

$$\omega P = -\Sigma(\Phi+\Phi')\left\{\frac{1}{\rho}F(\rho,u_0) + \frac{1}{\rho}(\Phi\Phi'+\Psi\Psi'+\theta\theta')\frac{d.\frac{1}{\rho}F(\rho,u_0)}{d\rho} + \frac{v}{\rho}\frac{dF(\rho,u_0)}{du}\right\}.$$

Cette somme s'appliquant à toutes les molécules du cylindre et à celles du corps de l'autre côté de la base.

Multipliant par $\frac{\omega c_1}{\epsilon^3}$, qui est le nombre de molécules renfermées dans la partie du cylindre comprise depuis la base jusqu'à une hauteur égale à c_1, on aura toutes les actions dues aux molécules, situées deux à deux aux extrémités de droites égales et parallèles; il suffira donc de sommer ce que l'on obtiendra ainsi, en donnant à cette droite toutes les directions et toutes les grandeurs possibles; ce qui se fera en donnant à a, b, c, toutes les valeurs relatives aux points du corps situés du même côté de la base, opposé au cylindre.

On aura, en multipliant le second membre par $\frac{\omega c_1}{\epsilon^3}$,

$$P = -\frac{1}{\varepsilon^5}\Sigma\left\{\frac{(\varphi+\varphi')c_1}{\rho}F(\rho,u_0)+\frac{(\varphi+\varphi')c_1}{\rho}(\Phi\Phi'+\downarrow\downarrow'+\theta\theta')\right.$$
$$\left.\frac{d.\frac{1}{\rho}F(\rho,u_0)}{d\rho}+\frac{(\varphi+\varphi')c_1v}{\rho}\cdot\frac{dF(\rho,u_0)}{du}\right\},$$

la somme ne se rapportant plus qu'aux points situés du côté des c_1 positifs.

Les deux premières parties de cette somme ne diffèrent pas de celles qui se trouvent dans le mémoire de M. Poisson, de sorte qu'il est tout à fait inutile de reprendre les détails un peu longs de leur sommation; je me contente d'en rapporter le résultat.

M. Poisson, en négligeant les termes du second ordre par rapport à Φ', $\downarrow'$, θ', et observant que dans l'état primitif on a la condition

$$\Sigma\rho F(\rho,u_0) = 0,$$

a trouvé que la somme relative aux deux premières parties avait pour expression

$$K\left\{\left(3\frac{dx}{da}+\frac{dy}{db}+\frac{dz}{dc}\right)\cos\alpha+\left(\frac{dx}{db}+\frac{dy}{dc}\right)\cos\beta\right.$$
$$\left.+\left(\frac{dx}{dc}+\frac{dz}{da}\right)\cos\gamma\right\},$$

dans laquelle on suppose

$$K=\frac{1}{30\varepsilon^5}\Sigma\rho^3\frac{d.\frac{1}{\rho}F(\rho,u_0)}{d\rho},$$

cette dernière somme s'étendant à tous les points du corps situés dans la sphère d'activité du point M.

Il ne nous reste donc plus qu'à y ajouter

$$-\frac{v}{\varepsilon^5}\Sigma\frac{(\varphi+\varphi')c_1}{\rho}\cdot\frac{dF(\rho,u_0)}{du},$$

cette somme s'étendant seulement à tous les points situés d'un même côté de la base.

On peut négliger φ' par rapport à φ; et si l'on observe que les termes de cette somme, qui contiennent des puissances impaires de a_1 ou b_1, se détruisent deux à deux, l'expression précédente se réduit à

$$-\frac{v\cos\alpha}{\varepsilon^5}\Sigma\frac{c_1^2}{\rho}\cdot\frac{dF(\rho,u_0)}{du}.$$

Mais, d'après l'homogénéité du corps dans l'état primitif, cette somme serait la même si l'on y changeait c_1 en a_1 ou b_1; et comme

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=\rho^2,$$

on a

$$\Sigma\frac{a_1^2}{\rho}\frac{dF(\rho,u_0)}{du}=\Sigma\frac{b_1^2}{\rho}\frac{dF(\rho,u_0)}{du}=\Sigma\frac{c_1^2}{\rho}\frac{dF(\rho,u_0)}{du}$$
$$=\frac{1}{3}\Sigma\rho\frac{dF(\rho,u_0)}{du},$$

ou encore

$$\frac{1}{6}\Sigma\rho\frac{dF(\rho,u_0)}{du},$$

cette dernière somme étant étendue à tous les points du corps situés dans la sphère d'activité de M.

Notre expression deviendra ainsi

$$\frac{v\cos\alpha}{6\varepsilon^5}\Sigma\rho\frac{dF(\rho,u_0)}{du}.$$

Si nous posons

$$\frac{1}{6\varepsilon^5}\Sigma\rho\frac{dF(\rho,u_0)}{du}=A,$$

et que nous représentions par p la pression exercée sur une surface qui était égale à l'unité avant le dérangement, et par λ, μ, ν, les angles que sa direction forme avec les axes, nous aurons

$$p\cos\lambda =$$

$$\mathrm{K}\left\{\left(3\frac{dx}{da}+\frac{dy}{db}+\frac{dz}{dc}\right)\cos\alpha+\left(\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\right)\cos\beta+\left(\frac{dx}{dc}+\frac{dz}{da}\right)\cos\gamma\right\}$$
$$+\ \mathrm{A}v\cos\alpha,$$

$$p\cos\mu =$$

$$\mathrm{K}\left\{\left(\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\right)\cos\alpha+\left(\frac{dx}{da}+3\frac{dy}{db}+\frac{dz}{dc}\right)\cos\beta+\left(\frac{dy}{dc}+\frac{dz}{db}\right)\cos\gamma\right\}$$
$$+\ \mathrm{A}v\cos\beta,$$

$$p\cos\nu =$$

$$\mathrm{K}\left\{\left(\frac{dz}{da}+\frac{dx}{dc}\right)\cos\alpha+\left(\frac{dz}{db}+\frac{dy}{dc}\right)\cos\beta+\left(\frac{dx}{da}+\frac{dy}{db}+3\frac{dz}{dc}\right)\cos\gamma\right\}$$
$$+\ \mathrm{A}v\cos\gamma.$$

Cela posé, on considérera avant le dérangement un point quelconque M de l'intérieur du corps, ayant pour coordonnées a, b, c, et par ce point on mènera des parallèles aux directions positives des axes, sur lesquelles on prendra des longueurs très-petites l, l', l'', qui formeront les arêtes d'un parallélipipède rectangle. Après le dérangement les faces opposées seront sensiblement parallèles, et les équations d'équilibre de ce parallélipipède seront faciles à obtenir d'après les formules précédentes. En effet les sommes des composantes parallèles à chaque axe devront être nulles, en y comprenant les forces extérieures, que nous supposerons indépendantes des déplacements x, y, z, et dont nous représenterons par X, Y, Z, les composantes rapportées à l'unité de masse de la substance.

Les trois équations que l'on obtiendra ainsi seront les seules nécessaires; car, comme l'a observé M. Poisson, les équations relatives aux moments sont satisfaites identiquement.

Occupons-nous d'abord des composantes parallèles à l'axe des a, pour avoir la pression sur la face qui, dans l'état primitif, était perpendiculaire à cet axe, et passait par le point M.

Il faut dans les formules précédentes supposer

$$\cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = 0,$$

puis multiplier par l'aire $l'l''$, ce qui donne pour la composante parallèle à l'axe des a,

$$\left\{K\left(3\frac{dx}{da}+\frac{dy}{db}+\frac{dz}{dc}\right)+Av\right\}l'l''.$$

La pression sur la face opposée s'obtiendra en faisant

$$\cos\alpha = -1,$$

et changeant a en $a+l$, ce qui donnera, pour la somme de ces composantes,

$$-\left\{K\left(3\frac{d^2x}{da^2}+\frac{d^2y}{dadb}+\frac{d^2z}{dadc}\right)+A\frac{dv}{da}\right\}ll'l''.$$

La pression exercée sur la face passant primitivement par le point M, et perpendiculaire à l'axe des b, s'obtiendra en supposant

$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\gamma = 0, \quad \cos\beta = 1.$$

La composante parallèle à l'axe des a sera

$$K\left(\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\right).$$

Si on la multiplie par l'aire $l'l''$, et qu'on l'ajoute à la pression sur la face opposée, pour laquelle il faut faire

$$\cos\beta = -1,$$

et changer b en $b + l'$, on trouvera pour somme

$$-\mathrm{K}\left(\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2y}{dadb}\right)ll'l''.$$

On trouvera de même pour somme des composantes parallèles au même axe, provenant des pressions exercées sur les faces primitivement perpendiculaires à l'axe des c,

$$-\mathrm{K}\left(\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{d^2z}{dadc}\right)l'll''.$$

La composante totale parallèle à l'axe des a sera donc

$$-\left\{\mathrm{K}\left(3\frac{d^2x}{da^2}+\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2x}{dc^2}+2\frac{d^2y}{dadb}+2\frac{d^2z}{dadc}\right)+\mathrm{A}\frac{dv}{da}\right\}ll'l''.$$

En y ajoutant la composante $\mathrm{X}\Delta ll'l''$, Δ étant la densité primitive et égalant la somme à zéro, on aura l'une des trois équations d'équilibre du parallélipipède. Les deux autres s'en déduiront par de simples changements de lettres, et l'on obtiendra ainsi les trois équations suivantes, qui devront avoir lieu pour tous les points intérieurs,

$$(1)\quad\begin{cases}\mathrm{X}\Delta=\mathrm{K}\left\{3\dfrac{d^2x}{da^2}+\dfrac{d^2x}{db^2}+\dfrac{d^2x}{dc}+2\dfrac{d^2y}{dadb}+2\dfrac{d^2z}{dadc}\right\}+\mathrm{A}\dfrac{dv}{da},\\ \mathrm{Y}\Delta=\mathrm{K}\left\{\dfrac{d^2y}{da^2}+3\dfrac{d^2y}{db^2}+\dfrac{d^2y}{dc^2}+2\dfrac{d^2x}{dadb}+2\dfrac{d^2z}{dbdc}\right\}+\mathrm{A}\dfrac{dv}{db},\\ \mathrm{Z}\Delta=\mathrm{K}\left\{\dfrac{d^2z}{da^2}+\dfrac{d^2z}{db^2}+3\dfrac{d^2z}{dc^2}+2\dfrac{d^2x}{dadc}+2\dfrac{d^2y}{dbdc}\right\}+\mathrm{A}\dfrac{dv}{dc}.\end{cases}$$

En changeant dans ces équations X, Y, Z, respectivement en

$$X - \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z - \frac{d^2z}{dt^2},$$

on aura les équations du mouvement du système, qui sont

$$(2)\quad \begin{cases} \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\Delta = \\ K\left\{3\frac{d^2x}{da^2} + \frac{d^2x}{db^2} + \frac{d^2x}{dc^2} + 2\frac{d^2y}{dadb} + 2\frac{d^2z}{dadc}\right\} + A\frac{dv}{da}, \\ \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\Delta = \\ K\left\{\frac{d^2y}{da^2} + 3\frac{d^2y}{db^2} + \frac{d^2y}{dc^2} + 2\frac{d^2x}{dadb} + 2\frac{d^2z}{dbdc}\right\} + A\frac{dv}{db}, \\ \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\Delta = \\ K\left\{\frac{d^2z}{da^2} + \frac{d^2z}{db^2} + 3\frac{d^2z}{dc^2} + 2\frac{d^2x}{dadc} + 2\frac{d^2y}{dbdc}\right\} + A\frac{dv}{dc}. \end{cases}$$

Dans l'un et l'autre cas il y aura, pour les points de la surface, trois équations particulières, qui exprimeront que les composantes de la pression sur un élément quelconque de cette surface, résultant des actions moléculaires, sont précisément les mêmes que les composantes de la pression extérieure donnée.

Soient $l, m, n,$ les angles formés avec les axes par la direction extérieure de la normale, et X', Y', Z', les composantes de la pression extérieure, rapportées à l'unité de surface, les conditions cherchées seront exprimées par les équations suivantes :

$$
(3)\quad \begin{cases}
X' + \\
K\left\{\left(3\frac{dx}{da}+\frac{dy}{db}+\frac{dz}{dc}\right)\cos l+\left(\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\right)\cos m+\left(\frac{dx}{dc}+\frac{dz}{da}\right)\cos n\right\} \\
\qquad + A\nu\cos l = 0, \\
Y' + \\
K\left\{\left(\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\right)\cos l+\left(\frac{dx}{da}+3\frac{dy}{db}+\frac{dz}{dc}\right)\cos m+\left(\frac{dy}{dc}+\frac{dz}{db}\right)\cos n\right\} \\
\qquad + A\nu\cos m = 0, \\
Z' + \\
K\left\{\left(\frac{dz}{da}+\frac{dx}{dc}\right)\cos l+\left(\frac{dz}{db}+\frac{dy}{dc}\right)\cos m+\left(\frac{dx}{da}+\frac{dy}{db}+3\frac{dz}{dc}\right)\cos n\right\} \\
\qquad + A\nu\cos n = 0.
\end{cases}
$$

Ces dernières équations doivent avoir lieu soit dans l'équilibre, soit dans le mouvement, mais seulement pour les points de la surface.

On doit de plus supposer que certains points du corps sont assujettis à des conditions qui empêchent tout mouvement commun du système considéré comme rigide.

A ces équations devront être jointes celles de la propagation de la chaleur. Elles ne subiraient que des modifications insensibles par le changement très-petit des distances des molécules voisines.

Nous les conserverons donc telles qu'on les a employées jusqu'ici. Elles feront connaître à chaque instant la valeur de ν en fonction de a, b, c, t; cette valeur devra être substituée dans les équations que nous venons d'établir, qui ne renfermeront plus alors que les inconnues x, y, z.

J'ajouterai enfin que ces équations ne supposent pas que les déplacements x, y, z, soient très-petits relativement aux distances des molécules entre elles. Les calculs qui y conduisent sont fondés seulement sur l'hypothèse que les angles formés avec les axes par

les droites qui joignent des molécules voisines, ne varient que de quantités très-petites dans le changement de forme; hypothèse qui ne s'oppose nullement, en exceptant certains points du système, à ce que les valeurs de x, y, z, ne soient très-grandes relativement à l'intervalle moyen des molécules. S'il en avait été autrement, nos formules ne seraient applicables à aucun phénomène appréciable à nos sens.

LES QUESTIONS RELATIVES À CETTE THÉORIE N'ADMETTENT QU'UNE SEULE SOLUTION.

Cette proposition est fondamentale; car s'il y avait plusieurs positions d'équilibre sous l'influence des mêmes forces, il ne suffirait plus de trouver des valeurs qui vérifiassent les équations générales : il faudrait suivre le mouvement des points depuis leur position primitive jusqu'au moment où les forces et les températures se seraient fixées dans l'état où on les donne; ce qui serait la plupart du temps impraticable.

M. Fourier avait bien senti cette nécessité dans la théorie de la chaleur; et il avait démontré avec beaucoup de soin que, quel que fût le procédé particulier qui eût conduit à une expression qui remplît toutes les conditions de la question, elle renfermait la solution unique et complète, parce que ces mêmes conditions ne pouvaient être satisfaites par deux fonctions différentes.

Je considérerai d'abord le cas du mouvement comme étant le plus simple. Il est clair en effet que les points partant de positions données, avec des vitesses données, chaque état successif est déterminé d'une manière nécessaire par l'état immédiatement voisin et la valeur des forces tant intérieures qu'extérieures. Toutes les solutions qui satisfont aux équations générales et à l'état initial sont donc identiques.

Mais la proposition est loin d'être aussi évidente dans le cas de l'équilibre, parce que l'on n'a point à considérer une succession d'états, mais un état définitif, auquel on a pu arriver par des

positions intermédiaires très-différentes. Pour l'établir d'une manière rigoureuse, nous considérerons un système de points matériels en nombre quelconque, situés à des distances aussi petites qu'on le voudra les uns des autres. Désignons par $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$ les déplacements de chacun d'eux dans le sens des axes. Si l'on calcule les composantes des forces qui se seront ajoutées à celles qui existaient dans le premier état d'équilibre, qu'on les égale à zéro pour chaque point, on aura les équations nécessaires et suffisantes au nouvel équilibre.

Le calcul en est fort simple; j'ai eu occasion de l'indiquer dans un autre mémoire; je ne le reproduirai pas ici : il conduit à des équations de la forme

$$0 = M + Ax + By + Cz + A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + \text{etc.}$$

Le terme M dépend des forces extérieures qui ont été introduites, ainsi que de celles qui proviennent de l'élévation de la température, et qui, comme on l'a reconnu précédemment, ne fournissent que des termes indépendants des déplacements.

Ces équations sont en même nombre que les coordonnées des points, et par conséquent que leurs accroissements $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$ qui sont les inconnues de la question; et comme elles sont du premier degré, elles n'admettent qu'une seule solution, excepté dans le cas particulier, que nous n'avons pas à considérer, où elles seraient indéterminées.

Les déplacements $x, y, z, \ldots$ n'étant susceptibles que d'une seule valeur, il suffira de connaître une solution particulière des équations d'équilibre, pour être assuré que c'est la solution cherchée, puisqu'il n'y en a qu'une possible.

Ces conséquences, étant indépendantes du nombre et de la distance des points, s'appliquent au cas que nous avions en vue, dans lequel ces distances sont assez petites pour que l'on ait pu supposer $x, y, z, \ldots$ fonctions continues des coordonnées primitives, hypothèse qui conduit à des équations aux différences partielles.

SUPERPOSITION DES EFFETS.

Il est utile de remarquer que les effets dus à l'action des forces extérieures et à la variation de la température coexistent indépendamment l'un de l'autre, et se superposent pour former l'effet total; c'est-à-dire que les déplacements de chaque point, soit dans l'équilibre, soit dans le mouvement, sont les sommes de ce qu'ils seraient séparément au même instant, si chacune des deux causes de dérangement avait existé seule. Cette remarque est utile, en ce qu'elle peut quelquefois simplifier le calcul en le divisant, mais principalement parce qu'elle fait connaître la part qui se rapporte à chacune des deux causes dans l'effet total.

Considérons d'abord le cas du mouvement qui est représenté par les équations (2) et (3).

Soient x_1, y_1, z_1, une solution de ces équations, dans lesquelles on suppose $v = 0$, et x', y', z', une solution des mêmes équations, dans lesquelles on suppose nulles les forces X, Y, Z, X′, Y′, Z′.

Si on substitue x_1, y_1, z_1, dans les équations (2) et (3), après avoir supprimé les termes qui renferment v; qu'ensuite on substitue x, y', z', dans les mêmes équations, en supprimant les termes qui renferment les forces X, X′,... et laissant les termes en v, on aura les équations qui résultent de la supposition. Or, si l'on ajoute deux à deux les équations correspondantes dans ces deux systèmes, on aura le même résultat qu'en substituant $x_1 + x', y_1 + y', z_1 + z'$, à x, y, z, dans les équations complètes (2) et (3).

Donc, d'abord la somme de deux solutions de chacun des systèmes isolés forme une solution des équations relatives au système composé.

Les déplacements initiaux et les composantes des vitesses initiales qui correspondent à $x_1 + x', y_1 + y', z_1 + z'$, étant évidemment la somme de ceux qui correspondraient séparément à x, y, z, et x', y', z', on voit que pour avoir la solution complète de la question proposée, il suffit de connaître deux solutions relatives, l'une à

l'élévation de la température, l'autre aux forces extérieures données; la somme de ces deux solutions formera celle de la question proposée, pourvu que la superposition des états initiaux relatifs à chacune d'elles recompose, tant pour les déplacements que pour les vitesses, l'état initial proposé.

Les mêmes raisonnements s'appliquent au cas de l'équilibre, puisqu'il suffit de supprimer les termes

$$\frac{dx^2}{dt^2}, \quad \frac{dy^2}{dt^2}, \quad \frac{dz^2}{dt^2}.$$

En ajoutant les déplacements qui se rapportent respectivement aux deux positions d'équilibre que détermineraient les deux causes séparées, on obtient des déplacements qui satisfont aux équations d'équilibre du système proposé; et comme il ne peut y avoir qu'une seule position d'équilibre, elle est donnée par cette superposition.

On tire de là cette conséquence importante, que les dérangements des points, à partir d'une position d'équilibre qui n'est pas celle de l'état naturel, sont les mêmes que si les forces et les températures additionnelles étaient introduites dans l'état naturel lui-même.

On peut encore partir de l'état d'équilibre donné, comme s'il était l'état naturel, en n'ayant égard qu'aux nouvelles circonstances introduites. Les constantes qui entrent dans les équations précédentes ne devraient être augmentées que de quantités du même ordre que celles que l'on néglige, et par conséquent on devra faire usage des équations générales sans aucune altération.

DILATATION D'UN CORPS DE FIGURE QUELCONQUE DONT LA TEMPÉRATURE A ÉTÉ ÉLEVÉE ÉGALEMENT EN CHAQUE POINT, ET DONT LA SURFACE EST SOUMISE À UNE TENSION NORMALE UNIFORME.

Soit T la tension exercée sur l'unité de surface, et dans le sens extérieur de la normale, v la quantité constante dont la température a été élevée; les équations indéfinies se réduiront à

$$3\frac{d^2x}{da^2}+\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2x}{dc^2}+2\frac{d^2y}{dadb}+2\frac{d^2z}{dadc}=0,$$

$$\frac{d^2y}{da^2}+3\frac{d^2y}{db^2}+\frac{d^2y}{dc^2}+2\frac{d^2x}{dadb}+2\frac{d^2z}{dbdc}=0,$$

$$\frac{d^2z}{da^2}+\frac{d^2z}{db^2}+3\frac{d^2z}{dc^2}+3\frac{d^2x}{dadc}+2\frac{d^2y}{dbdc}=0.$$

On aura une solution particulière de ces équations en posant

$$x=\alpha a, \qquad y=\beta b, \qquad z=\gamma c,$$

ce qui assujettit les points situés primitivement sur les axes à y rester après le déplacement, et par conséquent empêche tout mouvement commun. Cherchons maintenant à déterminer les constantes α, β, γ, d'après les équations relatives à la surface, qui deviennent

$$T+K(3\alpha+\beta+\gamma)+Av=0, \quad T+K(\alpha+3\beta+\gamma)+Av=0,$$
$$T+K(\alpha+\beta+3\gamma)+Av=0.$$

D'où l'on tire

$$\alpha=\beta=\gamma=-\frac{T+Av}{5K}.$$

Le signe de T serait changé, si la tension se changeait en pression. On aura ainsi

$$x=-\frac{T+Av}{5K}a, \quad y=-\frac{T+Av}{5K}b, \quad z=-\frac{T+Av}{5K}c.$$

L'accroissement de l'unité de longueur est donc

$$-\frac{T+Av}{5K},$$

dans le sens des trois axes, et par conséquent dans tout autre

sens. De plus, le principe ci-dessus démontré de la superposition des effets prouve que ces accroissements sont les mêmes, quel que soit l'état primitif d'équilibre. D'où résulte cette conséquence :

« Quelle que soit la figure d'un corps homogène, en équilibre « sous l'action de forces quelconques, si on élève uniformément la « température de tous ses points, et qu'on y ajoute une tension ou « pression normale constante en tous les points de sa surface, la « dilatation linéaire sera la même dans tous les sens; elle ne dépendra « que de la tension ajoutée et de l'excès de température, mais nulle- « ment de la figure du corps. »

Ce résultat était connu depuis longtemps des physiciens, qui déterminaient la dilatation des corps creux par les mêmes formules que celle des corps pleins. Il se présente maintenant comme conséquence naturelle de notre théorie.

DÉTERMINATION DES CONSTANTES.

Les calculs précédents peuvent conduire à la détermination des constantes au moyen d'expériences fort simples.

En effet, si l'on désigne par δ la dilatation de l'unité de longueur correspondante à un accroissement de température égale à 1, sans l'addition d'aucune force, on aura

$$\delta = -\frac{A}{5K}.$$

Pour déterminer la constante k on supposera la surface du corps soumise à une tension normale égale à 1, et l'on aura, en désignant par δ' la dilatation linéaire résultante,

$$\delta' = -\frac{1}{5K},$$

d'où

$$K = -\frac{1}{5\delta'}, \qquad A = \frac{\delta}{\delta'}.$$

Les expériences qui font connaître la dilatation δ produite par la chaleur sont susceptibles d'un très-grand degré de précision, et sont trop connues pour que je les mentionne ici. Quant à celles qui peuvent faire connaître δ', elles ne se présentent pas aussi naturellement. Il serait en effet très-difficile de mesurer exactement le changement de volume qu'éprouve un corps dont la surface est soumise à une pression ou une tension donnée, et il faut avoir recours à un moyen détourné.

M. Navier, pour donner une signification mécanique à la constante qui entrait dans ses équations, considérait l'allongement que subirait un solide indéfini compris entre deux bases parallèles, dont les points resteraient, pour chacune d'elles, dans les mêmes positions relatives, et seraient soumis à une traction égale ; mais il n'avait pas indiqué d'expérience facilement réalisable.

En partant des mêmes équations, M. Poisson a prouvé, par un calcul très-simple, que, si l'on considère un cylindre à base quelconque, dont les bases soient soumises à une augmentation donnée de tension, tandis que la surface reste soumise à la pression primitive, la dilatation dans le sens de la longueur est double de ce qu'elle serait si la même tension était appliquée à la surface entière. Cette expérience est très-facile à faire pour les substances élastiques; rapportant la dilatation observée à l'unité de longueur et de tension, puis en prenant la moitié, on aura δ.

Si l'on introduit les dilatations connues dans les équations générales, elles prennent la forme suivante

$$(4)\quad \begin{cases} 5\partial'\Delta\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)=3\frac{d^2x}{da^2}+\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2x}{dc^2}+2\frac{d^2y}{dadb} \\ \qquad\qquad +2\frac{d^2z}{dadc}-5\partial\frac{dv}{da}, \\ 5\partial'\Delta\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)=\frac{d^2y}{da^2}+3\frac{d^2y}{db^2}+\frac{d^2y}{dc^2}+2\frac{d^2x}{dadb} \\ \qquad\qquad +2\frac{d^2z}{dbdc}-5\partial\frac{dv}{db}, \\ 5\partial'\Delta\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)=\frac{d^2z}{da^2}+\frac{d^2z}{db^2}+3\frac{d^2z}{dc^2}+2\frac{d^2x}{dadc} \\ \qquad\qquad +2\frac{d^2y}{dbdc}-5\partial\frac{dv}{dc}. \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} 5\partial'X'=\left(3\frac{dx}{da}+\frac{dy}{db}+\frac{dz}{dc}\right)\cos l+\left(\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\right)\cos m \\ \qquad\qquad +\left(\frac{dx}{dc}+\frac{dz}{da}\right)\cos n-5\partial v\cos l, \\ 5\partial'Y'=\left(\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\right)\cos l+\left(\frac{dx}{da}+3\frac{dy}{db}+\frac{dz}{dc}\right)\cos m \\ \qquad\qquad +\left(\frac{dy}{dc}+\frac{dz}{db}\right)\cos n-5\partial v\cos m, \\ 5\partial'Z'=\left(\frac{dx}{dc}+\frac{dz}{da}\right)\cos l+\left(\frac{dz}{db}+\frac{dy}{dc}\right)\cos m+ \\ \qquad\qquad \left(\frac{dx}{da}+\frac{dy}{db}+3\frac{dz}{dc}\right)\cos n-5\partial v\cos n. \end{cases}$$

Les trois premières ont lieu pour tous les points de l'intérieur, et les trois dernières pour les seuls points de la surface.

COMMENT ON PEUT REVENIR D'UN ÉTAT QUELCONQUE D'ÉQUILIBRE À L'ÉTAT NATUREL.

Soient X, Y, Z, les composantes des forces qui sollicitent les points de l'intérieur; X′, Y′, Z′, les composantes de la pression exercée à la surface d'un corps élastique en équilibre; et v l'excès

de température au-dessus de l'état naturel. Nous avons vu que si l'on introduisait de nouvelles forces dans le système, les dérangements de chaque point seraient les mêmes que si ces forces étaient introduites dans l'état naturel, et les mêmes encore que si l'on considérait l'état donné comme étant l'état naturel. Or, pour le cas particulier où le système proposé doit revenir à l'état naturel, il suffit d'introduire, pour les points de l'intérieur, des forces dont les composantes soient $-X - Y - Z$, et à surface des pressions dont les composantes soient $-X' - Y' - Z'$, et d'ajouter $-v$ à toutes les températures. Ce calcul se fera comme si l'état donné était l'état naturel; quand on connaîtra les déplacements x, y, z, d'un point quelconque, on les ajoutera aux coordonnées de ce point dans l'état donné; et l'on aura ainsi les coordonnées du même point dans l'état naturel.

Nous en ferons l'application au cas d'un corps de figure quelconque, dont la surface est soumise à une tension normale constante T, et dont la température a été élevée au-dessus de celle de l'état naturel d'une quantité constante v. Désignant par a, b, c, les coordonnées des points dans l'état donné, et par x, y, z, leurs accroissements, on satisfera aux équations indéfinies en posant

$$x = \alpha a, \quad y = \beta b, \quad z = \gamma c, \quad .$$

α, β, γ, étant des constantes indéterminées.

Les températures de tous les points devant être augmentées de $-v$, et la pression introduite à la surface devant être égale et opposée à la tension T, qui est dirigée dans le sens extérieur de la normale, les équations relatives à la surface deviendront

$$3\alpha + \beta + \gamma + 5\delta'T + 5\delta v = 0,$$
$$\alpha + 3\beta + \gamma + 5\delta'T + 5\delta v = 0,$$
$$\alpha + \beta + 3\gamma + 5\delta'T + 5\delta v = 0,$$

d'où

$$\alpha = \beta = \gamma = -\delta'\mathrm{T} - \delta v.$$

Par suite

$$x = -(\delta'\mathrm{T}+\delta v)a, \quad y = -(\delta'\mathrm{T}+\delta v)b, \quad z = -(\delta'\mathrm{T}+\delta v)c.$$

Si donc on désigne par a, b, c, les coordonnées des points dans l'état naturel, on aura

$$a' = a(1-\delta'\mathrm{T}-\delta v), \quad b' = b(1-\delta'\mathrm{T}-\delta v), \quad c' = c(1-\delta'\mathrm{T}-\delta v);$$

ce qui fera connaître l'état naturel d'après l'état donné.

On aurait pu procéder d'une manière inverse, et partir de l'état naturel inconnu pour arriver à l'état donné. Les quantités a', b', c', seraient considérées comme données, et a, b, c, comme inconnues : la température ajoutée serait v, et la tension T serait dirigée dans le sens extérieur de la normale.

On trouverait ainsi

$$a = a'(1+\delta'\mathrm{T}+\delta v), \quad b = b'(1+\delta'\mathrm{T}+\delta v), \quad c = c'(1+\delta'\mathrm{T}+\delta v).$$

De là on tirerait a', b', c', en fonction de a, b, c, et l'état naturel se trouverait déterminé.

Ces valeurs différeraient des précédentes par des termes du second ordre relativement aux dilatations δ, δ', et qu'on peut négliger devant ceux du premier ordre, vu la petitesse de ces dilatations. On se tromperait même beaucoup si l'on croyait avoir une plus grande approximation en les conservant. En effet, toute cette théorie est fondée sur l'hypothèse que la distance de deux molécules voisines varie très-peu par rapport à elle-même, et par suite que l'accroissement de l'unité de longueur n'est qu'une fraction très-petite. Il serait donc bien inutile de tenir compte de certains

termes dans un calcul fondé sur des équations dans lesquelles on a négligé des termes du même ordre; et non-seulement leur influence doit être regardée comme insensible, mais on ne peut même assigner dans quel sens elle s'exerce.

On commettrait une erreur du même genre si l'on croyait devoir introduire dans les équations générales des termes qui seraient à ceux qui s'y trouvent déjà, dans le rapport de $\mathfrak{K}$ ou $\mathfrak{K}'$ à l'unité.

DIRECTION ET GRANDEUR DE LA RÉSULTANTE DES FORCES PRODUITES PAR L'ÉLÉVATION DE LA TEMPÉRATURE.

Les équations (4) ne seraient pas changées si la température du corps était restée la même que pendant l'état primitif, et que les composantes X, Y, Z, fussent changées en

$$X - \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}'\Delta}\frac{dv}{da}, \quad Y - \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}'\Delta}\frac{dv}{db}, \quad Z - \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}'\Delta}\frac{dv}{dc}.$$

L'effet de l'élévation de la température sur les points de l'intérieur est donc le même que celui d'une force dont les composantes, rapportées à l'unité de masse, auraient pour expression en chaque point

$$-\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}'\Delta}\frac{dv}{da}, \quad -\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}'\Delta}\frac{dv}{db}, \quad -\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}'\Delta}\frac{dv}{dc}.$$

Les cosinus des angles formés par sa direction avec les axes sont donc

$$\frac{-\frac{dv}{da}}{\sqrt{\left(\frac{dv}{da}\right)^2+\left(\frac{dv}{db}\right)^2+\left(\frac{dv}{dc}\right)^2}},\quad \frac{-\frac{dv}{db}}{\sqrt{\left(\frac{dv}{da}\right)^2+\left(\frac{dv}{db}\right)^2+\left(\frac{dv}{dc}\right)^2}},$$

$$\frac{-\frac{dv}{dc}}{\sqrt{\left(\frac{dv}{da}\right)^2+\left(\frac{dv}{db}\right)^2+\left(\frac{dv}{dc}\right)^2}}.$$

Cette direction est précisément celle du flux maximum de chaleur au point dont les coordonnées sont a, b, c.

La grandeur de la résultante est

$$\frac{\delta}{\delta'\Delta}\sqrt{\left(\frac{dv}{da}\right)^2+\left(\frac{dv}{db}\right)^2+\left(\frac{dv}{dc}\right)^2}.$$

La valeur du flux maximum rapporté à l'unité de surface est

$$k\sqrt{\left(\frac{dv}{da}\right)^2+\left(\frac{dv}{db}\right)^2+\left(\frac{dv}{dc}\right)^2},$$

k désignant la conductibilité intérieure.

Donc la résultante est au flux maximum dans le rapport constant de δ à $k\delta'\Delta$.

Ainsi la résultante des forces produites à l'intérieur par l'élévation de la température est dirigée en chaque point dans le sens du flux maximum, par conséquent normale aux surfaces isothermes, et est à ce flux dans un rapport qui ne dépend que de la nature de la substance.

Passons aux équations à la surface.

Les termes provenant de la température sont les mêmes que ceux qui résulteraient d'une pression dirigée dans le sens extérieur

de la normale si v est positif, et en sens contraire si v est négatif; et qui, rapportée à l'unité de surface, aurait pour composantes

$$\frac{\mathcal{S}}{\mathcal{S}'} v \cos l, \quad \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{S}'} v \cos m, \quad \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{S}'} v \cos n.$$

Or, si l'on suppose que le corps soit entouré d'un milieu dont la température soit la même que celle de l'état primitif du corps, et que l'on désigne par h la conductibilité extérieure, le flux à la surface aura pour expression hv, et il sera dans le sens extérieur de la normale, si v est positif, et en sens contraire si v est négatif. Donc la pression que produit à la surface l'élévation de la température lui est normale, dans le sens même du flux en chaque point, et proportionnelle à ce flux, dans le rapport de $\mathcal{S}$ à $\mathcal{S}'h$.

ÉQUILIBRE D'UNE SPHÈRE CREUSE DONT LA TEMPÉRATURE EST EXPRIMÉE PAR UNE FONCTION QUELCONQUE DE LA DISTANCE AU CENTRE.

Considérons une sphère creuse dont le rayon de la surface intérieure soit R, et celui de la surface extérieure R′ dans l'état naturel.

Supposons que l'accroissement v de la température soit une fonction quelconque du rayon ρ des couches concentriques, et désignons par p, p', les pressions normales exercées respectivement sur les deux surfaces, et dirigées vers l'intérieur de la partie solide.

Il est évident que le déplacement de chaque point ne peut se faire que dans la direction de la droite qui le joint au centre; les inconnues x, y, z, sont donc proportionnelles à a, b, c, et l'on peut poser

$$x = a\Phi, \quad y = b\Phi, \quad z = c\Phi, \quad \theta = \rho\Phi;$$

θ désignant l'accroissement qu'a reçu le rayon ρ en passant du premier état au second, et Φ étant une fonction inconnue de ρ, dont il suffit de trouver la valeur pour que la question soit complétement résolue.

Les équations que nous venons de poser donnent

$$\frac{dx}{da} = \Phi + \frac{a^2}{\rho}\frac{d\varphi}{d\rho}, \quad \frac{dx}{db} = \frac{ab}{\rho}\frac{d\varphi}{d\rho}, \quad \frac{dx}{dc} = \frac{ac}{\rho}\frac{d\varphi}{d\rho},$$

$$\frac{dy}{da} = \frac{ab}{\rho}\frac{d\varphi}{d\rho}, \quad \frac{dy}{db} = \Phi + \frac{b^2}{\rho}\frac{d\varphi}{d\rho}, \quad \frac{dy}{dc} = \frac{bc}{\rho}\frac{d\varphi}{d\rho},$$

$$\frac{dz}{da} = \frac{ac}{\rho}\frac{d\varphi}{d\rho}, \quad \frac{dz}{db} = \frac{bc}{\rho}\frac{d\varphi}{d\rho}, \quad \frac{dz}{dc} = \Phi + \frac{c^2}{\rho}\frac{d\varphi}{d\rho},$$

$$\frac{d^2x}{da^2} = \left(\frac{3a}{\rho} - \frac{a^3}{\rho^3}\right)\frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{a^3}{\rho^2}\frac{d^2\varphi}{d\rho^2},$$

$$\frac{d^2x}{db^2} = \left(\frac{a}{\rho} - \frac{ab^2}{\rho^3}\right)\frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{ab^2}{\rho^2}\frac{d^2\varphi}{d\rho^2},$$

$$\frac{d^2x}{dc^2} = \left(\frac{a}{\rho} - \frac{ac^2}{\rho^3}\right)\frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{ac^2}{\rho^2}\frac{d^2\varphi}{d\rho^2},$$

$$\frac{d^2x}{dadb} = \left(\frac{b}{\rho} - \frac{ba^2}{\rho^3}\right)\frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{ba^2}{\rho^2}\frac{d^2\varphi}{d\rho^2},$$

$$\frac{d^2x}{dadc} = \left(\frac{c}{\rho} - \frac{ca^2}{\rho^3}\right)\frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{ca^2}{\rho^2}\frac{d^2\varphi}{d\rho^2}.$$

On déduira de ces formules celles qui se rapportent à y et z par de simples changements de lettres; on aura de plus

$$\frac{dv}{da} = \frac{a}{\rho}\frac{dv}{d\rho}, \quad \frac{dv}{db} = \frac{b}{\rho}\frac{dv}{d\rho}, \quad \frac{dv}{dc} = \frac{c}{\rho}\frac{dv}{d\rho}.$$

Ces substitutions étant faites dans les trois équations indéfinies, elles se réduisent à l'équation unique

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{4}{\rho}\frac{d\varphi}{d\rho} - \frac{5\int}{3\rho}\frac{dv}{\rho} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$\Phi = \frac{5\delta\!\!\!^{\backprime}}{3\rho^5}\int_{R'}^{\rho} v\rho^2 d\rho + \frac{C}{\rho^5} + C_1,$$

C et C_1 étant deux constantes arbitraires qui se détermineront par les conditions relatives à la surface.

Les trois équations qui expriment ces conditions se réduisent à une seule par les substitutions précédentes. Cette équation pour la surface extérieure est la suivante, dans laquelle il faut remplacer ρ par R',

$$5\Phi + 3R'\frac{d\Phi}{d\rho} - 5\delta\!\!\!^{\backprime} v + 5\delta\!\!\!^{\backprime}{}' p' = 0.$$

Pour la surface intérieure on devra avoir la condition

$$5\Phi + 3R\frac{d\Phi}{d\rho} - 5\delta\!\!\!^{\backprime} v + 5\delta\!\!\!^{\backprime}{}' p = 0,$$

dans laquelle on fera $\rho = R$.

Ces deux conditions vont déterminer C et C_1.

Elles deviennent par la substitution de la valeur de Φ

$$\frac{4C}{R'^5} - 5C_1 - 5\delta\!\!\!^{\backprime}{}' p' = 0,$$

$$\frac{20\delta\!\!\!^{\backprime}}{3R^5}\int_R^{R'} v\rho^2 d\rho - \frac{4C}{R^5} + 5C_1 + 5\delta\!\!\!^{\backprime}{}' p = 0;$$

d'où l'on tire

$$C = \frac{\frac{5\delta\!\!\!^{\backprime} R'^5}{3}\int_R^{R'} v\rho^2 d\rho + \frac{5}{4}\delta\!\!\!^{\backprime}{}' R^3 R'^3 (p - p')}{R'^5 - R^5},$$

$$C_1 = \frac{\frac{4\delta\!\!\!^{\backprime}}{3}\int_R^{R'} v\rho^2 d\rho + \delta\!\!\!^{\backprime}{}' (pR^3 - p'R'^3)}{R'^5 - R^5};$$

et par suite

$$\Phi = \frac{5\mathcal{J}}{3\rho^5}\int_{R'}^{\rho} v\rho^2 d\rho + \frac{\frac{5\mathcal{J}R'^5}{3}\int_R^{R'} v\rho^2 d\rho + \frac{5}{4}\mathcal{N}R^3R'^3(p-p')}{R'^5 - R^5}\cdot\frac{1}{\rho^5} + \frac{\frac{4\mathcal{J}}{3}\int_R^{R'} v\rho^2 d\rho + \mathcal{N}(pR^3 - p'R'^3)}{R'^5 - R^5}.$$

L'accroissement θ d'un rayon quelconque ρ sera donc

$$\theta = \frac{5\mathcal{J}}{3\rho^5}\int_{R'}^{\rho} v\rho^2 d\rho + \frac{\frac{5\mathcal{J}}{3}R'^3\int_R^{R'} v\rho^2 d\rho + \frac{5}{4}\mathcal{N}R^3R'^3(p-p')}{R'^5 - R^5}\cdot\frac{1}{\rho^3} + \frac{\frac{4\mathcal{J}}{3}\int_R^{R'} v\rho^2 d\rho + \mathcal{N}(pR^3 - p'R'^3)}{R'^5 - R^5}\rho.$$

Si la sphère se refroidit ou s'échauffe, θ variera avec le temps et fera connaître les états successifs d'équilibre.

On vérifie immédiatement que cette valeur de θ est la somme de celles qui se rapporteraient séparément à l'élévation de la température et à l'action des pressions p, p'.

Si l'on supposait $v = 0$, on trouverait

$$\theta = \frac{\frac{5}{4}\mathcal{N}R^3R'^3(p-p')}{R'^5 - R^5}\cdot\frac{1}{\rho^2} + \frac{\mathcal{N}(pR^3 - p'R'^3)}{R'^5 - R^5}\rho.$$

Si l'on fait successivement $\rho = R$ et $\rho = R'$, on aura l'accroissement des rayons extrêmes ; on trouvera ainsi que le rayon intérieur R est devenu

$$R\left\{1 - \mathcal{N}\frac{(p'R'^3 - pR^3) + \frac{5}{4}R'^3(p'-p)}{R'^5 - R^5}\right\},$$

et que le rayon extérieur R′ est devenu

$$R'\left\{1-\mathcal{S}'\frac{p'R'^3-pR^3+\frac{5}{4}R^3(p'-p)}{R'^5-R^5}\right\}.$$

Ces résultats sont conformes à ceux que M. Poisson avait trouvés dans ce cas particulier.

Si l'on veut étudier séparément les effets dus à l'élévation de la température, on négligera les termes de θ qui renferment p et p', et l'on aura

$$\theta=\frac{5\mathcal{S}}{3\rho^3}\int_{R'}^{\rho}v\rho^2d\rho+\frac{\frac{5}{3}\mathcal{S}R'^3\int_R^{R'}v\rho^2d\rho}{R'^5-R^5}\cdot\frac{1}{\rho^2}+\frac{\frac{4}{3}\mathcal{S}\int_R^{R'}v\rho^2d\rho}{R'^5-R^5}\rho.$$

Il est à remarquer, d'après la forme de cette expression, que la dilatation éprouvée par le rayon ρ d'une couche intérieure déterminée ne dépend que de la quantité de chaleur introduite entre cette couche et la couche extérieure, et de la quantité introduite dans l'épaisseur totale de la sphère creuse, mais nullement de la loi suivant laquelle varie la température quand on passe d'une couche à une autre. Ainsi, lorsque ρ prend les valeurs de R ou R′, θ ne dépend que de la quantité totale de chaleur introduite.

D'où se tire cette conséquence remarquable que, « quelle que « soit la loi suivant laquelle la température de chaque couche ait « été élevée, les rayons extrêmes, et par suite l'épaisseur de l'enve- « loppe, se sont dilatés ou contractés de la même manière que si, « dans toute l'épaisseur de l'enveloppe, la température avait été « élevée d'une même quantité égale à la moyenne. »

On peut se proposer de déterminer les rayons autres que les deux extrêmes qui se sont dilatés de la même manière que si la température avait été élevée uniformément d'une quantité égale à la moyenne. Désignons par V cette moyenne, dont la valeur est

$$V = \frac{3\int_R^{R'} v\rho^2 d\rho}{R'^3 - R^3}.$$

La valeur de θ sera la même que si v était égal à V, pour les valeurs de ρ qui satisferont à l'équation

$$\int_{R'}^{\rho} v\rho^2 d\rho - V\left(\frac{\rho^3 - R'^3}{3}\right) = 0.$$

Or, si l'on cherche combien de fois la dérivée du premier membre par rapport à ρ peut devenir nulle entre R et R', ce nombre surpassera au moins d'une unité le nombre des racines réelles cherchées. On est conduit par là à l'équation

$$v\rho^2 - V\rho^2 = 0 \quad \text{ou} \quad v = V.$$

Les sommets de la courbe dont l'ordonnée doit devenir nulle correspondent donc aux valeurs de ρ, pour lesquelles la température est égale à la moyenne; et par conséquent s'il n'y a qu'une seule couche qui soit affectée de cette température, il n'y aura aucune racine autre que R, R', et aucun rayon autre que les extrêmes ne se sera dilaté de la même manière que si la chaleur introduite s'était distribuée uniformément.

Il résulte de ce qui précède que les rayons extrêmes conserveront la même valeur toutes les fois que la quantité de chaleur introduite sera nulle, quelle que soit d'ailleurs la nouvelle distribution de la quantité de chaleur primitive; et cela n'arrivera que dans ce cas, puisque la dilatation de ces rayons est précisément celle qui serait due à l'élévation moyenne.

On en conclut encore que ces rayons extrêmes varient toujours dans le même sens, quel que soit le changement de la température; ils augmentent ensemble ou diminuent ensemble.

Dans le cas que nous venons d'examiner se trouve compris celui d'un thermomètre à boule sphérique, dont la température varie.

La surface intérieure n'est pas à la même température que la surface extérieure, et la capacité de la boule n'est pas ce qu'elle devrait être pour que l'instrument indiquât la température du liquide intérieur. J'ai même fait voir par une expérience directe que l'erreur pouvait quelquefois être considérable.

Le rayon intérieur de la boule est celui qu'il est le plus important de connaître, et nous venons de voir qu'il est facile à déterminer, quand on connaît la température moyenne de l'enveloppe; température que l'on peut calculer par des formules que j'ai eu occasion de donner dans un autre mémoire.

Si l'on supposait que les températures des deux surfaces fussent élevées de quantités fixes u, u', celles de toutes les couches atteindraient bientôt une certaine limite, et l'on aurait alors

$$v = \frac{RR'(u-u')}{R'-R} \cdot \frac{1}{\rho} + \frac{u'R'-uR}{R'-R}.$$

Cette valeur substituée dans nos formules fera connaître l'état de l'équilibre final de la sphère.

Calculons maintenant les pressions exercées dans toutes les directions, à diverses distances du centre.

On peut, sans diminuer la généralité de la question, se borner à considérer les points situés sur l'axe des x, ce qui donne

$$b = 0, \quad c = 0, \quad a = \rho.$$

Comme d'ailleurs tout est semblable autour d'un rayon quelconque, on peut supposer le plan de l'élément perpendiculaire au plan des a, b; ce qui donne $\cos n = 0$. Si donc on désigne par p la pression, et par λ, μ, ν, les angles que sa direction fait avec les axes, on aura

$$5\delta\nu p\cos\lambda = \left(5\Phi + 3\rho\frac{d\Phi}{d\rho} - 5\delta\nu\right)\cos l,$$

$$5\delta\nu p\cos\mu = \left(5\Phi + \rho\frac{d\Phi}{d\rho} - 5\delta\nu\right)\cos m,$$

$$\cos\nu = 0.$$

Si nous écrivons pour abréger

$$p\cos\lambda = A\cos l, \quad p\cos\mu = B\cos m,$$

il en résultera

$$p^2 = A^2\cos^2 l + B^2\cos^2 m = B^2 + (A^2 - B^2)\cos^2 l.$$

La valeur de p variera donc dans le même sens depuis $\cos l = 1$ jusqu'à $\cos l = 0$; ses valeurs extrêmes seront A et B, l'une sera le maximum, l'autre sera le minimum. Le sens de la pression sera déterminé par les signes de $\cos\lambda$, $\cos\mu$. Les valeurs de ces cosinus n'étant pas dans le même rapport que $\cos l$ et $\cos m$, la pression ne sera pas normale à l'élément, excepté toutefois pour les deux cas extrêmes.

Toutes les questions qu'on peut se proposer sur cet exemple ayant leur solution comprise dans ce qui précède, nous n'entrerons pas dans de plus grands détails à ce sujet.

ÉQUILIBRE D'UNE SPHÈRE CREUSE COMPOSÉE DE DEUX SUBSTANCES DIFFÉRENTES.

Considérons maintenant une sphère creuse composée de deux enveloppes concentriques de matière différente soudées l'une à l'autre.

Soit R_1 le rayon de la couche commune, et R, R', les rayons extrêmes dans l'état primitif.

Les calculs précédents donneront, pour les points de l'enveloppe intérieure,

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{4}{\rho}\frac{d\varphi}{d\rho} - \frac{5\Delta}{3\rho}\frac{dv}{d\rho} = 0.$$

D'où l'on tirera

$$\varphi = \frac{5\Delta}{3\rho^3}\int_{R_1}^{\rho} v\rho^2 d\rho + \frac{C}{\rho^3} + C_1.$$

Si l'on désigne par Φ', δ_1, δ_1', les quantités relatives à la seconde substance, et correspondantes aux quantités Φ, δ, δ', relatives à la première, on aura de même

$$\frac{d^2\varphi'}{d\rho^2} + \frac{4}{\rho}\frac{d\varphi'}{d\rho} - \frac{5\delta_1}{3\rho}\frac{dv}{d\rho} = 0.$$

D'où

$$\varphi' = -\frac{5\delta_1}{3\rho^5}\int_{R'}^{\rho} v\rho^2 d\rho + \frac{C'}{\rho^3} + C_1'.$$

Les deux enveloppes ne se séparant pas, on doit avoir $\varphi = \varphi'$ pour $\rho = R_1$; il faudra de plus que, pour cette même couche, la pression ait la même valeur dans l'une et dans l'autre enveloppe. A ces deux conditions on joindra celles relatives aux deux surfaces extrêmes, et l'on obtiendra ainsi les équations suivantes

$$\frac{4C'}{R'^5} - 5C_1' = 5\delta_1' p',$$

$$\frac{20\delta}{3R^5}\int_R^{R_1} v\rho^2 d\rho - \frac{4C}{R^5} + 5C_1 + 5\delta p = 0,$$

$$\frac{C}{R_1} + C_1 = -\frac{5\delta_1}{3R_1^5}\int_{R_1}^{R'} v\rho^2 d\rho + \frac{C'}{R_1^5} + C_1',$$

$$\frac{4C}{R_1^5} - 5C_1 = \frac{\delta'}{\delta_1'}\left\{\frac{4C'}{R_1^5} - 5C_1' - \frac{20\delta_1}{3R_1^5}\int_{R_1}^{R'} v\rho^2 d\rho\right\}.$$

On tirera de là les valeurs des quatre constantes, qui ne dépendront pas de la distribution de la chaleur, mais seulement des quantités de chaleur introduites dans chacune des deux enveloppes.

Si l'on supposait $v = 0$, on retrouverait les formules données par M. Poisson.

Si l'on suppose au contraire que les pressions extérieures soient nulles, et v constant, on trouve

$$C = \frac{v}{9} \cdot \frac{M}{N}$$

en posant

$$M = \frac{(4\delta'+5\delta_1')\delta-(4\delta_1'+5\delta')\delta_1}{R_1^5} - \frac{(4\delta'+5\delta_1')\delta}{R^5} + \frac{4\delta\delta_1'+9\delta_1\delta'-4\delta\delta'}{R'^5} + \frac{5R'^5(\delta'-\delta_1')\delta_1}{R_1^6} + \frac{4R_1^5(\delta'-\delta_1')\delta}{R^6\,R'^5}$$

$$N = \delta'\left(\frac{1}{R'^5}-\frac{1}{R_1^5}\right)\left(\frac{1}{R_1^5}+\frac{4}{5R^5}\right) + \delta_1'\left(\frac{1}{R_1^5}-\frac{1}{R^5}\right)\left(\frac{1}{R_1^5}+\frac{4}{5'R^5}\right)$$

$$C_1 = \frac{4}{5R^5}C + \frac{4\delta v}{9} - \frac{4\delta v R_1^5}{9R^5}.$$

Ces deux constantes déterminent l'état de l'enveloppe intérieure, et par conséquent font connaître les nouvelles valeurs du rayon moyen et du rayon intérieur, qui est en général celui dont on aura le plus besoin. Les deux autres se déduiront facilement des deux premières : nous nous dispenserons d'en rapporter ici les expressions.

On aura le cas d'une sphère pleine recouverte d'une enveloppe de matière différente en faisant $R = 0$.

Les quatre équations qui déterminent les constantes conduisent alors aux valeurs suivantes de Φ et Φ'

$$\Phi = v\,\frac{(5\delta\delta_1' + 4\delta_1\delta')R'^5 + 4(\delta\delta_1' - \delta_1\delta')R_1^5}{(5\delta_1' + 4\delta')R'^5 + 4(\delta_1' - \delta')R_1^5},$$

$$\Phi' = v.$$

$$\frac{5R_1^5R'^5\delta_1'(\delta-\delta_1).\frac{1}{\rho^5} + 4(\delta\delta_1' - \delta_1\delta')R_1^5 + \delta_1(5\delta_1 + 4\delta')R'^5}{(5\delta_1'+4\delta')R'^5+4(\delta_1'-\delta')R_1^5}.$$

On voit par là que la dilatation dans le noyau plein est indépendante de la distance au centre, et qu'elle en est au contraire dépendante dans l'enveloppe.

Si l'on suppose

$$\delta_1 = \delta, \qquad \delta_1' = \delta',$$

on trouve

$$\Phi = v\delta, \quad \Phi' = v\delta = \Phi.$$

Ce résultat est le même que si les deux parties de la sphère étaient formées de la même substance; et cela devait être, puisque les deux seules qualités de la matière qui entrent dans les équations de la question sont la dilatabilité, relative, soit à l'échauffement, soit à la tension.

ÉQUILIBRE D'UN TUYAU CYLINDRIQUE INDÉFINI.

Si l'on suppose dans l'état naturel un tuyau cylindrique indéfini dans les deux sens; que l'on applique à ses deux surfaces des pressions inégales mais constantes, et qu'on élève la température d'une quantité égale pour tous les points d'une même couche cylindrique, mais variable suivant une loi quelconque avec le rayon de cette couche : il est évident que toutes les circonstances seront les mêmes pour toute section perpendiculaire à l'axe. Si donc on empêche tout mouvement de rotation ou de translation, le déplacement d'un point quelconque s'effectuera dans le plan passant par sa position primitive et par l'axe du cylindre, et tous les points, situés primitivement dans un même plan perpendiculaire à l'axe, seront encore dans un plan perpendiculaire à cet axe après l'établissement du nouvel équilibre.

Cette hypothèse d'un cylindre indéfini n'est pas purement idéale; elle est susceptible de réalisation. En effet, si on coupait ce cylindre par deux plans perpendiculaires à l'axe, et qu'on appliquât aux différents points des deux bases des pressions égales à celles qui existaient avant la section, le cylindre fini se trouverait dans les mêmes circonstances qu'auparavant. J'ajouterai que l'on peut toujours supposer à un cylindre fini une longueur telle que, dans le voisinage de son milieu, tout se passe comme s'il était indéfini.

Dans tous les cas, notre calcul nous apprendra quelles pressions il faut appliquer aux deux bases pour que le dérangement se fasse suivant les conditions que nous avons supposées.

Prenant l'axe du cylindre pour axe des c, z ne dépendra que de c; x, y, ne dépendront que de a, b, et de plus seront entre eux dans le rapport même de ces coordonnées.

Les équations indéfinies deviennent dans ce cas

$$3\frac{d^2x}{da^2} + \frac{d^2x}{db^2} + 2\frac{d^2y}{dadb} - 5\delta\frac{dv}{da} = 0.$$

$$\frac{d^2y}{da^2} + 3\frac{d^2y}{db^2} + 2\frac{d^2x}{dadb} - 5\delta\frac{dv}{db} = 0.$$

$$\frac{d^2z}{dc^2} = 0.$$

Désignons par ρ le rayon d'une quelconque des couches cylindriques, et par θ son accroissement, on devra avoir

$$x : y : \theta :: a : b : \rho,$$

donc

$$x = a\Phi, \quad y = b\Phi, \quad \theta = \rho\Phi;$$

Φ étant une fonction de ρ qu'il s'agit de déterminer. L'une des équations précédentes donne

$$z = \alpha c + \alpha',$$

ou simplement

$$z = \alpha c;$$

en maintenant dans le plan des a, b, les points qui s'y trouvaient dans l'état primitif. Cette condition, jointe à celle qui résulte de la forme des valeurs de x et y, qui s'oppose au mouvement de rotation autour de l'axe, rend tout mouvement commun impossible.

Les deux autres équations se réduisent, par l'élimination de x et y, à l'équation unique

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho}\frac{d\varphi}{d\rho} - \frac{5\delta}{9\rho}\frac{dv}{d\rho} = 0.$$

Les équations à la surface conduiront de même à l'équation unique

$$4\Phi + 3\rho\frac{d\varphi}{d\rho} - 5\delta v + \alpha + 5\delta' P = 0,$$

qui s'applique également aux deux surfaces du cylindre creux; P désignant une pression normale dirigée vers l'intérieur de la partie solide, et que l'on changerait de signe si la pression se changeait en tension.

Désignant par p, p' les pressions exercées sur les surfaces intérieure et extérieure correspondantes aux rayons R, R', les conditions relatives à la surface seront exprimées par les deux équations

$$4\Phi + 3\rho\frac{d\varphi}{d\rho} - 5\delta v + \alpha + 5\delta' p = 0,$$

$$4\Phi + 3\rho\frac{d\varphi}{d\rho} - 5\delta v + \alpha + 5\delta' p' = 0.$$

On devra remplacer ρ par R dans la première; et par R' dans la seconde.

En intégrant l'équation du second ordre qui détermine Φ, on trouve, en représentant par C, C_1, deux constantes arbitraires,

$$\Phi = \frac{5\delta}{3\rho^2}\int_R^\rho v\rho d\rho + \frac{C}{\rho^2} + C_1.$$

Substituant cette valeur dans les deux équations relatives à la surface, on obtiendra pour C et C_1 les valeurs suivantes

$$C = \frac{\frac{5\delta}{3}\int_R^{R'} v\rho d\rho + \frac{5\delta'}{2}(p - p')}{R'^3 - R^3},$$

$$C_1 = \frac{\frac{5\delta}{6}\int_R^{R'} v\rho d\rho + \frac{5\delta'}{4}(pR^2 - p'R'^2)}{R'^2 - R^2} - \frac{\alpha}{4}.$$

Et par conséquent

$$\Phi = \frac{5\mathcal{A}}{3\rho^2}\int_R^\rho v\rho d\rho + \frac{\frac{5\mathcal{A}}{3}\int_R^{R'} v\rho d\rho + \frac{5\mathcal{A}'R'^2}{2}(p-p')}{R'^2-R^2}\cdot\frac{R^2}{\rho^2} + \frac{\frac{5\mathcal{A}}{6}\int_R^{R'} v\rho d\rho + \frac{5\mathcal{A}'}{4}(pR^2-p'R'^2)}{R'^2-R^2} - \frac{\alpha}{4}.$$

Cette valeur de Φ contient une indéterminée α; et cela tient à ce que nous n'avons encore rien exprimé relativement aux pressions exercées sur les bases situées à l'infini.

Or, si l'on désigne par Q la pression sur un élément perpendiculaire à l'axe du cylindre, et par λ, μ, ν, les angles que sa direction fait avec les axes des coordonnées, on trouve

$$\cos\lambda = 0, \qquad \cos\mu = 0,$$

et

$$Q\cos\nu = \frac{\alpha}{2\mathcal{A}'} - \frac{2\mathcal{A}v}{3\mathcal{A}'} + \frac{\frac{\mathcal{A}}{3\mathcal{A}'}\int_R^{R'} v\rho d\rho + \frac{1}{2}(pR^2-p'R'^2)}{R'^2-R^2}.$$

Q étant essentiellement positif, on prendra

$$\cos\nu = \pm 1,$$

suivant le signe du second membre.

Or, si l'on coupait le cylindre perpendiculairement à son axe, et qu'on appliquât, parallèlement à cet axe et dans le sens convenable, une pression égale à Q sur les différents points de la section, cette pression remplacerait exactement le solide indéfini que l'on aurait supprimé. On peut faire la même chose en sens contraire pour une section parallèle, et à une distance quelconque de la première; et l'on obtiendra ainsi un cylindre fini. La pression

exercée sur les bases étant indépendante de c, est aussi celle qu'il faudrait supposer à l'infini, pour que l'état du cylindre fût complétement déterminé, et tel que nous le supposons.

Cette pression renferme une partie constante où entre l'indéterminée α, et d'une autre partie variable avec le rayon et proportionnelle à la température v. Cette seconde partie n'a rien d'arbitraire, mais on peut lui ajouter une pression arbitraire; elle déterminera la valeur de α, et par suite l'état du cylindre : car le déplacement sera donné dans le sens de l'axe par l'équation

$$z = \alpha c,$$

et dans le sens du rayon par la valeur de φ.

Si la pression est supposée nulle en tous les points de la surface, et que v soit constant, l'allongement dans le sens de l'axe, comme dans tout autre sens, doit être égal à δv, d'après ce qui a été démontré généralement. On trouve dans ce cas

$$\mathbf{Q}\cos\nu = \frac{\alpha - \delta v}{2\delta'},$$

et comme la pression $\mathbf{Q}$ exercée sur les bases est supposée nulle, on doit avoir

$$\alpha - \delta v = 0,$$

ce qui donne pour α la valeur qui convient en effet à ce cas particulier.

Cherchons maintenant la pression exercée en un point donné sur un plan parallèle aux arêtes, et pour lequel on a par conséquent

$$\cos n = 0.$$

Nous ne restreindrons en rien la question en supposant le point donné sur l'axe des a; ce qui simplifiera le calcul en donnant

$$b = 0, \qquad a = \rho.$$

Désignant par Q l'intensité de la pression, et par λ, μ, ν, les angles que sa direction fait avec les axes, on trouvera

$$Q\cos\lambda = \frac{1}{5\mathcal{S}'}\left(4\Phi + 3\rho\frac{d\varphi}{d\rho} - 5\mathcal{S}v + \alpha\right)\cos l,$$

$$Q\cos\mu = \frac{1}{5\mathcal{S}'}\left(4\Phi + \rho\frac{d\varphi}{d\rho} - 5\mathcal{S}v + \alpha\right)\cos m,$$

$$\cos\nu = 0.$$

D'où l'on voit que la pression n'est pas normale au plan, puisque l'on n'a pas

$$\cos\lambda : \cos\mu :: \cos l . \cos m.$$

En mettant les deux dernières équations sous la forme

$$Q\cos\lambda = A\cos l, \qquad Q\cos\mu = B\cos m,$$

on trouvera

$$Q^2 = A^2\cos^2 l + B^2\cos^2 m = B^2 + (A^2 - B^2)\cos^2 l.$$

Ce qui montre que le maximum et le minimum de la pression correspondent à

$$\cos l = 1, \qquad \cos l = 0,$$

si $A^2 > B^2$; et à

$$\cos l = 0, \qquad \cos l = 1,$$

si $A^2 < B^2$.

Les directions relatives au maximum et au minimum sont les seules pour lesquelles la pression soit normale.

Les directions intermédiaires donnent des pressions constamment croissantes en partant du minimum, mais toujours obliques au plan sur lequel elles s'exercent.

Cette question donnerait lieu à des recherches particulières analogues à celles que la sphère nous a présentées. On pourrait par exemple considérer le cas où le cylindre serait composé de deux ou d'un plus grand nombre de substances différentes. Mais nous nous dispenserons d'entrer dans ces détails, qui n'offriraient aucune difficulté nouvelle, et ne seraient en quelque sorte qu'une reproduction de ce qui précède.

MOUVEMENT DE VIBRATION

DES POINTS D'UNE SPHÈRE DONT LA TEMPERATURE EST VARIABLE.

Jusqu'ici je n'ai appliqué mes formules qu'à des cas d'équilibre; je vais considérer maintenant une question de mouvement.

Je considère une sphère homogène dont la température initiale est une fonction arbitraire de la distance au centre, et qui est plongée dans un milieu dont la température constante est prise pour le zéro de l'échelle. Pour simplifier les calculs, je ne supposerai ni forces intérieures ni pression à la surface : rien ne sera plus facile que d'y avoir égard quand il en existera; il suffira, comme je l'ai démontré, de calculer séparément les déplacements des points soumis à l'action de ces forces, et partant avec des vitesses nulles de leurs positions respectives dans l'état naturel : la superposition de ces déplacements et de ceux dont nous allons nous occuper donnera le déplacement total pour chaque point.

En employant les mêmes notations que dans les questions précédentes, et désignant par R le rayon de la sphère, on devra avoir pour tous les points l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{3}{5\mathcal{N}'\Delta}\left(\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{4}{\rho}\frac{d\varphi}{d\rho}\right) - \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}'\Delta}\frac{\frac{dv}{d\rho}}{\rho},$$

et pour les points de la surface seulement

$$(2) \qquad \Phi + \frac{3R}{5}\frac{d\varphi}{d\rho} = \int v.$$

Je représente par $F(\rho)$ le déplacement initial qui n'a lieu que dans le sens du rayon, par $\psi(\rho)$ les vitesses initiales dirigées suivant cette même ligne, et par $f(\rho)$ les températures initiales; la valeur de v sera donnée par la formule suivante

$$v = \frac{1}{\rho}\Sigma A e^{-\frac{Kn^2}{C\Delta}t}\sin n\rho.$$

La somme Σ se rapporte à toutes les valeurs de n, qui sont les racines positives de l'équation

$$1 - \frac{HR}{K} = \frac{\tang nR}{nR}.$$

K désigne la conductibilité intérieure de la substance, H sa conductibilité extérieure, C sa chaleur spécifique, et le coefficient A est donné par la formule

$$A = \frac{4n\int_0^R \rho \sin n\rho f(\rho)d\rho}{2nR - \sin 2nR}.$$

Cela posé, soit

$$\Phi = \frac{z}{\rho^2},$$

on aura pour toutes les valeurs de ρ

$$(3) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{3}{5\int'\Delta}\left(\frac{d^2z}{d\rho^2} - \frac{2z}{\rho^2}\right) - \frac{\int}{\int'\Delta}\rho\frac{dv}{d\rho},$$

et

$$(4) \qquad 3R\frac{dz}{d\rho} - z = 5\delta v R^2$$

pour $\rho = R$. Posons $z = w + U$, l'équation (3) sera satisfaite si l'on a séparément

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{3}{5\delta'\Delta}\left(\frac{d^2U}{d\rho^2} - \frac{2U}{\rho^2}\right) - \frac{\delta}{\delta'\Delta}\rho\frac{dv}{d\rho},$$
$$\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{3}{5\delta'\Delta}\left(\frac{d^2w}{d\rho^2} - \frac{2w}{\rho^2}\right),$$

et l'équation (4) sera satisfaite si l'on pose

$$3R\frac{dU}{d\rho} - U = 5\delta R^2 v,$$
$$3R\frac{dw}{d\rho} - w = 0,$$

pour $\rho = R$.

Pour traiter les deux équations en U, on remplacera v par un quelconque des termes de la série qui en donne la valeur; et si l'on désigne par U' la valeur correspondante de U, la somme des valeurs de U', correspondantes à tous les termes de la série v, formera une valeur de U qui satisfera aux deux équations ci-dessus. Il suffira d'en avoir une solution particulière, pourvu que l'intégration de l'équation en w conduise à deux fonctions arbitraires qui permettent de satisfaire à l'état initial.

Outre l'équation relative à la surface, il y a encore une condition à remplir; c'est l'immobilité du centre de la sphère. Nous assujettirons à cette dernière condition toutes les solutions particulières dont nous ferons usage.

Les deux équations en U' seront

$$\frac{d^2U'}{dt^2} = \frac{3}{5\delta'\Delta}\left(\frac{d^2U'}{d\rho^2} - \frac{2U'}{\rho^2}\right) + \frac{A\delta}{\delta'\Delta}e^{-\frac{K}{C\Delta}n^2t}\left(\frac{\sin n\rho}{\rho} - n\cos n\rho\right),$$

$$3R\frac{dU'}{d\rho} - U' = 5R^2\delta A e^{-\frac{K}{C\Delta}n^2 t}\sin n\rho.$$

On fera maintenant

$$U' = e^{-\frac{K}{C\Delta}n^2 t}u,$$

u étant une fonction de ρ seulement.

Cette valeur substituée dans les équations précédentes fait disparaître l'exponentielle, et conduit aux deux suivantes

$$(5)\quad \frac{d^2u}{d\rho^2} - \left(\frac{2}{\rho^2} + \frac{5\delta'K^2n^4}{3C^2\Delta}\right)u + \frac{5\delta A}{3}\left(\frac{\sin n\rho}{\rho} - n\cos n\rho\right) = 0,$$

$$(6)\quad 3R\frac{du}{d\rho} - u = 5\delta AR^2\sin nR \text{ pour } \rho = R.$$

Quand on aura trouvé une solution de ces deux équations, on en aura une de l'équation en U, en prenant

$$U = \Sigma e^{-\frac{K}{C\Delta}n^2 t}u,$$

et cette somme se rapportant à toutes les racines positives de l'équation en n.

Pour intégrer l'équation (5) on négligera d'abord le dernier terme, et on aura la solution particulière

$$u' = e^{g\rho} + e^{-g\rho} + \frac{e^{-g\rho} - e^{g\rho}}{g\rho},$$

qui pourrait être multipliée par une constante arbitraire, et dans laquelle on a fait pour abréger

$$g^2 = \frac{5\mathcal{A}'K^2n^4}{3C^2\Delta};$$

on posera ensuite $u = Bu'$, B étant une fonction de ρ, et l'on obtiendra

$$u'\frac{d^2B}{d\rho^2} + 2\frac{du'}{d\rho}\frac{dB}{d\rho} + \frac{5\mathcal{A}A}{3}\left(\frac{\sin n\rho}{\rho} - n\cos n\rho\right) = 0,$$

ou, en posant $\frac{dB}{d\rho} = C_1$,

$$u'\frac{dC_1}{d\rho} + 2C_1\frac{du'}{d\rho} + \frac{5\mathcal{A}A}{3}\left(\frac{\sin n\rho}{\rho} - n\cos n\rho\right) = 0;$$

d'où

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{5\mathcal{A}A}{3u'^2}\left\{\int u'\left(n\cos n\rho - \frac{\sin n\rho}{\rho}\right)d\rho + \alpha\right\} \\ &= \frac{5\mathcal{A}A}{3u'^2}\left\{\frac{n^2\left(e^{g\rho} + e^{-g\rho}\right)\sin n\rho}{g^2+n^2} + \right. \\ &\qquad \left.\left(e^{g\rho} - e^{-g\rho}\right)\left(\frac{ng\cos n\rho}{n^2+g^2} - \frac{\sin n\rho}{g\rho}\right) + \alpha\right\}, \end{aligned}$$

α étant une constante arbitraire; et l'on aura enfin

$$\begin{aligned} u = \frac{5\mathcal{A}}{3}u'\left\{\int_R^\rho \frac{1}{u'^2}\right. &\left\{\frac{n^2\left(e^{g\rho}+e^{-g\rho}\right)\sin n\rho}{g^2+n^2}\right. \\ &\left.\left. + \left(e^{g\rho} - e^{-g\rho}\right)\left(\frac{ng\cos n\rho}{n^2+g^2} - \frac{\sin n\rho}{g\rho}\right) + \alpha\right\}d\rho + \beta\right\}, \end{aligned}$$

β étant une nouvelle constante arbitraire introduite par la dernière intégration.

Ces deux constantes se détermineront par l'équation relative à la surface et par la condition que le centre reste immobile. Occupons-nous d'abord de cette dernière, qui consiste en ce que $\Phi\rho$ doit être nul pour $\rho = 0$.

Il faudra donc que $\frac{z}{\rho}$ ou $\frac{e^{-\frac{K}{C\Delta}n^2t}u+w}{\rho}$ devienne nul pour $\rho=0$; et comme le premier terme tend vers zéro à mesure que le temps augmente, ce qui n'a pas lieu pour w, il faudra que $\frac{u}{\rho}$ et $\frac{w}{\rho}$ soient nuls séparément quand on y fera $\rho=0$.

Or la fonction $\frac{u'}{\rho}$ devient nulle pour $\rho=0$, et $\frac{u'}{\rho^2}$ se réduit à une quantité finie; c'est ce que l'on peut vérifier en s'assurant, d'après les règles ordinaires du calcul différentiel, que u' est nulle ainsi que sa première dérivée, mais que sa seconde dérivée est finie quand on fait $\rho=0$. On peut encore développer u' en série convergente, et l'on voit que le terme de moindre degré contient ρ^2 en facteur. Quant à la quantité

$$\frac{n^2(e^{g\rho}+e^{-g\rho})\sin n\rho}{g^2+n^2}+(e^{g\rho}-e^{-g\rho})\left(\frac{ng\cos n\rho}{n^2+g^2}-\frac{\sin n\rho}{g\rho}\right).$$

On reconnaîtra de même qu'elle contient ρ^5 dans le terme du plus faible degré. En la divisant par u'^2 qui contient le facteur ρ^4, on aura un quotient qui tendrait vers zéro en même temps que ρ. L'intégrale prise depuis $\rho=R$ jusqu'à $\rho=0$ est donc finie; et, multipliée par u', elle donnera un produit qui, divisé par ρ, deviendra nul pour $\rho=0$.

La seconde partie de l'intégrale est $\alpha\int_R^{\rho}\frac{d\rho}{u'^2}$, et devient pour $\rho=0$, $\alpha\int_R^{0}\frac{d\rho}{u'^2}$. Le coefficient différentiel $\frac{1}{u'^2}$ devient infini à la seconde limite. Pour savoir de quel ordre est l'intégrale, nous la comparerons à une autre plus simple, et dont le coefficient différentiel soit infini, de même ordre que $\frac{1}{u'^2}$ pour $\rho=0$; on sait que alors les deux intégrales seront finies ou infinies, de même ordre. Or, $\frac{1}{\rho^4}$ et $\frac{1}{u'^2}$ ont un rapport qui reste fini quand ρ converge

vers zéro; il suffit donc de considérer $\int_R^\rho \frac{d\rho}{\rho^4}$ qui est égale à $\frac{1}{3R^3} - \frac{1}{3\rho^3}$. Cette quantité multipliée par $\frac{u'}{\rho}$ donnera un résultat qui deviendra infini pour $\rho = 0$.

Enfin, le terme $\frac{5\mathcal{J}A\beta u'}{3\rho}$ deviendra nul pour $\rho = 0$; il est donc nécessaire et suffisant de prendre $\alpha = 0$ pour que $\frac{u}{\rho}$ devienne nul en même temps que ρ; la seconde constante β reste tout à fait arbitraire, et va nous permettre de satisfaire à l'équation (6) relative à la surface. Il suffira pour cela de lui donner la valeur suivante

$$\beta = \frac{\frac{3gR}{g^2+n^2}\left\{ n\cos nR\left(e^{gR}-e^{-gR}\right) - g\sin nR\left(e^{gR}+e^{-gR}\right)\right\}}{e^{2gR}\left(\frac{4}{g^2R^2} + 7 - \frac{6}{gR} - 3gR\right) + e^{-2gR}\left(\frac{4}{g^2R^2} + 7 + \frac{6}{gR} + 3gR\right) + 8 - \frac{2}{g^2R^2}}.$$

Il faut maintenant déterminer w d'après les équations suivantes

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{3}{5\mathcal{J}'\Delta}\left(\frac{d^2w}{d\rho^2} - \frac{2w}{\rho^2}\right) \tag{7}$$

et

$$3R\frac{dw}{d\rho} - w = 0 \text{ pour } \rho = R. \tag{8}$$

Soit $w = \omega\zeta$, ω étant une fonction de t et ζ une fonction de ρ seulement, l'équation (7) devient

$$\zeta\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{3}{5\mathcal{J}'\Delta}\left(\frac{d^2\zeta}{d\rho^2} - \frac{2\zeta}{\rho^2}\right)\omega.$$

Posant

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = -\frac{3}{5\mathcal{N}'\Delta}p^2\omega,$$

p étant une quantité réelle quelconque, il en résultera

$$\frac{d^2\zeta}{d\rho^2} + \left(p^2 - \frac{2}{\rho^2}\right)\zeta = 0.$$

Cette dernière équation est satisfaite par la valeur particulière

$$\zeta = \frac{\sin p\rho}{\rho} - p\cos p\rho.$$

La précédente a pour solution complète

$$\omega = \mathrm{M}\cos tp\sqrt{\frac{3}{5\mathcal{N}'\Delta}} + \mathrm{N}\sin tp\sqrt{\frac{3}{5\mathcal{N}'\Delta}},$$

M, N, étant des constantes arbitraires. On aura par suite

$$w = \left(\mathrm{M}\cos tp\sqrt{\frac{3}{5\mathcal{N}'\Delta}} + \mathrm{N}\sin tp\sqrt{\frac{3}{5\mathcal{N}'\Delta}}\right)\left(\frac{\sin p\rho}{\rho} - p\cos p\rho\right).$$

Cette expression satisfait à la condition

$$\frac{w}{\rho} = 0 \quad \text{pour} \quad \rho = 0.$$

Elle satisfera à l'équation (8) relative à la surface si l'on pose

$$4p\cos p\mathrm{R} + \left(\frac{3p^2\mathrm{R}^2-4}{\mathrm{R}}\right)\sin p\mathrm{R} = 0,$$

ou

$$\text{(9)} \qquad \tan g p\mathrm{R} = \frac{4p\mathrm{R}}{4-3p^2\mathrm{R}^2}.$$

Cette équation s'était déjà présentée à M. Poisson, qui en a déterminé par approximation les premières racines dans un de ses

mémoires sur les corps élastiques. On peut facilement se faire une idée approchée de la valeur de toutes ces racines qui sont en nombre infini, par la considération des lieux géométriques; je n'insisterai pas sur ce point. On obtiendra par là une infinité de valeurs de w, pour lesquelles on se bornera aux valeurs positives de p, vu que les valeurs négatives donneraient des solutions qui rentreraient dans les premières. La somme de toutes ces valeurs de w satisfera encore aux équations (7) et (8) et à la condition de l'immobilité du centre. Si donc à cette somme on ajoute la valeur de U précédemment déterminée, on obtiendra une valeur de z, qui satisfera à l'équation (3) et aux conditions relatives au centre et à la surface. Il ne restera donc plus qu'à satisfaire à l'état initial de la sphère. La valeur de z ainsi obtenue est

$$z = \Sigma\, e^{-\frac{K}{C\Delta} n^2 tu}\, u + \Sigma\left(M\cos tp\sqrt{\frac{3}{5f'\Delta}} + N\sin tp\sqrt{\frac{3}{5f'\Delta}}\right)\left(\frac{\sin p\rho}{\rho} - p\cos p\rho\right),$$

ces deux sommes se rapportant aux racines des deux équations différentes dont il a été question.

Or à l'origine du mouvement on connaît les déplacements de chaque point relativement à la position d'équilibre correspondante à la température zéro pour tous les points; on connaît de plus les vitesses de ces points à ce même instant, sans quoi la question ne serait pas déterminée. On donne donc les valeurs que doivent prendre $\Phi\rho$ et $\frac{d(\Phi\rho)}{dt}$ quand on y fait $t = 0$. Représentons la première par $F(\rho)$ et la seconde par $\downarrow(\rho)$; il faudra que l'on ait

$$z = \rho F(\rho) \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dt} = \rho\downarrow(\rho)$$

pour $t = 0$, d'où résultent les deux équations suivantes :

$$\rho F(\rho) = \Sigma u + \Sigma M\left(\frac{\sin p\rho}{\rho} - p\cos p\rho\right), \tag{10}$$

$$(11)\qquad \rho\psi(\rho) = -\frac{K}{C\Delta}\Sigma n^2 u + \sqrt{\frac{3}{5\delta'\Delta}}\Sigma N p \left(\frac{\sin p\rho}{\rho} - p\cos p\rho\right).$$

Avant de déterminer la valeur générale des coefficients M et N, il faut d'abord démontrer que si p, p', désignent deux racines différentes de l'équation (9), on aura toujours

$$\int_0^R \left(\frac{\sin p\rho}{\rho} - p\cos p\rho\right)\left(\frac{\sin p'\rho}{\rho} - p'\cos p'\rho\right) d\rho = 0,$$

ou

$$\int_0^R \left(\frac{\sin p\rho \sin p'\rho}{\rho^2} - \frac{p\cos p\rho \sin p'\rho}{\rho} - \frac{p'\cos p'\rho \sin p\rho}{\rho} + pp'\cos p\rho \cos p'\rho\right) d\rho = 0.$$

Or les trois premiers termes forment la différentielle de

$$-\frac{\sin p\rho \sin p'\rho}{\rho},$$

donc leur intégrale entre les limites 0 et R est

$$-\frac{\sin pR \sin p'R}{R}.$$

L'intégrale du dernier terme est

$$\left(\frac{p\sin pR\cos p'R - p'\sin p'R\cos pR}{p^2 - p'^2}\right)pp';$$

et par suite l'intégrale totale aura pour valeur

$$-\frac{\sin pR \sin p'R}{R} + \frac{pp'(p\sin pR\cos p'R - p'\sin p'R\cos pR)}{p^2 - p'^2}.$$

Si $p' = p$, cette expression devient

$$-\frac{\sin^2 pR}{R} + \frac{Rp^2}{2} + \frac{p\sin 2pR}{4};$$

c'est la valeur de

$$\int_0^R \left(\frac{\sin p\rho}{\rho} - p\cos p\rho\right)^2 d\rho,$$

dont nous aurons besoin plus tard.

On trouverait, au signe près, la même valeur si on avait $p' = -p$. Mais pour toute autre valeur de p' on trouve, en faisant usage de l'équation (9), que tous les termes de l'expression ci-dessus se détruisent identiquement.

Cela posé, multiplions les deux membres de l'équation (10) par

$$\left(\frac{\sin p\rho}{\rho} - p\cos p\rho\right) d\rho,$$

et integrons entre les limites 0, R; tous les termes de la seconde somme Σ disparaitront, excepté celui qui correspond à la racine p que l'on considère; et l'on déterminera facilement le coefficient M de ce terme. la valeur sera donnée par l'équation suivante :

$$M = \frac{\int_0^R \{\rho F(\rho) - \Sigma u\}\left(\frac{\sin p\rho}{\rho} - p\cos p\rho\right) d\rho}{\int_0^R \left(\frac{\sin p\rho}{\rho} - p\cos p\rho\right)^2 d\rho}$$

$$= \frac{4R\int_0^R \{\rho F(\rho) - \Sigma u\}\left(\frac{\sin p\rho}{\rho} - p\cos p\rho\right) d\rho}{pR\sin 2pR - 4\sin^2 pR + 2p^2R^2}.$$

L'équation (11) donnera de même

$$N = \frac{\int_0^R \left\{\rho\sqrt{\rho} + \frac{K}{c\Delta}\Sigma n^2 u\right\}\left(\frac{\sin p\rho}{\rho} - p\cos p\rho\right) d\rho}{p\sqrt{\frac{3}{3\delta'\Delta}}\int_0^R \left(\frac{\sin p\rho}{\rho} - p\cos p\rho\right)^2 d\rho}$$

$$= \frac{\frac{4R}{p}\sqrt{\frac{5\delta'\Delta}{3}}\int_0^R \left\{\rho\sqrt{\rho} + \frac{K}{c\Delta}\Sigma n^2 u\right\}\left(\frac{\sin p\rho}{\rho} - p\cos p\rho\right) d\rho}{pR\sin^2 pR - 4\sin^2 pR + 2p^2R^2}.$$

La valeur de z est donc complétement déterminée, puisqu'elle satisfait à l'équation aux différences partielles (3), aux conditions relatives à la surface et au centre, et à l'état initial. On en déduira Φ en la divisant par ρ^2; et si l'on désigne par θ l'accroissement $\varphi\rho$ du rayon ρ, on aura

$$(12)\quad \theta = \frac{1}{\rho}\Sigma e^{-\frac{K}{c\Delta}n^2t}u + \frac{1}{\rho}\Sigma\left(M\cos tp\sqrt{\frac{3}{5\delta'\Delta}} + N\sin tp\sqrt{\frac{3}{5\delta'\Delta}}\right)\left(\frac{\sin p\rho}{\rho} - p\cos p\rho\right).$$

La première partie de cette expression tend indéfiniment vers zéro, à mesure que le temps augmente. La seconde est périodique, et sa forme est la même que celle que M. Poisson avait trouvée dans le mémoire déjà cité, en supposant à tous les points une température égale et invariable.

L'état de la sphère converge donc vers un état final, où les lois sont les mêmes que s'il n'y avait pas eu de variation dans les températures; et c'est à quoi il était facile de s'attendre. Mais ce qu'il faut bien remarquer, c'est que cet état final conserve toujours l'empreinte de l'état thermométrique primitif; car les coefficients M, N, dépendent de u, et par suite des températures initiales, ainsi que des coefficients spécifiques de la substance relativement à la chaleur. Les valeurs de ces coefficients sont les mêmes que si la température de tous les points était constamment égale à zéro, et que les fonctions qui déterminent les positions et les vitesses initiales fussent

$$F(\rho) = \frac{1}{\rho}\Sigma u, \quad \text{et} \quad \downarrow(\rho) + \frac{K}{c\Delta}\cdot\frac{1}{\rho}\Sigma n^2 u;$$

en sorte que, relativement à l'état final du système, les températures primitives produisent le même effet que produirait une diminution de chaque rayon ρ égale à $\frac{1}{\rho}\Sigma u$, jointe à un accroissement de vitesse pour chaque point exprimé par $\frac{K}{c\Delta}\cdot\frac{1}{\rho}\Sigma n^2 u$.

On peut déterminer d'après cela quels devraient être les déplacements et les vitesses dans l'état initial, pour que l'état final fût un repos absolu. Il suffirait pour cela que M et N fussent nuls; ce qui aura lieu si l'on a

$$F(\rho) = \frac{1}{\rho}\Sigma u \quad \text{et} \quad \psi(\rho) = -\frac{K}{c\Delta}\cdot\frac{1}{\rho}\Sigma n^2 u.$$

Telles sont donc les valeurs que l'on doit donner dans l'origine aux déplacements et aux vitesses des points de la sphère, pour que leur mouvement aille en se ralentissant indéfiniment et tende vers un repos complet.

La formule qui donne à chaque instant la valeur de θ devient dans ce cas

$$\theta = \frac{1}{\rho}\Sigma e^{-\frac{K}{c\Delta}n^2 t} u;$$

et l'on vérifie facilement que pour $t = 0$ on trouve

$$\theta = \frac{1}{\rho}\Sigma u, \qquad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{K}{c\Delta}\cdot\frac{1}{\rho}\Sigma n^2 u.$$

MÉMOIRE

SUR

LES COMBINAISONS DE L'ACIDE CHROMIQUE

AVEC LES CHLORURES MÉTALLIQUES.

PAR M. EUGÈNE PÉLIGOT.

L'analogie qui existe entre l'oxygène, le chlore et les autres corps électro-négatifs, est maintenant généralement reconnue; mais cette analogie, évidente entre les oxydes et les chlorures, sensible encore dans les corps dont l'acide et la base renferment le même principe électro-négatif, ne se trouve plus étayée sur des faits à mesure qu'on s'écarte de ces combinaisons simples; c'est sous ce point de vue surtout que des composés bien définis d'un acide oxygéné et de chlorures jouant le rôle de base, méritent de fixer l'attention des chimistes, comme offrant les premiers exemples de sels dans lesquels l'oxygène de la base se trouve remplacé par le chlore.

Parmi ces nouveaux sels, il en est un que sa production facile et économique permet d'étudier d'une manière spéciale; et comme sa composition et ses principales propriétés sont les mêmes que celles des autres bi-chromates de chlorures, je parlerai peu de ces derniers, et je décrirai au contraire avec soin tout ce qui a rapport à la formation, aux propriétés, et à l'analyse de ce composé remarquable, qui est le bi-chromate de chlorure de potassium.

Il suffit pour le produire de faire bouillir quelque temps du bi-chromate de potasse dissous dans l'eau avec de l'acide hydro-chlorique; on obtient par le refroidissement de la liqueur une quantité de ce sel cristallisé proportionnelle à la quantité des matières employées.

La théorie de cette préparation est aussi simple que la préparation elle-même; en effet, l'acide hydro-chlorique en présence du bi-chromate de potasse réagit d'abord sur la potasse pour former du chlorure de potassium et de l'eau; en même temps il met l'acide chromique en liberté; si lorsque toute la potasse est convertie en eau et chlorure de potassium, on laisse refroidir la liqueur, elle dépose bientôt des cristaux volumineux de bi-chromate de chlorure de potassium; de sorte que tout le bi-chromate de potasse est converti en eau et bi-chromate de chlorure de potassium, avant que l'acide hydro-chlorique, que je suppose en excès, produise du protochlorure de chrome, lequel ne prend naissance que par la décomposition du sel qui vient de se former.

Voici la réaction atomique :

ATOMES EMPLOYÉS.		ATOMES PRODUITS.	
2 at. acide chromique.	1304	2 at. ac. chromique. . .	1304
1 at. potasse.	589	1 at. chlorure de potas-	
2 at. acide hydro-chlo-		sium.	931
rique.	454	1 at. eau.	112
	2347		2347

On verra plus loin qu'il existe d'autres méthodes pour la préparation de ce composé.

De tous les procédés qu'on peut mettre en usage pour l'analyse de ce sel, j'ai préféré le suivant comme étant le plus simple.

Je dissous dans l'eau un gramme environ de sel cristallisé et desséché avec soin entre des doubles de papier joseph; dans la liqueur rendue acide, au moyen de l'acide nitrique, je verse goutte à

goutte du nitrate d'argent; le chlorure d'argent, bien lavé, est fondu et pesé; en opérant avec précaution, il ne se précipite point de chromate d'argent; d'ailleurs, en lavant le filtre avec de l'eau bouillante aiguisée d'acide nitrique, on dissoudrait aisément celui qui se serait formé.

Je fais ensuite bouillir la liqueur provenant de la séparation du chlorure d'argent avec de l'acide sulfureux; celui-ci fait passer l'acide chromique à l'état de protoxyde de chrome, en devenant lui-même acide sulfurique; je traite par l'ammoniaque: après une ébullition assez prolongée, laquelle est nécessaire pour précipiter tout le protoxyde de chrome, je jette la matière sur un filtre; lorsque celui-ci est bien lavé, je le calcine dans un creuset de platine; son poids me donne la quantité d'acide chromique.

Quant au potassium, je le dose à l'état de sulfate de potasse après l'évaporation à siccité de la liqueur dont j'ai séparé le protoxyde de chrome, le traitement du résidu par l'acide sulfurique et sa calcination.

C'est en suivant ce procédé que j'ai obtenu dans diverses opérations les nombres suivants :

Chlorure d'argent fondu : Pour 1 gramme de sel 0,795 de chlorure, qui contiennent 19,41 pour 0/0 de chlore.

Pour 1 gr. 50....1,238 qui donnent 20,26 de chlore.
Pour 1 —— ....0,820 ———— 20,22 *idem.*
Pour 1 —— ....0,815 ———— 20,10 *idem.*

PROTOXYDE DE CHROME.

Pour 1 gr. 0,441 de protoxyde, qui représentent 57,30 d'acide chromique.

Pour 1 gr. —— .0,445 ou bien 57,82 d'ac. chromique.
Pour 1 —— .0,448 ———— 58,21 *idem.*
Pour 0,60 —— .0,268 qui donnent 58,03 *idem.*

SULFATE DE POTASSE.

Pour 1 gr. 0,489 qui contiennent 21,88 p. de o/o potassium.
La composition calculée de ce sel est :

Acide chromique	58,35
Chlorure de potassium	41,65
	100,00

Cette quantité de chlorure de potassium renferme elle-même :

Chlore	19,91
Potassium	21,74
	41,65

J'ai trouvé : Ac. chromique	58,21
Chlore	19,41
Potassium	21,88
	99,50

Toutes mes autres analyses s'accordent sensiblement avec ces nombres : elles ont d'ailleurs été faites dans le laboratoire et sous les yeux de M. Dumas, qui les a suivies avec une bienveillance toute particulière; ses conseils et son expérience m'ont été souvent utiles, dans cette occasion comme dans beaucoup d'autres.

Je passe aux principales propriétés du bi-chromate de chlorure de potassium :

L'action de l'eau est remarquable; lorsqu'on met en présence de l'eau un cristal de bi-chromate de chlorure de potassium, de rouge et transparent qu'il était, il devient blanc et opaque; et si, lorsque le sel est dissous, on abandonne la liqueur à elle-même, on obtient bientôt, non pas des cristaux du sel employé, mais des cristaux de bi-chromate de potasse : ce dernier sel se produit,

soit qu'on ait concentré la liqueur à l'aide de la chaleur, soit qu'on l'ait livrée à l'évaporation spontanée.

Si, au lieu d'employer de l'eau pure, on opère avec de l'eau préalablement chargée d'acide hydro-chlorique, en ayant soin de ne pas en mettre assez pour transformer l'acide chromique en protochlorure, le bi-chromate de potasse ne prend pas naissance, et le nouveau sel cristallise avec sa forme accoutumée.

Enfin, selon les quantités relatives d'eau et d'acide, on obtiendra un mélange des deux sels, etc.

L'eau est donc décomposée par le bi-chromate de chlorure de potassium; son hydrogène se porte sur le chlore pour former de l'acide hydro-chlorique, qui devient libre, tandis que son oxygène va s'unir au potassium.

Cette réaction, bien que pouvant être prévue de prime abord, est intéressante; elle donne naissance précisément aux produits employés avant la formation du bi-chromate de chlorure; de sorte que pour l'exprimer atomiquement il suffira de reproduire les nombres que j'ai inscrits plus haut, moyennant une transposition.

ATOMES EMPLOYÉS.		ATOMES PRODUITS.	
2 at. ac. chromique..	1304	2 at. ac. chromique..	1304
1 at. chlor. de potassium.....	931	1 at. potasse.....	589
1 eau	112	2 at. ac. hydro-chlorique.....	454
	2347		2347

On voit que les éléments se sont remis en présence pour produire le bi-chromate de chlorure, lequel reprendra naissance si l'on corrige l'action oxydante de l'eau, par une quantité convenable d'acide hydro-chlorique.

On ne peut donc pas purifier ce sel par la cristallisation : on est obligé de le comprimer entre des doubles de papier joseph; et

encore dans mes nombreuses analyses ai-je presque toujours obtenu un petit excès de chlore.

Le bi-chromate de chlorure de potassium est un sel qui cristallise très-bien; ses cristaux sont des prismes droits à base rectangulaire, leur couleur est celle du bi-chromate de potasse; ils ne sont nullement déliquescents.

Quant à ses autres propriétés, il est inutile de les énoncer; car ce sont celles de l'acide chromique et du chlorure de potassium; ainsi en présence de l'acide sulfurique il donne un dégagement de chlorure de chrome liquide, etc.

J'ai indiqué le moyen vraiment économique de préparer ce sel; ce moyen n'est pas le seul : on peut l'obtenir aussi et d'une manière plus directe, en mélangeant deux atomes d'acide chromique avec un atome de chlorure de potassium, pourvu qu'on ait soin de rendre la liqueur acide par l'acide hydro-chlorique : on se le procure encore lorsqu'on traite le chlorure de chrome liquide par l'eau saturée de chlorure de potassium; et ici toutes les conditions favorables à sa formation sont remplies, puisque l'eau décompose le chlorure de chrome liquide en acide chromique et acide hydrochlorique.

La préparation facile de ce sel et sa composition pouvant le rendre utile aux arts qui se servent d'acide chromique, je dois faire remarquer que si, au lieu d'employer le bi-chromate de potasse, on fait usage pour le produire de chromate neutre, les cristaux obtenus sont mêlés de cristaux de chlorure de potassium.

C'est en traitant le chlorure de chrome liquide par l'eau saturée des divers chlorures métalliques, que j'ai obtenu les bi-chromates de chlorure de sodium, de calcium, de magnesium et celui d'hydro-chlorate d'ammoniaque; les trois premiers sont déliquescents; le quatrième est beaucoup plus soluble que le bi-chromate de chlorure de potassium; car la solubilité de ces divers sels, qui ont tous la même composition et les mêmes propriétés, paraît dépendre uniquement de celle des chlorures qui leur servent de base.

Le bi-chromate d'hydro-chlorate d'ammoniaque se confond par son aspect avec celui de chlorure de potassium ; il a d'ailleurs la même forme cristalline ; son analyse m'a donné :

Acide chromique.....	65,5
Acide hydro-chlorique...	23,5
Ammoniaque	10,8
	99,8

Voici sa composition calculée :

Acide chromique.....	66,0
Acide hydro-chlorique..	23,2
Ammoniaque.....	10,8
	100,0

Je n'ai pu obtenir les bi-chromates de chlorure de barium et de strontium, les dissolutions saturées de ces chlorures précipitant par une addition d'acide hydro-chlorique.

Quant aux autres chlorures, je n'ai pas cherché à les combiner avec l'acide chromique ; je regarde d'ailleurs cette recherche comme peu intéressante ; car en supposant l'existence de ces composés, qui est probable, leurs propriétés seront connues.

Bien que les sels que j'ai l'honneur de présenter à l'académie n'aient point encore d'analogues dans la science, leur existence est si naturelle, si logique, qu'elle rend bien probable celle d'autres combinaisons du même genre entre d'autres acides oxygénés et les chlorures servant de bases ; de même, les rapports qui existent entre ces derniers et les cyanures, les sulfures, les fluorures, etc., ne portent-ils pas à penser qu'on doit obtenir avec ces corps et les mêmes acides oxygénés des combinaisons d'un assez grand intérêt ? L'existence de tels composés peut se pré-

voir, ce me semble; car dans l'état actuel de la science, et surtout dans la partie qui nous occupe, il n'est point désormais de faits isolés : tous se lient et s'enchaînent; et chaque observation nouvelle, loin d'infirmer en rien les lois qui doivent la régir, vient à son tour prendre la place que lui avait assignée à l'avance une saine théorie.

EXTRAIT D'UN MÉMOIRE

SUR

LE MÉCANISME DE LA RESPIRATION NASALE

CHEZ LES CÉTACÉS SOUFFLEURS,

EN CE QUI TOUCHE PARTICULIÈREMENT À LA DISTRIBUTION DANS L'APPAREIL DE L'ÉVENT DES BRANCHES DU NERF FACIAL (PORTION DURE DE LA SEPTIÈME PAIRE DES ANCIENS ANATOMISTES; NERF RESPIRATOIRE DE LA FACE, CH. BELL).

PAR M. BOURJOT SAINT-HILAIRE,

PROFESSEUR DE ZOOLOGIE ÉLÉMENTAIRE AU COLLÉGE ROYAL DE BOURBON.

L'auteur du mémoire examine anatomiquement et physiologiquement l'appareil nasal de la respiration ou de l'évent chez les cétacés souffleurs, et en particulier sur le marsouin ordinaire (*delphinus phœcena*); il décrit la disposition des poches à eau, les muscles qui servent à leur compression et à l'expulsion des liquides, ceux qui président à la dilatation des orifices nasaux pour l'inspiration de l'air. C'est en étudiant plus profondément et avec plus de détail qu'on ne l'avait fait jusqu'ici cet appareil nasal, que l'auteur a été amené à reconnaître que la distribution du nerf facial offrait, chez les cétacés, un type propre et

tout à fait confirmatif de l'opinion de Charles Bell, sur la spécialité de fonction de ce nerf considéré comme nerf respirateur de la face. Il est dit dans le mémoire :

Tous ces muscles compresseurs des poches, puis dilatateurs des voies aériennes nasales, reçoivent des filets profonds du nerf facial ou portion dure de la septième paire, dont l'origine, et surtout la marche et la distribution dans les cétacés méritent de fixer l'attention.

Né du sillon qui sépare les olives des corps rétiformes sur la moelle allongée, en avant du glosso-pharyngien et du pneumo-gastrique, le nerf facial, composé de filets tenaces, marche accolé à la portion molle ou à l'auditif, dont l'origine différente se voit d'une manière manifeste sur le corps rétiforme, au point où celui-ci se joint au cervelet. Le nerf facial se creuse une sorte de gouttière sur le tronc même du nerf auditif, qui reste très-pulpeux : arrivé avec lui vers le sommet de la pyramide du rocher, il y pénètre, contourne l'ostéide mobile et séparé qui forme chez les cétacés l'oreille interne, et sort par le trou stylo-mastoïdien au-dessous et en arrière du cartilage de l'oreille.

A partir de là il commence à marcher d'arrière en avant sous forme d'un cordon unique, solide, arrondi, passe au-devant de l'os mandibulaire inférieur, contourne le globe de l'œil jusqu'à la commissure des lèvres. Dans ce trajet, bien que composé d'une manière plexiforme, il ne donne aucun filet ; il reçoit seulement quelques rameaux très-déliés de communication de la portion ophthalmique de la cinquième paire. Arrivé à l'angle orbitaire antérieur, le tronc du nerf s'engage sous un ligament musculo-fibreux qui remplace le buccinateur, sans lui laisser de filets, et bientôt, changeant de direction et se pliant sur lui-même à angle aigu, il dirige des branches nombreuses et très-profondes vers l'appareil de l'évent, pénètre l'épaisseur des muscles dilatateurs des orifices et compresseurs des poches à eau.

Aucune des branches du facial ne se porte vers les lèvres et à la pointe du museau ; ces parties ne reçoivent que des rameaux

de la portion sous-orbitaire de la cinquième paire ou nerf de la sensibilité à la face.

CONSIDÉRATIONS PHYSIOLOGIQUES.

Dans l'homme et dans tous les animaux à respiration aérienne bucco-nasale, la cavité de la bouche représente un vaste pavillon dont l'entrée dilatable est ordinairement formée par des joues mobiles et peu épaisses. Dans l'homme surtout, les muscles de la face, comme les canins, le zygomato-labial, grand et petit, les releveurs et dilatateurs de l'aile du nez, sont réduits à n'être que des bandelettes sous-cutanées très-minces. Ces muscles agissent principalement pour mettre de l'ensemble et de l'harmonie dans les mouvements des lèvres, du pavillon de la bouche et des ailes du nez, dans le mécanisme de l'inspiration et de l'expiration, de la succion, de la prononciation des sons articulés; dans le jeu de la physionomie, que l'on voit devenir si douloureusement expressif lorsque la respiration est gênée, comme dans les accès d'asthme, d'angine de poitrine, si actif chez le jeune enfant qui tette, chez l'animal qui aspire un liquide, comme cela se remarque chez le cheval, la vache, etc., lorsqu'ils sont à l'abreuvoir

Il est donc vrai de dire que le nerf facial, qui, dans l'homme et dans les autres animaux à respiration bucco-nasale, se répand en filets nombreux dans tous les muscles de la face, et cela d'autant plus que la respiration est plus buccale et que les lèvres servent plus à l'articulation des sons, est bien véritablement un nerf de la respiration et de toutes les fonctions bucco-labiales où l'acte respiratoire joue le principal rôle, comme parler, siffler, souffler, sucer, humer les liquides, aspirer l'air. Mais, a-t-on dit, le nerf facial sert principalement au jeu de la physionomie. Cela est vrai, mais c'est par un double emploi, ou plutôt par une opération complexe.

L'expression des passions chez les animaux qui peuvent varier

le jeu de leur figure, a besoin de tous les actes dont nous venons de parler pour se manifester au dehors. Le jeu mimique de la physionomie, placé sous l'influence du nerf facial, n'est-il donc pas le premier acte de l'expression de la passion qui se manifeste un peu plus tard par une parole de douceur ou de colère chez l'homme; chez le lion, le chat, le tigre, par un jurement grondeur; chez le chien, l'hyène, par des cris glapissants ? L'expression faciale précède et accompagne presque toujours un acte vocal, et tout acte vocal est nettement déterminé par un acte respiratoire.

On voit donc que si le nerf facial influence le jeu de la physionomie, c'est qu'il est, par les muscles qu'il anime, agent de la respiration bucco-nasale, et que le jeu de la physionomie est avec les actes respiratoires dans une dépendance réciproque; et, pour prouver par les contraires, nous voyons dans les cétacés où la respiration n'est plus que nasale, toute expression de la face disparaître en même temps que toute possibilité à produire des sons, et toute l'action musculaire être confinée autour de l'évent sous l'empire de la septième paire, pour l'exercice de la respiration.

Les expériences de sir Charles Bell en Angleterre ont paru tout à fait concluantes sur ce sujet. Chacun sait que ce célèbre physiologiste assigna une fonction toute spéciale au nerf de la septième paire, celle de faire contracter les muscles dilatateurs et constricteurs des orifices aériens qui s'ouvrent à la face, la bouche et les narines.

Pour arriver à cette conclusion, sir Charles Bell expérimenta plusieurs fois sur des mammifères à respiration double, buccale et nasale à la fois, le singe, l'âne; et il sut aussi tirer des inductions ingénieuses de faits pathologiques observés sur l'homme et sur les animaux; mais comme chez les sujets de ces expériences l'inspiration par le nez, qui ne peut complétement se clore, suppléait à l'action de la bouche qui, en outre, en s'ouvrant, continuait à fournir une large voie à l'inspiration, on n'arriva jamais

à une conclusion rigoureuse relativement à la respiration. La section du nerf facial amenait bien de la gêne dans les mouvements de la bouche, des lèvres et des ailes du nez, et des modifications dans la production des sons à laquelle les lèvres ne pouvaient plus concourir; l'homme ne pouvait plus siffler, l'âne ne pouvait plus braire par suite de cette paralysie ou de la section du nerf facial, mais l'asphyxie n'était jamais imminente, car l'inspiration, quoique rendue plus difficile, n'était jamais impossible. On pouvait donc conclure que le nerf facial est important dans le jeu de la physionomie et dans la production des sons articulés, mais on n'avait pas d'exemple où l'intégrité d'action de ce nerf fût une condition *sine quâ non* d'existence.

Il est étonnant que l'habile physiologiste que nous avons cité, et en France, M. Magendie, qui a répété et confirmé ces expériences avec cette rare sagacité qu'on lui connaît en physiologie expérimentale, n'aient pas cherché à savoir comment se comportait le nerf facial chez les cétacés, animaux à respiration pulmonaire et à habitudes aquatiques. Les animaux de cet ordre des mammifères, obligés par une submersion habituelle à une intermittence régulière et prolongée dans l'acte de la respiration, qui ne se fait que par l'orifice des voies nasales, devaient *à priori* montrer dans l'appareil des muscles dilatateurs de l'évent, qui est lui-même une modification profonde de l'orifice nasal externe des animaux terrestres, et dans le nerf facial qui s'y distribue, une disposition à part qui fût un type propre.

Ce fait anatomique, cette expérience toute faite qui devait infirmer ou confirmer la spécialité de fonction de la septième paire sur la respiration bucco-nasale, je me borne à les présenter ici comme un fait affirmatif dans le degré le plus absolu : ce tronc nerveux, par une distribution insolite, par son volume, par son retour contre sa direction première qui abandonne les lèvres et le bout du museau, pour se jeter dans l'appareil respirateur de la face ou l'évent, me paraît un fait concluant, *à posteriori,* de la vérité de l'opinion physiologique de Charles Bell, qui assigne au

nerf facial la fonction de présider chez les mammifères terrestres à tous les actes de la face qui ont pour but la production des sons, la dilatation des orifices respiratoires, le nez et la bouche, et subsidiairement l'expression de la face, et chez les cétacés de présider, d'une manière encore plus rigoureuse, à l'acte unique de l'inspiration nasale, la seule qui se fasse chez ces animaux.

Et notre conviction à cet égard est si entière que nous avançons, sans craindre d'être démenti par le fait, que si l'occasion se présentait de couper sur un marsouin échoué vivant ou pris dans des filets, les deux nerfs faciaux, ce qui serait facile par une incision pratiquée perpendiculairement à l'os de la mâchoire inférieure, au-dessous de l'œil, l'animal serait frappé d'une inévitable asphyxie, soit qu'on le laissât à l'air libre sur la plage, ou qu'il fût rendu à son séjour des flots; car, dans l'un et l'autre cas, le cétacé ne pourrait déglutir l'air par sa bouche, rendue inhabile à cet office par l'état de closion de l'isthme du gosier, ni dilater ses orifices nasaux, la seule voie de respiration que la nature lui ait donnée, par le fait de la paralysie des muscles dilatateurs et releveurs des valvules externes et profondes de l'évent.

MÉMOIRE

SUR

LA PROBABILITÉ DES RÉSULTATS MOYENS DES OBSERVATIONS ;

DÉMONSTRATION DIRECTE DE LA RÈGLE DE LAPLACE.

PAR M. JULES BIENAYMÉ,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, INSPECTEUR GÉNÉRAL DES FINANCES.

Il n'est pas possible de s'occuper d'économie publique ou privée, et par conséquent de statistique, sans remarquer bientôt de notables différences entre les résultats des observations, même les plus exactes, et le mieux combinées pour offrir une concordance entière. Pendant longtemps les observateurs, sûrs de leurs expériences, et choqués des contradictions apparentes qu'ils rencontraient, ont voulu en trouver l'explication plus ou moins plausible dans les variations des causes naturelles.

Jacques Bernoulli reconnut, le premier, que la plupart de ces anomalies étaient de simples effets du hasard. Il montra comment on pouvait soumettre au calcul ces effets que l'opinion vulgaire

regarde comme affranchis de toutes règles, et il fonda ainsi sur une base inébranlable cette partie de l'*art des conjectures* qui doit diriger l'observateur dans une classe nombreuse de recherches scientifiques.

Les recherches d'économie sociale ou de statistique appartiennent presque toutes à cette classe remarquable, dont le caractère spécial consiste dans l'usage continuel des moyennes ou des sommes de phénomènes semblables recueillis par des observations multipliées. C'est précisément le rapport qui existe entre l'écart probable de ces moyennes et la multiplicité des observations que J. Bernoulli a signalé.

Moivre perfectionna la découverte de Bernoulli. Mais ces deux grands mathématiciens supposaient connue la possibilité des phénomènes, et ils se bornaient à déduire de la loi de possibilité qu'ils assignaient, l'étendue des écarts dont les observations pouvaient être susceptibles. Ce n'était là qu'une partie de la question, et la partie le moins applicable : car les lois naturelles sont inconnues, et forment précisément l'objet des recherches. Il restait donc à résoudre le problème inverse de celui qui seul suffirait pour rendre à jamais célèbre le nom de Bernoulli.

La solution ne fut donnée que soixante ans plus tard, par Bayes, savant anglais peu connu, sans doute parce qu'une mort trop prompte interrompit ses travaux, mais qui paraît avoir possédé à un très-haut degré les qualités du géomètre. Bayes parvint, d'une manière que Laplace a jugée *fine et très-ingénieuse, quoique un peu embarrassée*, à déterminer, dans le cas de deux événements dont l'un ou l'autre doit nécessairement se présenter à chaque observation, la probabilité que les possibilités indiquées par des expériences déjà faites sont réellement comprises dans des limites données.

Bernoulli avait prouvé que, quand les possibilités respectives de deux événements sont, par exemple, dans le rapport de $\frac{3}{5}$ à $\frac{2}{5}$ il y a plus de mille à parier contre un que, sur 25 550 épreuves, le premier se présentera plus de 14 819 fois et moins de 15 841;

nombres qui placeraient la possibilité observée du premier entre $\frac{31}{50}$ et $\frac{29}{50}$, et la possibilité observée du second entre $\frac{19}{50}$ et $\frac{21}{50}$.

Bayes prouva réciproquement que, si dans 25 550 expériences on observe le rapport de $\frac{5}{5}$ à $\frac{2}{5}$ entre les nombres de répétition de deux événements, c'est-à-dire si le premier a été observé 15 330 fois, et le second 10 220 fois, il y a plus de mille à parier contre un que les possibilités réelles tombent, la première entre $\frac{505}{500}$ et $\frac{295}{500}$, la seconde entre $\frac{195}{500}$ et $\frac{205}{550}$. Ces fractions conduiraient respectivement à 15 588, ou à 15 072 répétitions du premier événement, et à 9 962, ou 10 428 du second.

Il n'était pas inutile de rappeler ces faits. Ils indiquent clairement la nature des questions que soulèvent les écarts remarqués entre les observations. Ils montrent aussi quelle lenteur avait présidé aux progrès de cette branche de l'analyse des hasards, et à quel point elle s'était arrêtée, avant l'impulsion immense que la théorie reçut du génie de Laplace vers la fin du siècle dernier.

Laplace se proposa dans toute sa généralité le problème suivant :

Quelle est la probabilité de l'écart dont peut être affectée une moyenne prise entre un grand nombre quelconque de valeurs différentes d'un phénomène ou d'un événement, données par autant d'observations, lorsqu'on ignore la loi des probabilités des écarts partiels de chaque observation?

Laplace résolut complétement cette question difficile, et il a fait les plus belles applications de sa méthode dans son admirable *Théorie analytique des probabilités.*

La règle à laquelle il est parvenu est fort simple. Elle prescrit de diviser par le nombre des observations la racine carrée du double de la somme des carrés des différences entre le résultat de chaque observation et la moyenne de toutes. Si l'on représente ensuite les limites de l'écart que l'on veut considérer, par le produit de la constante ainsi obtenue et d'un facteur variable; la probabilité que l'écart réel est renfermé dans ces limites se lira sans peine dans une table calculée d'avance pour toutes les valeurs du facteur

variable, table qui reste la même pour une foule de questions diverses.

Effectivement alors la probabilité s'exprime par une transcendante très-connue, dont une table a été publiée par Kramp pour résoudre une question bien différente, le calcul des réfractions astronomiques. Au reste, il n'est besoin la plupart du temps que de quatre ou cinq valeurs de cette transcendante; et l'on peut les conserver dans la mémoire.

Cette règle est si facile, si générale, si singulière, que jamais elle ne manquera d'exciter l'étonnement au premier abord. Bien plus, quand on la fait connaître aux personnes peu versées dans les mathématiques, il leur semble que ce soit une révélation d'une sorte de mystère, d'une propriété surnaturelle du genre de celles que l'antiquité attribuait aux fameux nombres de Pythagore : ces personnes ne peuvent s'empêcher de voir quelque chose de plus qu'humain dans l'algèbre, capable d'arracher de tels secrets à l'aveugle hasard.

Les hommes plus habitués aux ressources de la haute analyse trouvent un autre sujet de surprise dans l'artifice dont s'est servi l'illustre inventeur de cette règle, pour éliminer du calcul les quantités dépendantes de la loi inconnue des probabilités des écarts des observations. Cet artifice peu ordinaire laisse planer quelque difficulté sur le degré d'exactitude de l'emploi de la constante déduite des carrés des différences entre les observations et la moyenne. Il suffira de rappeler à cet égard que la somme de ces carrés paraît substituée à la somme des produits des carrés de toutes les erreurs possibles par leurs probabilités, somme à laquelle la première n'est pas égale rigoureusement, mais dont elle diffère probablement très-peu quand le nombre des observations est assez grand.

Laplace a cru nécessaire d'éclaircir l'usage de cette substitution dans le *Premier Supplement à la Théorie des probabilités*. Les expressions consignées dans ce supplément et dans les diverses éditions de l'*Essai sur les probabilités* montrent l'impor-

tance qu'il attachait à dissiper la faible incertitude que pouvait entrainer son analyse.

Depuis, M. Poisson a repris, avec l'extrême lucidité qui lui est habituelle, ce passage difficile de la théorie de Laplace, et il a démontré comment disparaît la différence entre la constante véritable et la constante observée, à mesure que le nombre des expériences augmente.

L'étude des beaux mémoires de M. Poisson, sur ce sujet, insérés dans la *Connaissance des temps,* et d'un autre mémoire du tome IX de l'Académie des sciences, dans lequel les procédés les plus délicats de cette analyse subtile sont appliqués par lui à l'examen du rapport des naissances des filles et des garçons, cette étude approfondie a fait penser qu'il existait quelque moyen de dissiper entièrement le léger nuage qui pouvait subsister encore sur la règle importante donnée par Laplace.

Si l'on veut bien considérer que cette règle doit servir de balance, en quelque sorte, pour peser l'influence qu'on peut accorder à la plupart des observations sur lesquelles se fonde l'économie politique; qu'elle est susceptible, comme l'a montré son auteur, de s'étendre aux faits mêmes qui tiennent à la partie intelligente, à la partie morale de l'homme, et par conséquent à la philosophie; que, d'ailleurs, les sciences physiques proprement dites ont plus d'une occasion d'y recourir; on trouvera peut-être quelque intérêt à voir établir directement et surtout sans cette élimination habile, mais pénible à bien saisir, dont Laplace s'est servi si heureusement, l'existence de la constante sur laquelle la règle repose tout entière. Tel est le but de ce mémoire.

Les procédés qui vont être employés pour y parvenir ne sont, au reste, que ceux-là même dont Laplace a enseigné l'usage. Il faut le répéter encore, c'est dans la *Théorie des probabilités* et dans les développements si remarquables donnés par M. Poisson, que les moyens de démonstration ont été puisés.

Une réflexion assez naturelle y a conduit. Pour qu'elle soit facilement saisie, il est nécessaire de se rappeler que si un évé-

nement a été observé p fois sur un grand nombre $p + p_1$ d'épreuves, la probabilité que la possibilité de cet événement est comprise dans les limites

$$(1) \qquad \frac{p}{p+p_1} \pm c\sqrt{\frac{2pp_1}{(p+p_1)^3}}$$

est égale à l'intégrale définie

$$(2) \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^c e^{-t^2}dt.$$

Cela posé, il était aisé d'apercevoir que demander la probabilité de l'étendue de l'écart entre le rapport $\frac{p}{p+p_1}$, et le rapport réel de possibilité qui se manifesterait s'il était donné à l'homme de multiplier indéfiniment les épreuves, c'est demander, pour un cas très-particulier, la probabilité de l'exactitude d'une certaine moyenne fournie par les observations.

Qu'on représente en effet par γ, γ_1 deux fonctions arbitraires des événements observés, relatives respectivement, l'une à l'événement A, qui s'est présenté p fois; et l'autre à l'événement contraire B, qui a eu lieu p_1 fois; si l'on nomme de plus x, x_1, les possibilités inconnues de ces deux événements; rien n'empêche de concevoir que les $(p+p_1)$ épreuves aient eu pour objet de déterminer la valeur de la quantité

$$v = \gamma x + \gamma_1 x_1.$$

En prenant donc pour cette quantité la moyenne des produits des fonctions γ, γ_1, multipliées respectivement par les nombres p, p_1 des événements auxquelles elles se rapportent, on pourra demander la probabilité que la valeur

$$v' = \frac{\gamma p + \gamma_1 p_1}{p + p_1}$$

ne s'éloigne pas de la valeur réelle v d'une quantité donnée.

Si maintenant on suppose

$$\gamma = 1, \qquad \gamma_1 = 0,$$

la moyenne v' se réduit à $\frac{p}{p+p_1}$, la quantité v se réduit à x; et il est visible que la probabilité qui aura été trouvée sera la probabilité de la différence entre le rapport $\frac{p}{p+p_1}$ et la valeur réelle de x.

Mais la probabilité de cette différence est donnée par les formules (1) et (2), comme Laplace l'a démontré. On peut donc conclure que ces formules ne sont qu'un cas particulier pour $\gamma = 1$, $\gamma_1 = 0$, de celles qui doivent exprimer la probabilité des écarts possibles entre la moyenne obtenue par l'observation et la vraie valeur de l'expression $(\gamma x + \gamma_1 x_1)$.

Il est donc de toute nécessité que le facteur

$$\sqrt{\frac{2pp_1}{(p+p_1)^3}},$$

qui entre dans la formule (1), soit précisément la constante singulière introduite par Laplace; dans laquelle les valeurs données par l'observation sont p fois 1, p_1 fois 0.

Pour en acquérir la certitude, on posera

$$p + p_1 = n, \qquad \text{d'où} \qquad p_1 = n - p,$$

et le radical ci-dessus pourra visiblement s'écrire :

$$\frac{1}{n}\sqrt{2\left\{p\left(1-\frac{p\times 1+p_1\times 0}{n}\right)^2+p_1\left(0-\frac{p\times 1+p_1\times 0}{n}\right)^2\right\}}$$

On retrouve donc précisément le quotient de la racine du double de la somme des carrés des différences entre les valeurs observées (p fois 1, p_1 fois 0) et la moyenne $\frac{p\times 1+p_1\times 0}{n}$, par

le nombre des observations : et le radical $\sqrt{\frac{2pp_1}{(p+p_1)^3}}$ n'est autre que la constante de Laplace.

L'introduction de ce radical dans la formule (1) n'est pas seulement probable : elle résulte, on le sait, d'une analyse certaine. Il était donc permis de prévoir, d'après ce cas particulier, que la valeur de la constante n'était pas moins susceptible d'être calculée d'une manière certaine dans le cas général.

Effectivement la décomposition de $\sqrt{\frac{2pp_1}{(p+p_1)^3}}$ une fois faite, la démonstration rigoureuse de la règle de Laplace n'exige plus que des calculs assez simples, quoique un peu longs.

La marche en sera mieux suivie, si l'on commence par examiner le cas dont il vient d'être question, et qui ne comporte que deux événements exclusifs.

Conservant les mêmes dénominations,

$$p+p_1 = n, \qquad x+x_1 = 1,$$

et il s'agit de déterminer la probabilité que la quantité inconnue

$$v = \gamma x+\gamma_1 x_1, \tag{3}$$

est comprise entre des limites données a' et a.

Désignant par C le coefficient du terme du binome $(x+(1-x))^n$ dont les exposants sont p et p_1, on sait que la probabilité de l'événement composé de p répétitions de l'événement A, et de p_1 de l'événement B, est

$$Cx^p(1-x)^{p_1}.$$

La relation (3) donne

$$x = \frac{v-\gamma_1}{\gamma-\gamma_1}, \qquad 1-x = \frac{\gamma-v}{\gamma-\gamma_1}.$$

Donc dans l'hypothèse d'une valeur assignée à v, la probabilité de l'événement composé sera

$$C\left(\frac{v-\gamma_1}{\gamma-\gamma_1}\right)^p\left(\frac{\gamma-v}{\gamma-\gamma_1}\right)^{p_1}$$

La probabilité de l'hypothèse d'une valeur de v sera par suite

$$\frac{(v-\gamma_1)^p(\gamma-v)^{p_1}dv}{\int_{\gamma}^{\gamma_1}(v-\gamma_1)^p(\gamma-v)^{p_1}dv};$$

l'intégrale étant prise pour toutes les valeurs possibles de v, c'est-à-dire depuis $v=\gamma$ jusqu'à $v=\gamma_1$, si $\gamma_1>\gamma$.

Enfin, la probabilité que la valeur réelle de v est comprise dans les limites a' et a, se trouvera en intégrant l'expression précédente entre ces limites.

Cette probabilité est

$$(4)\qquad \frac{\int_{a'}^{a}(v-\gamma_1)^p(\gamma-v)^{p_1}dv}{\int_{\gamma}^{\gamma_1}(v-\gamma_1)^p(\gamma-v)^{p_1}dv}.$$

On connaît la méthode générale que Laplace a inventée pour obtenir la valeur approchée des intégrales de cette espèce. En la suivant, il faut poser

$$(5)\qquad v=\frac{p\gamma+p_1\gamma_1}{n}+z,\qquad dv=dz,$$

et z représentera l'écart entre la valeur réelle de v et la moyenne tirée des observations.

Chacun des termes de la probabilité (4) prendra la forme

$$(\gamma-\gamma_1)^n\frac{p^p p_1^{p_1}}{n^n}\int_{b_1}^{b}\left(1+\frac{nz}{p(\gamma-\gamma_1)}\right)^p\left(1-\frac{nz}{p_1(\gamma-\gamma_1)}\right)^{p_1}dz,$$

b_1 et b étant les limites de z, correspondantes aux limites a' et a de v.

Développant les facteurs $\left(1+\frac{nz}{p(\gamma-\gamma_1)}\right)$ et $\left(1-\frac{nz}{p_1(\gamma-\gamma_1)}\right)$ en séries exponentielles, et désignant à l'ordinaire par e la base des logarithmes Népériens,

$$(6)\qquad \left(1+\frac{nz}{p(\gamma-\gamma_1)}\right)^p = e^{pL\left(1+\frac{nz}{p(\gamma-\gamma_1)}\right)}$$

$$= e^{\frac{nz}{(\gamma-\gamma_1)}-\frac{1}{2}\frac{n^2z^2}{p(\gamma-\gamma_1)^2}+\frac{1}{3}\frac{n^3z^3}{p^2(\gamma-\gamma_1)^3}-\frac{1}{4}\frac{n^4z^4}{p^3(\gamma-\gamma_1)^4}+\text{etc.}},$$

$$\left(1-\frac{nz}{p_1(\gamma-\gamma_1)}\right)^{p_1} = e^{p_1L\left(1-\frac{nz}{p_1(\gamma-\gamma_1)}\right)}$$

$$= e^{-\frac{nz}{(\gamma-\gamma_1)}-\frac{1}{2}\frac{n^2z^2}{p_1(\gamma-\gamma_1)^2}-\frac{1}{3}\frac{n^3z^3}{p_1^2(\gamma-\gamma_1)^3}-\frac{1}{4}\frac{n^4z^4}{p_1^3(\gamma-\gamma_1)^4}-\text{etc.}},$$

et l'intégrale deviendra

$$(\gamma-\gamma_1)^n\frac{p^pp_1^{p_1}}{n^n}\int_{b_1}^{b}dze^{\left\{-\frac{n^2z^2}{2(\gamma-\gamma_1)^2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}\right)+\frac{n^3z^3}{3(\gamma-\gamma_1)^3}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p_1^2}\right)\right.}$$
$$\left.-\frac{n^4z^4}{4(\gamma-\gamma_1)^4}\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p_1^3}\right)+\text{etc.}\right\}$$

Ici l'on posera seulement

$$\frac{n^2z^2}{2(\gamma-\gamma_1)^2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}\right)=t^2,$$

d'où

$$(7)\qquad z=t\sqrt{\frac{2pp_1(\gamma-\gamma_1)^2}{n^2}},\quad dz=dt\sqrt{\frac{2pp_1(\gamma-\gamma_1)^2}{n^2}}$$

La transformation usitée depuis Laplace consiste à représenter par t^2 toute la série exponentielle en z : on en déduit une valeur de z, ordonnée suivant les puissances de t, et par là on transporte aux limites de z une partie des difficultés de l'analyse. Mais comme il s'agit ici de fixer rigoureusement la valeur de la constante qui

exprime ces limites, il paraît préférable de les débarrasser de cette expression de z en une série dont on n'obtient les termes qu'avec peine par le retour des suites. Par la transformation (7), tout ce qu'il peut y avoir de délicat et de difficile dans l'approximation est entièrement concentré dans l'intégrale et dans la valeur de la probabilité.

On arrive ainsi à l'expression

$$(8)\qquad (\gamma-\gamma_1)^{n+1}\frac{p^p p_1^{p_1}}{n^n}\sqrt{\frac{2pp_1}{n^3}}\int_{c'}^{c} dte^{-t^2}\left\{\begin{array}{l} -t^2+\dfrac{4(p_1-p)}{3\sqrt{2npp_1}}t^3-\dfrac{p^5+p_1^5}{n^2pp_1}t^4 \\ +\dfrac{8(p^2+p_1^2)(p_1-p)}{5\,npp_1\sqrt{2\,npp_1}}t^5-\dfrac{4(p^5+p_1^5)}{3\,n^5p^2p_1^2}t^6+\text{etc}\end{array}\right\}$$

c' et c représentant les limites de t.

Les facteurs constants placés hors du signe $\int$ seront supprimés dans le reste du calcul, car ils multiplieraient les deux termes de la probabilité (4). Développant la partie de l'exponentielle qui contient les puissances supérieures à la 2^e, au moyen de la formule connue

$$e^m = 1+m+\frac{m^2}{1.2}+\frac{m^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

l'intégrale cherchée peut s'écrire comme il suit :

$$(9)\qquad \int_{c'}^{c} dt\,e^{-t^2}\left\{1+\frac{4(p_1-p)}{3\sqrt{2npp_1}}t^3-\frac{p^5+p_1^5}{n^2pp_1}t^4+\frac{8(p^2+p_1^2)(p_1-p)}{5\,npp_1\sqrt{2npp_1}}t^5 -\left(\frac{4(p^5+p_1^5)}{3n^5p^2p_1^2}-\frac{4(p-p_1)^2}{9npp_1}\right)t^6+\text{etc.}\right\}$$

Il est visible que les coefficients des termes placés entre parenthèses seront de l'ordre des puissances de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, sauf quelques circonstances spéciales dont il n'y a pas lieu de s'occuper ici.

De plus, en prenant $c' = -c$, les termes qui contiennent des puissances impaires de t se détruiront, et il ne restera que

$$(10) \qquad 2\int_0^t dt\, e^{-t^2}\left\{1 - \frac{p^5+p_1^5}{n^2pp_1}t^4 - \text{etc.}\right\}$$

Mais attendu que

$$\int_0^t dt\, e^{-t^2}t^{2m} = -\frac{e^{-t^2}}{2}\left(t^{2m-1} + \frac{2m-1}{2}t^{2m-3} + \ldots\ldots\right.$$
$$\left. \ldots + \frac{2m-1}{2}\cdot\frac{2m-3}{2}\ldots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}t\right) + \frac{2m-1}{2}\ldots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^t e^{-t^2}dt,$$

l'intégrale (10) se partagera en deux parties,

$$(11)\ 2\left\{1 - \tfrac{5}{4}\frac{p^5+p_1^5}{n^2pp_1} - \text{etc.}\right\}\int_0^c e^{-t^2}dt + \frac{e^{-c^2}}{2}\left\{2\frac{p^5+p_1^5}{n^2pp_1}\left(c^3 + \tfrac{5}{2}c\right) + \text{etc.}\right\}$$

La valeur de $\dfrac{e^{-c^2}}{2}$, toujours fractionnaire, est encore pour

	$c = 1$	de	0, 18 393 97
mais	$c = 2$	la réduit à	0, 00 915 78
	$c = 2 + \frac{1}{2}$	à	0, 00 096 52
et quand	$c = 3$	elle tombe à	0, 00 006 17

La partie de la série multipliée par ce facteur très-petit, partie dont les termes sont déjà divisés par les puissances du grand nombre $\sqrt{n}$, sera donc très-convergente à l'origine : et quand n sera très-grand, on pourra évidemment la négliger sans erreur sensible.

Le numérateur de la probabilité (4) se réduira ainsi à

$$(12) \qquad 2\left(1 - \tfrac{5}{4}\frac{p^5+p_1^5}{n^2pp_1} - \text{etc.}\right)\int_0^c e^{-t^2}dt.$$

Le dénominateur se trouve en intégrant l'expression (9), pour toutes les valeurs possibles de t.

γ et γ_1 étant les limites extrêmes de v, on conclura des relations (5) et (7) les limites correspondantes de t:

$$(13) \qquad l = \sqrt{\frac{pn}{2p_1}} \qquad l' = -\sqrt{\frac{p'n}{2p}}.$$

Ces deux quantités sont de l'ordre $\sqrt{n}$, et par conséquent très-grandes; mais

$$\tfrac{1}{2}e^{-t^2}t^m = 0$$

quand $t = \infty$; et cette expression qui devient d'autant plus petite que t est plus grand à partir de $t = \sqrt{\frac{m}{2}}$, est généralement fort petite, car on a pour

$$t = 3 + \tfrac{1}{2} \qquad \tfrac{1}{2}e^{-\frac{49}{4}} = 0{,}00\ 000\ 239\ 255$$
$$t = 4 \qquad \tfrac{1}{2}e^{-16} = 0{,}00\ 000\ 005\ 626$$
$$t = 5 \qquad \tfrac{1}{2}e^{-25} = 0{,}00\ 000\ 000\ 000\ 694.$$

De cette considération il résulte que si les limites (13), qui généralement sont de l'ordre très-élevé $\sqrt{n}$, excèdent seulement les premiers nombres, les termes fournis par l'intégration et multipliés par $\frac{1}{2}e^{-t^2}$ décroîtront bien plus rapidement encore au dénominateur qu'au numérateur, même pour des puissances de t assez élevées. Au degré où l'on porte ordinairement l'approximation, il n'y aura donc aucune erreur si l'on néglige ces termes, et l'intégrale se réduira à

$$(14) \qquad \left(1 - \tfrac{5}{4}\frac{p^3 + p_1^3}{n^2 p p_1} - \text{etc.}\right)\int_{l'}^{l} e^{-t^2}\,dt.$$

On sait d'ailleurs que pour peu que la valeur absolue des limites l et l' soit supérieure à 4, on peut les étendre jusqu'à l'infini; puisque l'on a pour

$$(15) \quad t = 4 \qquad \int_4^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 0{,}00\ 000\ 001\ 366$$

$$(16) \quad t = 5 \qquad \int_5^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 0{,}00\ 000\ 000\ 000\ 136\ 254.$$

Cette partie extrême de l'intégrale entière, qui devient 10 000 fois plus petite quand t passe de 4 à 5, diminue bien plus encore de $t = 5$ à $t = 6$. Il suffirait donc que le plus petit des nombres p et p_1 atteignît 50, pour qu'on pût poser sans erreur sensible

$$\int_{t'}^{t} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}, \tag{17}$$

π représentant le rapport de la circonférence au diamètre.

L'expression (14) est ramenée par cette approximation excessive à

$$\left(1 - \tfrac{5}{4} \frac{p^5 + p_1^5}{n^2 p p_1} - \text{etc.}\right) \sqrt{\pi},$$

et la probabilité (4) à l'intégrale définie

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-t^2} dt. \tag{18}$$

C'est la probabilité que la valeur de $v = \gamma x + \gamma_1 x_1$ est comprise entre les limites a' et a, qui, à cause des relations (5) et (7), deviennent

$$\frac{\gamma p + \gamma_1 p_1}{n} \pm c \sqrt{\frac{2pp_1(\gamma - \gamma_1)^2}{n^3}}. \tag{19}$$

L'expression (18) est également la probabilité que la différence entre la valeur réelle de v et le résultat des observations, ou l'écart de ces observations, se renferme entre

$$\pm c \sqrt{\frac{2pp_1(\gamma - \gamma_1)^2}{n^3}}. \tag{20}$$

Il est aisé de voir que

$$\frac{pp_1(\gamma - \gamma_1)^2}{n} = \frac{pp_1^2 + p_1 p^2}{n^2} (\gamma - \gamma_1)^2 = p\left(\frac{p_1(\gamma - \gamma_1)}{n}\right)^2 + p_1\left(\frac{p(\gamma - \gamma_1)}{n}\right)^2$$

$$= p\left\{\frac{(n-p)\gamma - p_1\gamma_1}{n}\right\}^2 + p_1\left\{\frac{(n-p_1)\gamma_1 - p\gamma}{n}\right\}^2$$

ce qui change l'expression (20) en

$$(21) \qquad \pm\frac{c}{n}\sqrt{2\left\{p\left(\gamma-\frac{p\gamma+p_1\gamma_1}{n}\right)^2+p_1\left(\gamma_1-\frac{p\gamma+p_1\gamma_1}{n}\right)^2\right\}}$$

On reconnaît sous le radical la somme des carrés des différences entre la moyenne et toutes les observations; ainsi, il est prouvé que, dans le cas de deux événements simples, la constante qui détermine l'étendue des écarts est précisément et certainement celle que le génie de Laplace lui a fait découvrir par une voie si différente.

La forme (20), sous laquelle s'offre cette constante, doit être remarquée : elle se représente sans cesse, quel que soit le nombre des événements simples. C'est d'ailleurs une troisième manière de calculer la constante. Elle peut être réunie à celles qui ont été données par Laplace. La forme (21), comme l'a fait observer M. Poisson, est la plus commode. Mais celle-ci

$$(22) \qquad \pm\sqrt{\frac{2}{n}\left\{\left(\frac{p\gamma^2+p_1\gamma_1^2}{n}\right)-\left(\frac{p\gamma+p_1\gamma_1}{n}\right)^2\right\}},$$

où n'entre plus que la moyenne des carrés des fonctions données par les observations, moins le carré de la moyenne, est souvent utile dans les applications, quand les fonctions γ, γ_1 ne varient pas. Peut-être se trouvera-t-il des circonstances où la forme (20) le sera aussi.

Les développements que vient de recevoir l'analyse du cas particulier de deux événements permettront d'abréger certaines parties de la démonstration, quand il s'agira de subdivisions plus multipliées du nombre total des épreuves entre les divers phénomènes observés.

S'il se présentait trois phénomènes ou événements A, B, C, on désignerait encore par γ, γ_1, γ_2, les arbitraires qui les caractérisent, par x, x_1, x_2, les possibilités inconnues, par p, p_1, p_2, les nombres de répétitions de chaque événement simple sur le

nombre n d'épreuves, et l'on aurait à calculer la probabilité des valeurs de l'expression

$$v = \gamma x + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2, \tag{23}$$

comprises entre des limites données a' et a; pour laquelle

$$p + p_1 + p_2 = n, \quad x + x_1 + x_2 = 1. \tag{24}$$

Si x, x_1, x_2 étaient connues, la probabilité de l'événement composé de p fois l'événement A, p_1 fois l'événement B, p_2 fois l'événement C, serait

$$\mathrm{K} x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2},$$

en désignant par K le coefficient du terme du polynome $(x + x_1 + x_2)^n$ dans lequel les exposants sont p, p_1, p_2.

La probabilité d'une hypothèse sur x, x_1, x_2, c'est-à-dire la probabilité d'une valeur de v, sera donc

$$\frac{x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}}{\Sigma x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}}$$

le signe Σ indiquant la somme de toutes les valeurs possibles du produit qu'il affecte.

Les valeurs de v devant être comprises entre certaines limites a' et a, la somme des probabilités de ces valeurs sera

$$\frac{\Sigma_{a'}^{a} x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}}{\Sigma x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}},$$

le signe Σ du numérateur n'indiquant que les systèmes de valeurs de x, x^1, x_2 capables de donner pour v une valeur renfermée entre a' et a.

D'après les relations (23) et (24), x et x_1 sont fonctions de v

et x_2; et il en résulte que toutes les valeurs possibles de v sont comprises entre γ et γ_2, l'arbitraire γ étant la plus petite et γ_2 la plus grande des trois. On obtiendra donc la probabilité ci-dessus, en intégrant l'expression

$$(25) \qquad \frac{{}_2\int_{\alpha}^{\alpha'} dv dx_2 x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}}{{}_2\int_{\gamma}^{\gamma_2} dv dx_2 x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}}.$$

Les limites dont le signe $\int$ est affecté se rapportent à la seule variable v; et le nombre 2, placé à la gauche de ce signe, rappelle qu'il faut intégrer deux fois.

La question est ainsi ramenée à la détermination de deux intégrales définies doubles, et l'on est dès lors complétement certain que la solution est indépendante de la loi de probabilité des divers événements simples.

x et x_1 étant fonctions de x_2 et v, pourraient être éliminées sur-le-champ. Il resterait à trouver la valeur de l'intégrale

$$(26) \quad {}_2\int_{\alpha}^{\alpha'} dv dx_2 \left(\frac{v-\gamma_1-x_2(\gamma_2-\gamma_1)}{\gamma-\gamma_1}\right)^p \left(\frac{v-\gamma-x_2(\gamma_2-\gamma)}{\gamma_1-\gamma}\right)^{p_1} x_2^{p_2};$$

Mais il sera bien plus simple de poser d'abord, par extension de la méthode de Laplace,

$$(27) \quad x = \frac{p}{n} + z, \quad x_1 = \frac{p_1}{n} + z_1, \quad x_2 = \frac{p_2}{n} + z_2,$$

$$v = \frac{p\gamma + p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2}{n} + u;$$

on en déduira

$$(28) \quad z + z_1 + z_2 = 0, \qquad \gamma z + \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 = u.$$

Si l'on appelle b' et b les limites de u, l'intégrale (26) se changera en

$$\frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{n^n} {}_2\int_{b}^{b'} \left(1 + \frac{nz}{p}\right)^p \left(1 + \frac{nz_1}{p_1}\right)^{p_1} \left(1 + \frac{nz_2}{p_2}\right)^{p_2} dudz,$$

et passant aux exponentielles, en

$$(29)\qquad \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{n^n}\int_b^b du dz_2\, e^{\left\{\begin{array}{l} +n(z+z_1+z_2)-\frac{n^2}{2}\left(\frac{z^2}{p}+\frac{z_1^2}{p_1}+\frac{z_2^2}{p_2}\right) \\ +\frac{n^3}{3}\left(\frac{z^3}{p^2}+\frac{z_1^3}{p_1^2}+\frac{z_2^3}{p_2^2}\right)-\text{etc.}\end{array}\right\}}$$

La première des relations (28) rend nul le terme en n, dans l'exposant de e. On représentera par S la serie qui suit le terme en n^2, et l'intégrale à déterminer deviendra plus commode pour le calcul,

$$(30)\qquad \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{n^n}\int_b^b du dz_2\, e^{-\frac{n^2}{2}\left(\frac{z^2}{p}+\frac{z_1^2}{p_1}+\frac{z_2^2}{p_2}\right)+\mathrm{S}}.$$

On peut à présent faire usage des relations (28) pour éliminer z et z_1. Elles donnent

$$(31)\qquad z=\frac{u-z_2(\gamma_2-\gamma_1)}{\gamma-\gamma_1},\qquad z_1=\frac{u-z_2(\gamma_2-\gamma)}{\gamma_1-\gamma}.$$

Substituées dans l'exposant de e, ces valeurs conduisent à

$$\mathrm{S}-\frac{n^2}{2}\left\{\frac{z_2^2}{p_2}+\frac{(u-z_2(\gamma_2-\gamma))^2}{p_1(\gamma_1-\gamma)^2}+\frac{(u-z_2(\gamma_2-\gamma_1))^2}{p(\gamma-\gamma_1)^2}\right\}$$
$$=\mathrm{S}-\frac{n^2}{2(\gamma-\gamma_1)^2}\left\{z_2^2\left(\frac{(\gamma_1-\gamma)^2}{p_2}+\frac{(\gamma-\gamma_2)^2}{p_1}+\frac{(\gamma_2-\gamma_1)^2}{p}\right)-2uz\left(\frac{\gamma_2-\gamma}{p_1}+\frac{\gamma_2-\gamma_1}{p}\right)\right.$$
$$\left.+u^2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}\right)\right\}.$$

On simplifie le calcul en posant

$$(32)\quad (\gamma-\gamma_1)^2=\mathrm{A}_1^2,\qquad \frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{p}+\frac{(\gamma_2-\gamma)^2}{p_1}+\frac{(\gamma-\gamma_1)^2}{p_2}=\mathrm{A}_2^2$$
$$u\left(\frac{\gamma_2-\gamma}{p_1}+\frac{\gamma_2-\gamma_1}{p}\right)=\mathrm{B}_2\qquad u\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}\right)=\mathrm{C}_2,$$

et l'intégrale (30) se réduit à

$$(33)\quad \frac{p^{p}p_1^{p_1}p_2^{p_2}}{n^{n}}\int_{b'}^{b} du dz_2\, e^{S' - \frac{n^2}{2A_1^2}(A_2^2 z_2^2 - 2B_2 z_2 + C_2)}.$$

S′ représentant la suite de termes en z^3, u^3, etc., qu'il serait peu utile de développer.

Mais il est important de ne pas oublier que chacun de ces termes est multiplié par un facteur tel que $\frac{n^3}{p^2}$, $\frac{n^4}{p^3}$, etc., suivant le degré des variables qu'il pourra renfermer, et qu'ainsi tous ces termes sont de l'ordre n.

Sous cette forme (33), on aperçoit déjà que l'intégrale prise par rapport à z_2, sera connue si les limites de z sont assez grandes.

En complétant le carré dans l'exposant de e, et faisant

$$(54)\quad y = \frac{n}{A_1\sqrt{2}}\left(A_2 z_2 - \frac{B_2}{A_2}\right),\quad z_2 = \frac{A_1\sqrt{2}}{nA_2}y + \frac{B_2}{A_2},$$

$$dz_2 = \frac{A_1\sqrt{2}}{A_2 n}\,dy;$$

on en tire

$$\frac{n^2}{2A_1^2}(A_2^2 z_2^2 - 2B_2 z_2 + C_2) = y^2 + \frac{n^2}{2A_1^2}\left(C_2 - \frac{B_2^2}{A_2^2}\right),$$

substituant ces valeurs, on obtiendra

$$(35)\quad \frac{p^{p}p_1^{p_1}p_2^{p_2}}{n^{n}}\,\frac{A_1\sqrt{2}}{nA_2}\int_{b'}^{b} du dy e^{-y^2 - \frac{n^2}{2A_1^2}\left(C_2 - \frac{B_2^2}{A_2^2}\right) + S''},$$

S″ désignant l'expression de S′ en y.

Si l'on examine à présent la quantité

$$\frac{1}{A_1^2}\left(C_2 - \frac{B_2^2}{A_2^2}\right) = \frac{1}{A_2^2}\left(\frac{C_2A_2^2 - B_2^2}{A_1^2}\right)$$

qui est fonction de u seulement, les relations (32) donneront

$$A_2^2 = \frac{1}{p_2} A_1^2 + \frac{(\gamma_2-\gamma)^2}{p_1} + \frac{(\gamma_2-\gamma_1)^2}{p}, \qquad C_2 = u^2 \frac{n-p_2}{pp_1},$$

partant

$$C_2 A_2^2 = u^2 \frac{n}{pp_1p_2} A_1^2 - u^2 \left\{ \frac{A_1^2}{pp_1} - \frac{n-p_2}{pp_1} \left(\frac{(\gamma_2-\gamma_1)^2}{p} + \frac{(\gamma_2-\gamma)^2}{p_1} \right) \right\},$$

$$B_2^2 = u^2 \left\{ \frac{(\gamma_2-\gamma)^2}{p_1^2} + \frac{(\gamma_2-\gamma_1)^2}{p^2} + 2\frac{(\gamma_2-\gamma)(\gamma_2-\gamma_1)}{pp_1} \right\}.$$

Mais le double produit

$$2(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_2-\gamma) = (\gamma_2-\gamma)^2 + (\gamma_2-\gamma_1)^2 - ((\gamma_2-\gamma)-(\gamma_2-\gamma_1))^2$$
$$= (\gamma_2-\gamma)^2 + (\gamma_2-\gamma_1)^2 - (\gamma_1-\gamma)^2.$$

On a ainsi

$$B_2^2 = u^2 \left\{ \frac{(\gamma_2-\gamma)^2}{p_1^2} + \frac{(\gamma_2-\gamma_1)^2}{p^2} + \frac{(\gamma_2-\gamma)^2}{p_1 p} + \frac{(\gamma_2-\gamma_1)^2}{pp_1} - \frac{(\gamma_1-\gamma)^2}{pp_1} \right\}$$
$$= \frac{u^2}{pp_1} \left\{ \frac{(\gamma_2-\gamma)^2(p+p_1)}{p_1} + \frac{(\gamma_2-\gamma_1)^2(p+p_1)}{p} - (\gamma_1-\gamma)^2 \right\}.$$

Observant que les termes positifs sont multipliés par $p+p_1 = n - p_2$, et que le terme négatif est A_1^2,

$$\frac{B_2^2}{u^2} = \frac{(n-p_2)}{pp_1} \left(\frac{(\gamma_2-\gamma)^2}{p_1} + \frac{(\gamma_2-\gamma_1)^2}{p} \right) - \frac{A_1^2}{pp_1}.$$

Il résulte de ces modifications, dont l'ensemble se reproduira plus tard, que

$$C_2 A_2^2 - B_2^2 = u^2 \frac{nA_1^2}{pp_1p_2}, \qquad \frac{n^2}{2A_1^2} \left(C_2 - \frac{B_2^2}{A_2^2} \right) = \frac{n^3u^2}{2p_1pp_2A_2^2}$$

et

$$\frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{n^n} \frac{A_1\sqrt{2}}{A_2\sqrt{n}} \int_{b'}^{b} dudy e^{-y^2 - \frac{n^2}{2A_1^2}\left(C_2 - \frac{B_2^2}{A_2^2}\right) + S''}$$

$$= \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{n^n} \frac{A_1\sqrt{2}}{A_2\sqrt{n}} \int_{b'}^{b} dudy e^{-y^2 - \frac{n^3u^2}{2pp_1p_2A_2^2} + S''};$$

Posant enfin

$$(36)\qquad \frac{n^5u^2}{2pp_1p_2A_2^2} = t^2, \qquad u = t\sqrt{\frac{2pp_1p_2A_2^2}{n^5}},$$

$$du = dt\sqrt{\frac{2pp_1p_2A_2^2}{n^5}},$$

$$S'' = S'''. \quad \text{Limites de } t = c' = c;$$

il reste à intégrer

$$(37)\qquad \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{n^n} \cdot \frac{2A_1\sqrt{pp_1p_2}}{n^2\sqrt{n}} \int_{c'}^{c} dt\,dy\,e^{-y^2-t^2+S''}.$$

Les termes de la série S''' peuvent facilement s'apprécier. Il a été constaté que dans la série S', suivant les puissances de z_2 et u, le coefficient de chaque terme était primitivement de l'ordre n. Lorsque z_2 a été changé (34) en $\left(y\,\frac{A_1\sqrt{2}}{nA_2} - \frac{B_2}{A_2^2}\right)$ et u en $t\sqrt{\frac{2pp_1p_2A_2^2}{n^5}}$, il est visible, d'après les valeurs (32), de A_1, A_2, B_2, que les coefficients de y et de t, dans la série transformée S''', ont acquis le diviseur $\sqrt{n}$, élevé à des puissances égales à la somme des exposants des variables diminuée de deux unités. Le terme en z_2^3 qui était multiplié par $\frac{n^5}{p_2^2}$ a donné

$$\frac{n^3}{p_2^2}\,y^3\,\frac{A_1^5(\sqrt{2})^3}{n^5A_2^5} + \text{etc.} = y^3\,\frac{1}{p_2^2}\,\frac{A_1^3(\sqrt{2})^3}{A_2^5} + \text{etc.},$$

dont le coefficient est manifestement de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{p_2}}$, ou en général de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Il en est de même pour toute autre puissance : si ce n'est que le diviseur $\sqrt{n}$ reçoit des exposants de plus en plus forts.

Il faut donc déjà regarder comme très-petits tous les coefficients de la série S''' quand n est un grand nombre. A cette considération vient s'en ajouter une autre qui va permettre de négliger cette série presque en totalité, sans erreur sensible.

On peut effectivement la faire sortir de l'exposant, puisque toujours

$$e^{S'''} = 1 + S''' + \frac{1}{2}S_{'''}{}^{2} + \text{etc.},$$

et l'intégrale devient

$$(38) \qquad \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{n^n} \frac{2A_1}{n^2} \sqrt{\frac{pp_1p_2}{n}} \int_c^c dt dy e^{-y^2-t^2} (1 + S''' + \text{etc.})$$

Mais alors tout terme tel que

$$\int_c^c e^{-t^2} t^s dt \int_c^\alpha e^{-y^2} dy\, y^{2m} =$$

$$= \int_c^c e^{-t^2} t^s dt \left\{ -\frac{e^{-\alpha^2}}{2} \left(\alpha^{2m-1} + \frac{2m-1}{2} \alpha^{2m-3} + \cdots + \frac{2m-1}{2} \frac{2m-3}{2} \cdots \frac{3}{2} \alpha \right) + \frac{2m-1}{2} \cdots \frac{1}{2} \int_c^\alpha e^{y^2} dy \right\},$$

ou

$$\int_c^c e^{-t^2} t^s dt \int_c^\alpha e^{-y^2} dy\, y^{2m+1} =$$

$$= \int_c^c e^{-t^2} t^s dt \left\{ -\frac{e^{-\alpha^2}}{2} \left(\alpha^{2m} + \frac{2m}{2} \alpha^{2m-2} + \cdots + \frac{2m}{2} \frac{2m-2}{2} \cdots \frac{2}{2} \alpha \right) \right\},$$

et l'on a pu voir précédemment quelle était l'excessive petitesse des suites multipliées par $\frac{-e^{-\alpha^2}}{2}$ dès que α surpasse 4 ou 5. Le seul terme $\int_c^\alpha e^{-y^2} dy$ introduit des valeurs sensibles quand les limites de y sont de signes contraires.

Il est donc palpable que si ces limites, pour une valeur quelconque de t sont considérables, les termes résultant de l'intégration de y deviendront complétement insensibles même pour de hautes puissances de y; car ils n'ont, en général, que de très-

petits coefficients. Il n'y a d'exception que pour les puissances paires dont l'intégration conduit à

$$\frac{2m-1}{2}\cdot\frac{2m-3}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_{\alpha'}^{\alpha}e^{-y^2}dy=\frac{2m-1}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

quand les limites α' et α sont de signes contraires et toujours considérables.

Mais la relation (34), ou $y=\frac{n}{2A_1}\left(zA_2-\frac{B_2}{A_2}\right)$, fait voir que y est constamment de l'ordre très-élevé $\sqrt{n}$, quel que soit u ou t. Il ne pourra donc rester dans la série S''' que les termes dans lesquels y a des exposants pairs et des limites de signes différents.

Il n'est pas inutile de faire remarquer, d'ailleurs, que les puissances impaires de y ou de t disparaissent d'elles-mêmes quand l'intégrale double est prise entre deux valeurs égales et de signes contraires de y et de t. Or c'est une propriété de la fonction désignée par y, d'avoir deux limites très-élevées, le plus souvent de signes contraires pour une valeur de t, et changeant de signe avec t. De sorte que dans l'hypothèse où $c'=-c$, il ne reste de la série que les termes dans lesquels y et t ont à la fois des exposants pairs. Il ne subsiste ainsi aucun terme de la troisième puissance, et les termes de la quatrième ont des coefficients de l'ordre très-petit $\frac{1}{n}$.

La série S''' se trouve donc réduite par l'intégration de y à deux parties : l'une, dont tout ce qui précède explique la convergence excessive pendant un grand nombre de termes, peut être regardée comme nulle dès l'origine, quel que soit t. L'autre partie se compose d'abord de puissances de t qui n'ont, par elles-mêmes, que de très-petits coefficients de l'ordre de $\frac{1}{n}$ et ses puissances, mais qui sont multipliés par des facteurs de la forme

$$\frac{2m-1}{2}\cdot\frac{2m-3}{2}\cdots\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

et peuvent par cette raison acquérir quelque valeur.

En outre, cette seconde partie renferme toutes les puissances paires de t, qui étaient isolées de y, et dont les coefficients sont également très-petits.

Elle conserve donc une convergence rapide dans les premiers termes, sauf quelques cas particuliers.

Quand l'intégration relative à t s'effectue, cette partie seule subsistante se divise encore en deux suites dont la première est affectée du facteur $\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{2}$, qui prend des valeurs assez faibles pour de petites valeurs de t, et accroît ainsi la convergence, au point même de rendre insensible le premier terme si n est un très-grand nombre.

Il suffira donc de considérer la seconde suite, qui ne contient que des facteurs constants, multipliés par $\int_t e^{-t^2} dt$. En représentant par T la somme de ces facteurs, l'intégrale (38) devient définitivement après l'intégration relative à y,

$$(39) \qquad \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{n^n} \frac{2A_1}{n^2} \sqrt{\frac{pp_1p_2}{n^3}} \int_t e^{-t^2} dt \ (\sqrt{\pi} + T).$$

Cette expression donne immédiatement le numérateur de la probabilité cherchée. Le dénominateur exige la connaissance des limites extrêmes de t.

Les relations (27) montrent que v étant compris entre γ et γ_2, u le sera entre

$$(40) \qquad \gamma - \frac{p\gamma + p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2}{n} = -\frac{p_1(\gamma_1 - \gamma) + p_2(\gamma_2 - \gamma)}{n}$$

$$\gamma_2 - \frac{p\gamma + p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2}{n} = \frac{p(\gamma_2 - \gamma) + p_1(\gamma_2 - \gamma_1)}{n}.$$

Les limites extrêmes de t s'en déduisent, et sont

$$(41) \quad t = -\frac{p_1(\gamma_1 - \gamma) + p_2(\gamma_2 - \gamma)}{\sqrt{2pp_1p_2A_1^2}} \sqrt{n}, \quad t = \frac{p(\gamma_2 - \gamma) + p_1(\gamma_2 - \gamma_1)}{\sqrt{2pp_1p_2A_1^2}} \sqrt{n}$$

quantités de l'ordre très-grand $\sqrt{n}$. Ainsi l'intégrale relative à toutes les valeurs possibles de v, remplit à plus forte raison toutes les conditions nécessaires pour négliger sans erreur les suites qui disparaissent dans l'intégrale précédente. On ne conservera que les termes constants multipliés par $\int_l^{l'} e^{-t^2} dt$; et comme on peut étendre à l'infini les limites de cette dernière intégrale, il en ressort pour le dénominateur

$$\frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{n^n} \frac{2A_1}{n^2} \sqrt{\frac{pp_1p_2}{n}} \left(\sqrt{\pi} + T\right) \sqrt{\pi}$$

et pour la probabilité (25)

$$(42) \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-t^2} dt.$$

Les valeurs de v, dont cette intégrale définie représente les chances favorables, sont contenues entre

$$v = \frac{p\gamma + p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2}{n} \pm c \sqrt{\frac{2pp_1p_2A^2_2}{n^5}}$$

ou à cause de la valeur de A^2_2

$$v = \frac{p\gamma + p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2}{n} \pm c \sqrt{2 \frac{pp_1(\gamma - \gamma_1)^2 + p_1p_2(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + p_2p(\gamma_2 - \gamma)^2}{n^5}}$$

et le radical

$$\pm c \sqrt{2 \frac{pp_1(\gamma - \gamma_1)^2 + p_1p_2(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + p_2p(\gamma_2 - \gamma)^2}{n^5}}$$

exprime les écarts de la valeur réelle à la valeur observée.

La constante, qui détermine l'étendue de ces écarts, a conservé la forme symétrique qu'elle avait prise pour deux événements.

Rien n'est plus facile que de la ramener à la forme de Laplace. Multipliant par n les termes sous le radical, on obtient pour le

numérateur

$$npp_1(\gamma-\gamma_1)^2+np_1p_2(\gamma_1-\gamma_2)^2+np_2p(\gamma_2-\gamma)^2,$$

expression qui se transforme en

$$\left.\begin{array}{l} p^2p_1(\gamma-\gamma_1)^2+pp_1^2(\gamma-\gamma_1)^2+pp_1p_2(\gamma-\gamma_1)^2 \\ +p_1^2p_2(\gamma_1-\gamma_2)^2+p_1p_2^2(\gamma_1-\gamma_2)^2+pp_1p_2(\gamma_1-\gamma_2)^2 \\ +p^2p_2(\gamma_2-\gamma)^2+pp_2^2(\gamma_2-\gamma)^2+pp_1p_2(\gamma_2-\gamma)^2 \end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l} p[p_1(\gamma-\gamma_1)+p_2(\gamma-\gamma_2)]^2-2pp_1p_2(\gamma-\gamma_1)(\gamma-\gamma_2)+pp_1p_2(\gamma-\gamma_1)^2 \\ +p_1[p(\gamma_1-\gamma)+p_2(\gamma_1-\gamma_2)]^2-2pp_1p_2(\gamma_1-\gamma)(\gamma_1-\gamma_2)+pp_1p_2(\gamma_1-\gamma_2)^2 \\ +p_2[p(\gamma_2-\gamma)+p_1(\gamma_2-\gamma_1)]^2-2pp_1p_2(\gamma_2-\gamma)(\gamma_2-\gamma_1)+pp_1p_2(\gamma_2-\gamma)^2 \end{array}\right\}$$

Mais la somme des six derniers termes est nulle, car c'est le carré de l'expression identiquement nulle

$$\sqrt{pp_1p_2}\{(\gamma-\gamma_1)+(\gamma_1-\gamma_2)+(\gamma_2-\gamma)\}.$$

D'ailleurs chacun des six premiers peut prendre la forme

$$p[p_1(\gamma-\gamma_1)+p_2(\gamma-\gamma_2)]^2=p[n\gamma-(p\gamma+p_1\gamma_1+p_2\gamma_2)]^2=n^2p(\gamma-\mu)^2$$

en représentant par μ la moyenne $\frac{p\gamma+p_1\gamma_1+p_2\gamma_2}{n}$.

On retrouve ainsi, pour le cas de trois événements, la constante de Laplace; puisque la substitution donne

$$\sqrt{2\frac{pp_1(\gamma-\gamma_1)^2+p_1p_2(\gamma_1-\gamma_2)^2+p_2p(\gamma_2-\gamma)^2}{n^3}}$$

$$=\frac{1}{n}\sqrt{2\{p(\gamma-\mu)^2+p_1(\gamma_1-\mu)^2+p_2(\gamma_2-\mu)^2\}}.$$

Cette constante est donc bien le coefficient du premier terme de l'exposant de e dans l'intégrale qui fournit la probabilité. L'approximation porte seulement sur les coefficients des termes suivants, qui deviennent très-petits quand n est un grand nombre et peuvent être négligés sans erreur appréciable. Mais il ne saurait y avoir aucune incertitude sur la valeur et la forme du coefficient du premier, dont nulle partie n'a été négligée dans le cours de l'analyse précédente.

On sent dès à présent que cette analyse, quoique restreinte en apparence au cas de trois événements simples, s'appliquera sans difficulté au cas général d'un nombre quelconque d'événements distincts.

Soient en effet $x, x_1, x_2, \ldots\ldots x_m$ les possibilités inconnues de m événements simples; $p, p_1, p_2 \ldots\ldots p_m$ les nombres de répétitions de chacun dans un nombre n d'épreuves; $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \ldots\ldots \gamma_m$ des fonctions arbitraires relatives à la nature de chaque événement, et rangées par ordre de grandeur. Il s'agit de déterminer la probabilité P que la valeur réelle de

$$(45) \qquad v = \gamma x + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots\ldots + \gamma_m x_m$$

est comprise entre des limites données a' et a. On aura

$$(46) \qquad \begin{aligned} p + p_1 + p_2 \ldots + p_m &= n \\ x + x_1 + x_2 \ldots + x_m &= 1. \end{aligned}$$

Il serait superflu de faire voir que la probabilité P sera exprimée par

$$(47) \qquad \frac{\int_{m}^{a} x^{p} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots\ldots x_m^{p_m} dv dx_2 dx_3 \ldots\ldots dx_m}{\int_{m}^{\gamma_m} x^{p} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots\ldots x_m^{p_m} dv dx_2 dx_3 \ldots\ldots dx_m},$$

l'indice m dénotant le nombre des intégrations à effectuer. Le raisonnement employé pour parvenir à l'expression analogue (22), dans le cas de trois événements, se reproduit avec une similitude parfaite pour un nombre quelconque.

On fera $x = \frac{p}{n} + z \quad x_1 = \frac{p_1}{n} + z_1 \quad x_2 = \frac{p_2}{n} + z_2 \ldots\ldots x_m = \frac{p_m}{n} + z_m.$

$$(48) \qquad v = \frac{p\gamma + p_1\gamma_1 + \ldots\ldots + p_m\gamma_m}{n} + u$$

et l'on aura

$$(49) \qquad z + z_1 + z_2 + \ldots + z_m = 0 \qquad \gamma z + \gamma_1 z_1 + \ldots\ldots + \gamma_m z_m = u;$$

d'où l'on déduit

$$(50)\qquad \begin{aligned} z &= \frac{u - z_2(\gamma_2 - \gamma_1) - z_3(\gamma_3 - \gamma_1) - \ldots - z_m(\gamma_m - \gamma_1)}{\gamma - \gamma_1} \\ z_1 &= \frac{u - z_2(\gamma_2 - \gamma) - z_3(\gamma_3 - \gamma) - \ldots - z_m(\gamma_m - \gamma)}{\gamma_1 - \gamma}, \end{aligned}$$

ou, en posant $u - z_3\gamma_3 - z_4\gamma_4 - \ldots - z_m\gamma_m = \mathrm{U}_2$

$$(51)\qquad z_3 + z_4 + \ldots + z_m = \mathrm{Z}_2$$

$$z = \frac{\mathrm{U}_2 + \gamma_1 \mathrm{Z}_2 - z_2(\gamma_2 - \gamma_1)}{\gamma - \gamma_1} \qquad z_1 = \frac{\mathrm{U}_2 + \gamma \mathrm{Z}_2 - z_2(\gamma_2 - \gamma)}{\gamma_1 - \gamma}$$

Substituant les valeurs (48) dans l'intégrale du numérateur de la probabilité P (47), et supprimant hors du signe $\int$ les facteurs constants

$$\frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2} \ldots p_m^{p_m}}{n^n}$$

qui se détruiraient dans les deux termes de la probabilité; elle deviendra

$$\int_{b'}^{b} \left(1 + \frac{nz}{p}\right)^p \left(1 + \frac{nz_1}{p_1}\right)^{p_1} \ldots \left(1 + \frac{nz_m}{p_m}\right)^{p_m} dz_2 dz_3 dz_4 \ldots dz_m du$$

b' et b étant les limites de u.

Développant en exponentielles, le nombre e aura pour exposant

$$+ n\left(z + z_1 + z_2 + \ldots + z_m\right) - \frac{n^2}{2}\left\{\frac{z^2}{p} + \frac{z_1^2}{p_1} + \frac{z_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{z_m^2}{p_m}\right\} + \frac{n^3}{3}\left(\frac{z^3}{p^2} + \frac{z_1^3}{p_1^2} + \frac{z_2^3}{p_2^2} + \ldots + \frac{z_m^3}{p_m^2}\right) - \text{etc.}$$

Dans cette expression, le terme en n est visiblement nul par la première des relations (49) : et si l'on représente par S la série des puissances supérieures à la deuxième, on pourra écrire l'intégrale

$$(52)\qquad \int_{m'}^{m} dz_2 dz_3 \ldots dz_m du\, e^{-\frac{n^2}{2}\left(\frac{z^2}{p} + \frac{z_1^2}{p_1} + \ldots + \frac{z_m^2}{p_m}\right) + \mathrm{S}},$$

Substituant pour z et z_1 leurs valeurs (50), et désignant par K_2 la

somme des termes $-\frac{n^2}{2}\left(\frac{z_5^2}{p^5}+\frac{z_4^2}{p_4}+\ldots+\frac{z_m^2}{p_m}\right)$, qui ne contiennent pas z_2, on aura à intégrer

$$(53)\qquad K_2+S_1-\frac{n^2}{2}\left\{\left(\frac{U_2+\gamma_1Z_2-z_2(\gamma_2-\gamma_1)}{\gamma-\gamma_1}\right)^2\frac{1}{p}+\left(\frac{U_2+\gamma Z_2-z_2(\gamma_2-\gamma)}{\gamma_1-\gamma}\right)^2\frac{1}{p_1}+\frac{z_2^2}{p_2}\right\}$$

$$\int_b^b dz_2dz_3\ldots dz\ due$$

Il faut ordonner, par rapport à z_2, la partie de l'exposant de e comprise entre les parenthèses; ce qui donne d'abord:

$$(54)\qquad -\frac{n^2z_2^2}{2(\gamma-\gamma_1)^2}\left\{\frac{(\gamma_1-\gamma)^2}{p_2}+\frac{(\gamma-\gamma_2)^2}{p_1}+\frac{(\gamma_2-\gamma_1)^2}{p}\right\}$$
$$+\frac{2n^2z_2}{2(\gamma-\gamma_1)^2}\left\{\frac{\gamma_2-\gamma_1}{p}(U_2+\gamma_1Z_2)+\frac{\gamma_1-\gamma}{p_2}(U_2+\gamma Z_2)\right\}$$
$$-\frac{n^2}{2(\gamma-\gamma_1)^2}\left\{\frac{(U_2+\gamma_1Z_2)^2}{p}+\frac{(U_2+\gamma Z_2)^2}{p_1}\right\}$$

Pour simplifier, on posera

$$(\gamma-\gamma_1)^2=A_1^2,\qquad \frac{(\gamma-\gamma_1)^2}{p_2}+\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{p}+\frac{(\gamma_2-\gamma)^2}{p_1}=A_2^2,$$
$$\frac{\gamma_2-\gamma_1}{p}(U_2+\gamma_1Z_2)+\frac{\gamma_1-\gamma}{p}(U_2+\gamma Z_2)=B_2,$$
$$\frac{(U_2+\gamma_1Z_2)^2}{p}+\frac{(U_2+\gamma Z_2)^2}{p_1}=C_2,$$

et la quantité (54) se réduira à

$$(55)\qquad -\frac{n^2}{2A_1^2}(A_2^2z_2^2-2B_2z_2+C_2),$$

qui devient

$$-y_2^2-\frac{n^2}{2A_1^2}\left(C_2-\frac{B_2^2}{A_2^2}\right)$$

si l'on fait de même que précédemment.

$$(56)\qquad \frac{n}{A_1\sqrt{2}}\left(z_2A_2-\frac{B_2}{A_2}\right)=y_2,\qquad dz_2=dy_2\frac{A_1\sqrt{2}}{nA_2}.$$

Il est bon de constater immédiatement que y_2 est de l'ordre $\sqrt{n}$ pour toutes valeurs de u, z_3, etc., qui entrent dans B_2. De

sorte qu'aux limites de z_2, on pourra, comme il a déjà été fait, tirer parti de la grandeur considérable des limites de y_2.

En supprimant d'avance le facteur constant $\frac{A_1\sqrt{2}}{A_n}$, qui s'introduirait devant le signe $\int$; appelant S_2, ce que devient la série S, quand on en a éliminé z et z_1, et qu'on y a remplacé z_2 par sa valeur en y_2; l'intégrale se change en

$$(57) \qquad \int_{m}\int_{b'} dy_3 dz_5 dz_4 \ldots dz_m due^{+K_2+S_2-y_2-\frac{n^2}{2A_1^2}\left(C_2-\frac{B_2^2}{A_2^2}\right)},$$

expression dans laquelle il faut transformer la variable suivante, z_3.

La valeur de K_2 permet de poser

$$K_2=-\frac{n^2}{2}\left(\frac{z_5^2}{p_5}+\frac{z_4^2}{p_4}+\ldots+\frac{z_m^2}{p_m}\right)=K_3-\frac{n_3 z_5^2}{2p_5},$$

et l'on pourra écrire l'intégrale (57) comme il suit :

$$(58) \qquad \int_{m}\int_{b'}^{\circ} dy_3 dz_5 dz_4 \ldots dz_m due^{K_3+S_2-y_2^2-\frac{n^2}{2}\left(\frac{z_5^2}{p_5}+\frac{C_2A_2-B^2_2}{A_1^2A_2^2}\right)}.$$

Maintenant on développera $\frac{C_2A_2^2-B_2^2}{A_1^2A_2^2}$, ou plutôt le numérateur seulement, les variables n'entrant pas au dénominateur. Les relations (51) donneront en appelant U_3 et Z_3 des sommes semblables à U_2 et Z_2, mais qui ne contiendront plus z_3 :

$$U_2 = -\gamma_3 z_3 + U_3, \qquad Z_2 = z_3 + Z_3,$$

d'où

$$(U_2+\gamma_1 Z_2) = U_3+\gamma_1 Z_3 - z_3(\gamma_3-\gamma_1),$$
$$(U_2+\gamma Z_2) = U_3+\gamma Z_3 - z_3(\gamma_3-\gamma),$$

$$(U_2+\gamma_1 Z_2)^2 = (U_3+\gamma_1 Z_3)^2 - 2z_3(\gamma_3-\gamma_1)(U_3+\gamma_1 Z_3) + z_3^2(\gamma_3-\gamma_1)^2,$$

$$(U_2+\gamma Z_2)^2 = (U_3+\gamma Z_3)^2 - 2z_3(\gamma_3-\gamma)(U_3+\gamma Z_3) + z_3^2(\gamma_3-\gamma)^2.$$

Il en résultera

$$C_2 = \frac{[U_5+\gamma_1 Z_5 - z_5(\gamma_5-\gamma_1)]^2}{p} + \frac{[U_5+\gamma Z_5 - z_5(\gamma_5-\gamma)]^2}{p_1},$$

$$B_2 = \frac{\gamma_3-\gamma_1}{p}[U_3+\gamma_1 Z_3 - z_3(\gamma_3-\gamma_1)] + \frac{\gamma_3-\gamma}{p_1}[U_3+\gamma Z_3 - z_3(\gamma_3-\gamma)],$$

et en développant les carrés

$$C_2 = \frac{(U_5+\gamma_1 Z_5)^2}{p} + \frac{(U_5+\gamma Z_5)^2}{p_1}$$

$$-2z_5\left(\frac{\gamma_5-\gamma_1}{p}(U_3+\gamma_1 Z_3) + \frac{\gamma_5-\gamma}{p_1}(U_3+\gamma_1 Z_3)\right) + z_5^2\left(\frac{(\gamma_5-\gamma_1)^2}{p} + \frac{(\gamma_5-\gamma)^2}{p_1}\right)$$

$$B_2^2 = \frac{(\gamma_2-\gamma_1)^2(U_5+\gamma_1 Z_5)^2}{p^2} + \frac{(\gamma_2-\gamma)^2(U_5+\gamma Z_5)^2}{p_1^2}$$

$$+2\frac{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_2-\gamma)(U_5+\gamma_1 Z_5)(U_5+\gamma Z_5)}{pp_1}$$

$$-2z_3\left\{\frac{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_5-\gamma_1)}{p} + \frac{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_5-\gamma)}{p_1}\right\} \times \left\{\frac{\gamma_2-\gamma_1}{p}(U_3+\gamma_1 Z_3) + \frac{\gamma_2-\gamma}{p_1}(U_3+\gamma Z_3)\right\}$$

$$+z_5^2\left\{\frac{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_5-\gamma_1)}{p} + \frac{(\gamma_2-\gamma)(\gamma_5-\gamma)}{p_1}\right\}^2,$$

Si l'on se rappelle à présent que

$$A_2^2 = \frac{(\gamma-\gamma_1)^2}{p_2} + \frac{(\gamma_2-\gamma)^2}{p_1} + \frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{p},$$

on aura

$$C_2A_2^2 - B_2^2 = \frac{(U_5+\gamma_1 Z_5)^2}{p}\left\{\frac{(\gamma-\gamma_1)^2}{p_2} + \frac{(\gamma-\gamma_2)^2}{p_1}\right\} + \frac{(U_5+\gamma Z_5)^2}{p_1}\left\{\frac{(\gamma-\gamma_1)^2}{p_2} + \frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{p}\right\}$$

$$-2\frac{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_2-\gamma)(U_3+\gamma_1 Z_3)(U_5+\gamma Z_5)}{pp_1}$$

$$-2z_3\left\{\begin{array}{l}(U_3+\gamma_1 Z_3)\left[\frac{\gamma_5-\gamma_1}{p}\left(\frac{(\gamma-\gamma_1)^2}{p_2} + \frac{(\gamma-\gamma_2)^2}{p_1}\right) - \frac{(\gamma_5-\gamma)(\gamma_2-\gamma)(\gamma_2-\gamma_1)}{pp_1}\right] \\ +(U_3+\gamma Z_3)\left[\frac{\gamma_5-\gamma}{p_1}\left(\frac{(\gamma-\gamma_1)^2}{p_2} + \frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{p}\right) - \frac{(\gamma_5-\gamma_1)(\gamma_5-\gamma_1)(\gamma_2-\gamma)}{pp_1}\right]\end{array}\right.$$

$$+z_5^2\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{(\gamma_5-\gamma_1)^2}{p} + \frac{(\gamma_5-\gamma)^2}{p_1}\right)\left(\frac{(\gamma-\gamma_1)^2}{p_2} + \frac{(\gamma-\gamma_2)^2}{p_1} + \frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{p}\right) \\ -\frac{(\gamma_2-\gamma_1)^2(\gamma_5-\gamma_1)^2}{p^2} - \frac{(\gamma_2-\gamma)^2(\gamma_5-\gamma)^2}{p_1^2} - 2\frac{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_2-\gamma)(\gamma_5-\gamma_1)(\gamma_5-\gamma)}{pp_1}\end{array}\right.$$

ou bien

$$C_2A_2^2 - B_2^2 = \frac{(U_5+\gamma_1Z_5)^2(\gamma-\gamma_1)^2}{pp_2} + \frac{(U_5+\gamma Z_5)^2(\gamma-\gamma_1)^2}{p_1p_2} + \left\{\frac{(U_5+\gamma Z_5)(\gamma_2-\gamma_1)-(U_5+\gamma_1Z_5)(\gamma_2-\gamma)}{pp_1}\right\}^2$$

$$-2z_5\left\{\begin{array}{l}(U_3+\gamma_1Z_3)\dfrac{(\gamma-\gamma_1)^2}{p}\left(\dfrac{\gamma_5-\gamma_1}{p_2}+\dfrac{\gamma_2-\gamma}{p_1}\cdot\dfrac{(\gamma_2-\gamma)(\gamma_5-\gamma_1)-(\gamma_5-\gamma)(\gamma_2-\gamma_1)}{(\gamma-\gamma_1)^2}\right)\\ +(U_3+\gamma Z_3)\dfrac{(\gamma-\gamma_1)^2}{p_1}\left(\dfrac{\gamma_5-\gamma}{p_2}+\dfrac{\gamma_2-\gamma_1}{p}\cdot\dfrac{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_5-\gamma)-(\gamma_2-\gamma)(\gamma_5-\gamma_1)}{(\gamma-\gamma_1)^2}\right)\end{array}\right\}$$

$$+z_5^2\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(\gamma-\gamma_1)^2}{p_2}\left(\dfrac{(\gamma_5-\gamma_1)^2}{p}+\dfrac{(\gamma_5-\gamma)^2}{p_1}\right)+\dfrac{(\gamma-\gamma_2)^2(\gamma_5-\gamma_1)^2}{pp_1}\\ +\dfrac{(\gamma_1-\gamma_2)^2(\gamma_5-\gamma)^2}{pp_1}-2\dfrac{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_2-\gamma)(\gamma_5-\gamma_1)(\gamma_5-\gamma)}{pp_1}\end{array}\right\}.$$

D'où

$$\frac{C_2A_2^2-B_2^2}{A_1^2} = \frac{(U_5+\gamma_1Z_5)^2}{pp_2} + \frac{(U_5+\gamma Z_5)^2}{p_1p_2} + \frac{(U_5+\gamma_2Z_5)^2}{pp_1}$$

$$-2z_5\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(U_5+\gamma_1Z_5)(\gamma_3-\gamma_1)}{pp_2}+\dfrac{(U^5+\gamma Z_5)(\gamma_3-\gamma)}{p_1p_2}\\ +\dfrac{(U_5+\gamma_1Z_5)(\gamma_2-\gamma_3)(\gamma_2-\gamma)}{pp_1(\gamma-\gamma_1)}+\dfrac{(U_5+\gamma Z_5)(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_2)}{pp_1(\gamma-\gamma_1)}\end{array}\right\}$$

$$+z_5^2\left\{\frac{(\gamma_5-\gamma_1)^2}{p_2p}+\frac{(\gamma_5-\gamma)^2}{p_1p_2}+\frac{[(\gamma-\gamma_2)(\gamma_3-\gamma_1)-(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_3-\gamma)]^2}{pp_1(\gamma-\gamma_1)^2}\right\},$$

$$\frac{C_3A_3^2-B_3^2}{A_1^2}+\frac{z_5^2A_2^2}{p_5} = \frac{(U_5+\gamma_1Z_5)^2}{pp_2}+\frac{(U_5+\gamma Z_5)^2}{p_1p_2}+\frac{(U_5+\gamma_2Z_5)^2}{pp_1}$$

$$-2z_3\left\{\frac{(U_5+\gamma_1Z_5)(\gamma_3-\gamma_1)}{pp_2}+\frac{(U_5+\gamma Z_5)(\gamma_5-\gamma)}{p_1p_2}+\frac{(U_5+\gamma_2Z_5)(\gamma_3-\gamma_2)}{pp_1}\right\}$$

$$+z_5^2\left\{\frac{(\gamma-\gamma_1)^2}{p_2p_2}+\frac{(\gamma-\gamma_2)^2}{p_1p_5}+\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{p_2p}+\frac{(\gamma_5-\gamma)^2}{p_1p_2}+\frac{(\gamma_5-\gamma_1)^2}{pp_2}+\frac{(\gamma_5-\gamma_2)^2}{pp_1}\right\}.$$

Si l'on pose à présent

$$(59)\qquad \frac{(U_5+\gamma_1 Z_5)^2}{pp_2}+\frac{(U_5+\gamma_2 Z_5)^2}{pp_1}+\frac{(U_5+\gamma Z_5)^2}{p_1p_2}=C_5,$$

$$\frac{(U_5+\gamma_1 Z_5)(\gamma_5-\gamma_1)}{pp_2}+\frac{(U_5+\gamma Z_5)(\gamma_5-\gamma)}{p_1p_2}+\frac{(U_5+\gamma_2 Z_5)(\gamma_5-\gamma_2)}{pp_1}=B_5,$$

$$\frac{(\gamma-\gamma_1)^2}{p_3p_2}+\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{p_5p}+\frac{(\gamma_2-\gamma)^2}{p_3p_4}+\frac{(\gamma_5-\gamma)^2}{p_1p_2}+\frac{(\gamma_5-\gamma_1)^2}{pp_2}+\frac{(\gamma_5-\gamma_2)^2}{pp_1}=A_5^2.$$

On aura

$$(60)\qquad -\frac{n^2}{2}\left(\frac{C_2A_2^2-B_2^2}{A_1^2A_2^2}+\frac{z_5^2}{p_5}\right)=-\frac{n^2}{2A_2^2}(A_5^2z_5^2-2B_5z_5+C_5).$$

Quand on rapproche cette expression de l'expression (55), on voit que l'une se compose en z_3, A_2, A_3, B_3, C_3, de la même manière que l'autre en z_2, A_1, A_2, B_2, C_2.

On peut donc écrire sur-le-champ le résultat de la transformation de z_3 en y_3.

$$(61)\qquad y_3=\frac{n}{A_2\sqrt{2}}\left(A_3z_3-\frac{B_5}{A_5}\right),\qquad dz_3=dy_3\frac{A_2\sqrt{2}}{nA_5},$$

dans l'intégrale (58), qui, en supprimant d'avance le facteur constant $\frac{A_2\sqrt{2}}{nA_5}$, et écrivant S_3 pour la série S_2 transformée en y_3, se change en

(62)

$$\int_m^{\prime}\int_b^{\prime} dy_2dy_5dz_4dz_5\ldots dz_m due\;K_5+S_5-y_2^2-y_5^2-\frac{n^2}{2A_2^2}\left(C_5-\frac{B_5^2}{A_5^2}\right).$$

Il est impossible de ne pas reconnaître que les fonctions symétriques A_3, B_3, C_3, (59) suivent la même loi que les fonctions A_1, A_2, B_2, C_2. Il est donc permis de prévoir que la même transformation s'appliquera aux autres variables z exactement de la même manière, et qu'on retrouvera successivement des fonctions symétriques de même nature. Mais on s'en assurera facilement

par la méthode bien connue qui consiste à supposer que l'on est parvenu à la forme donnée après $(q-2)$ transformations d'autant de variables z_2, z_3,.... z_{q-1}, et à prouver que dans cette hypothèse, la transformation de la variable suivante z_q, donnera précisément un résultat semblable.

On admettra que l'expression

$$(63)\quad K_{q-1}+S_{q-1}-y_2^2-y_3^2\ldots\ldots-y_{q-1}^2-\frac{n^2}{2A^2_{q-2}}\left(C_{q-1}-\frac{B^2_{q-1}}{A^2_{q-1}}\right)=R$$

soit l'exposant de e dans l'intégrale

$$\int_m^{\ } \int_b^{\ } dy_2 dy_3 \ldots dy_{q-1} dz_q dz_{q+1} \ldots dz_m due^R$$

due à $(q-2)$ opérations. Il faudra prouver que le résultat d'une nouvelle transformation de z_q en y_q donnera pour l'exposant de e l'expression semblable

$$(64)\quad K_q+S_q-y_2^2-y_3^2\ldots-y_{q-1}^2-y_q^2-\frac{n^2}{2A^2_{q-1}}\left(C_q-\frac{B^2_q}{A^2_q}\right)=R'$$

dans l'intégrale

$$\int_m^{\ } \int_b^{\ } dy_2 dy_3 \ldots dy_{q-1} dy_q dz_{q+1} \ldots dz_m due^{R'}$$

les fonctions symétriques de mêmes dénominations conservant les valeurs :

$$K_{q-1}=-\frac{n^2}{2}\left(\frac{z_q^2}{p_q}+\frac{z^2_{q+1}}{p_{q+1}}\ldots+\frac{z_m^2}{p_m}\right)=-\frac{n^2 z_q^2}{2p_q}+K_q,$$

$$(65)\quad U_{q-1}=u-\gamma_q z_q-\gamma_{q+1}z_{q+1}\ldots-\gamma_m z_m=U_q-\gamma_q z_q,$$

$$Z_{q-1}=z_q+z_{q+1}+\ldots+z_m=Z_q+z_q,$$

$$A^2_{q-1}=\frac{(\gamma-\gamma_1)^2}{p_2p_3\ldots p_{q-1}}+\frac{(\gamma-\gamma_2)^2}{p_1p_3\ldots p_{q-1}}+\ldots\ldots+\frac{(\gamma_{q-1}-\gamma_{q-2})^2}{pp_1p_2\ldots p_{q-3}}$$

$$=\frac{1}{p_{q-1}}A^2_{q-2}+\frac{(\gamma_{q-1}-\gamma)^2}{p_1p_2\ldots p_{q-2}}+\frac{(\gamma_{q-1}-\gamma_1)^2}{pp_2\ldots p_{q-2}}+\ldots.+\frac{(\gamma_{q-1}-\gamma_{q-2})^2}{pp_1\ldots p_{q-3}},$$

$$B_{q-1}=\frac{(U_{q-1}+\gamma Z_{q-1})(\gamma_{q-1}-\gamma)}{p_1p_2\ldots p_{q-2}}+\frac{(U_{q-1}+\gamma_1 Z_{q-1})(\gamma_{q-1}-\gamma_1)}{pp_2\ldots p_{q-2}}$$

$$+\ldots\ldots+\frac{(U_{q-1}+\gamma_{q-2}Z_{q-1})(\gamma_{q-1}-\gamma_{q-2})}{pp_1\ldots p_{q-3}},$$

$$C_{q-1}=\frac{(U_{q-1}+\gamma Z_{q-1})^2}{p_1p_2\ldots p_{q-2}}+\frac{(U_{q-1}+\gamma_1 Z_{q-1})^2}{pp_2\ldots p_{q-2}}+\ldots+\frac{(U_{q-1}+\gamma_{q-2}Z_{q-1})^2}{pp_1\ldots p_{q-3}}.$$

Pour parvenir à cette démonstration, on disposera d'abord séparément dans l'expression (63), les termes de l'exposant de e qui renferment z_q et z_q^2, ce qui donnera

(66)

$$K_q + S_{q-1} - y_2^2 - y_3^2 - \ldots - y_{q-1}^2 - \frac{n^2}{2A^2_{q-1}} \left(\frac{z^2_q A_{q-1}}{p_q} + \frac{C_{q-1} A^2_{q-1} - B^2_{q-1}}{A^2_{q-2}} \right).$$

Il ne s'agira plus que de développer la partie multipliée par $\frac{n^2}{2A^2_{q-1}}$ au moyen des valeurs des fonctions symétriques (65). En voici le calcul.

Décomposant chacun des carrés contenus dans C_{q-1}, tels que

$$(U_{q-1} + \gamma Z_{q-1})^2 = (U_q + \gamma Z_q)^2 - 2 z_q (U_q + \gamma Z_q)(\gamma_q - \gamma) + z^2_q (\gamma_q - \gamma)^2$$

par suite

$$C_{q-1} = \frac{(U_q + \gamma Z_q)^2}{p_1 p_2 \ldots p_{q-2}} + \frac{(U_q + \gamma_1 Z_q)^2}{p p_2 \ldots p_{q-2}} + \ldots\ldots + \frac{(U_q + \gamma_{q-2} Z_q)^2}{p p_1 \ldots p_{q-3}}$$
$$- 2 z_q \left\{ \frac{(U_q + \gamma Z_q)(\gamma_q - \gamma)}{p_1 p_2 \ldots p_{q-2}} + \frac{(U_q + \gamma_1 Z_q)(\gamma_q - \gamma_1)}{p p_2 \ldots p_{q-2}} + \ldots + \frac{(U_q + \gamma_{q-2} Z_q)(\gamma_q - \gamma_{q-2})}{p p_1 \ldots p_{q-3}} \right\},$$
$$+ z_q^2 \left\{ \frac{(\gamma_q - \gamma)^2}{p_1 p_2 \ldots p_{q-2}} + \frac{(\gamma_q - \gamma_1)^2}{p p_2 \ldots p_{q-2}} + \ldots\ldots + \frac{(\gamma_q - \gamma_{q-2})^2}{p p_1 \ldots p_{q-3}} \right\}^2.$$

On voit sur-le-champ que

$$C_{q-1} = p_{q-1}\left(C_q - \frac{(U_q+\gamma_{q-1}Z_q)^2}{pp_1\cdots p_{q-2}}\right) - 2z_q p_{q-1}\left(B_q - \frac{(U_q+\gamma_{q-1}Z_q)(\gamma_q-\gamma_{q-1})}{pp_1\cdots p_{q-2}}\right) + z^2_q\left(A^2_q - \frac{A^2_{q-1}}{p_q} - \frac{(\gamma_q-\gamma_{q-1})^2}{pp_1\cdots p_{q-2}}\right)p_{q-1},$$

$$C_{q-1} = p_{q-1}\left(A^2_q z_q - 2B_q z^2_q + C_q\right) - z^2_q p_{q-1}\frac{A^2_{q-1}}{p_q} - \frac{[U_q+\gamma_{q-1}Z_q - z_q(\gamma_q-\gamma_{q-1})]^2}{pp_1p_2\cdots p_{q-2}}p_{q-1},$$

$$C_{q-1}A^2_{q-1} = A^2_{q-2}\left(A^2_q z^2_q - 2B_q z_q + C_q\right) - z^2_q\frac{A^2_{q-1}}{p_q}A^2_{q-2} - \frac{(U_{q-1}+\gamma_{q-1}Z_{q-1})^2}{pp_1\cdots p_{q-2}}A^2_{q-2} + C_{q-1}\left\{\frac{(\gamma_{q-1}-\gamma)^2}{p_1p_2\cdots p_{q-2}} + \frac{(\gamma_{q-1}-\gamma_1)^2}{pp_2\cdots p_{q-2}} + \cdots\cdots + \frac{(\gamma_{q-1}-\gamma_{q-2})^2}{pp_1\cdots p_{q-3}}\right\},$$

$$(67)\quad \frac{C_{q-1}A^2_{q-1}-B^2_{q-1}}{A^2_{q-2}} + \frac{z^2_q A^2_{q-1}}{p_q} = A^2_q z^2_q - 2B_q z_q + C_q - \left\{\begin{array}{l}\dfrac{B^2_{q-1}}{A^2_{q-2}} + \dfrac{(U_{q-1}+\gamma_{q-1}Z_{q-1})^2}{pp_1\cdots p_{q-2}} \\ -\dfrac{C_{q-1}}{A^2_{q-2}}\left(\dfrac{(\gamma_{q-1}-\gamma)^2}{p_1p_2\cdots p_{q-2}} + \dfrac{(\gamma_{q-1}-\gamma_1)^2}{pp^2\cdots p_{q-2}} + \cdots + \dfrac{(\gamma_{q-1}-\gamma_{q-2})^2}{pp_1\cdots p_{q-3}}\right)\end{array}\right\}.$$

Il reste à prouver que la somme des termes compris entre parenthèses, dans cette dernière équation, est identiquement nulle. Pour cela, décomposant B^2_{q-1}, il vient

$$B^2_{q-1} = \frac{(U_{q-1}+\gamma Z_{q-1})^2(\gamma_{q-1}-\gamma)^2}{(p_1p_2\cdots p_{q-2})^2} + \frac{(U_{q-1}+\gamma_1 Z_{q-1})^2(\gamma_{q-1}-\gamma_1)^2}{(pp_2\cdots p_{q-2})^2} + \cdots\cdots + \frac{(U_{q-1}+\gamma_{q-2}Z_{q-1})^2(\gamma_{q-1}-\gamma_{q-2})^2}{(pp_1\cdots p_{q-3})^2} + 2\frac{(U_{q-1}+\gamma Z_{q-1})(U_{q-1}+\gamma_1 Z_{q-1})(\gamma_{q-1}-\gamma)(\gamma_{q-1}-\gamma_1)}{p_1p_2\cdots p_{q-2}\times pp_2\cdots p_{q-2}} + \cdots\cdots + 2\frac{(U_{q-1}+\gamma_{q-3}Z_{q-1})(U_{q-1}+\gamma_{q-2}Z_{q-1})(\gamma_{q-1}-\gamma_{q-3})(\gamma_{q-1}-\gamma_{q-2})}{pp_1\cdots p_{q-3}p_{q-2}\times pp_1\cdots p_{q-3}p_{q-3}}.$$

Ainsi qu'on l'a déjà vu, le numérateur d'un quelconque des doubles produits qui entrent dans B^2_{q-1}, peut être considéré

comme résultant du carré négatif d'un binome; par exemple,

$$
\begin{aligned}
&2(U_{q-1}+\gamma Z_{q-1})(U_{q-1}+\gamma_1 Z_{q-1})(\gamma_{q-1}-\gamma)(\gamma_{q-1}-\gamma_1)\\
&\quad=-\{(U_{q-1}+\gamma Z_{q-1})(\gamma_{q-1}-\gamma_1)-(U_{q-1}+\gamma_1 Z_{q-1})(\gamma_{q-1}-\gamma)\}^2\\
&\qquad+(U_{q-1}+\gamma Z_{q-1})^2(\gamma_{q-1}-\gamma_1)^2+(U_{q-1}+\gamma_1 Z_{q-1})^2(\gamma_{q-1}-\gamma)^2\\
&\quad=-(U_{q-1}+\gamma_{q-1}Z_{q-1})^2(\gamma-\gamma_1)^2+(U_{q-1}+\gamma Z_{q-1})^2(\gamma_{q-1}-\gamma_1)^2\\
&\qquad\qquad+(U_{q-1}+\gamma_1 Z_{q-1})^2(\gamma_{q-1}-\gamma)^2.
\end{aligned}
$$

Tenant compte de toutes les réductions semblables dans la valeur de B^2_{q-1},

$$
\begin{aligned}
B^2_{q-1}=&\frac{(U_{q-1}+\gamma Z_{q-1})^2(\gamma_{q-1}-\gamma)^2}{(p_1p_2\cdots p_{q-2})^2}+\frac{(U_{q-1}+\gamma_1 Z_{q-1})^2(\gamma_{q-1}-\gamma_1)^2}{(pp_2\cdots p_{q-2})^2}\\
&+\cdots\cdots+\frac{(U_{q-1}+\gamma_{q-2}Z_{q-1})^2(\gamma_{q-1}-\gamma_{q-2})^2}{(pp_1\cdots p_{q-3})^2}+\frac{(U_{q-1}+\gamma Z_{q-1})^2(\gamma_{q-1}-\gamma_1)^2}{p_1p_2\cdots p_{q-2}\times pp_2\cdots p_{q-2}}\\
&+\frac{(U_{q-1}+\gamma_1 Z_{q-1})^2(\gamma_{q-1}-\gamma)^2}{pp_2\cdots p_{q-2}\times p_1p_2\cdots p_{q-2}}+\frac{(U_{q-1}+\gamma Z_{q-1})^2(\gamma_{q-1}-\gamma_2)^2}{p_1p_2\cdots p_{q-2}\times pp_1p_3\cdots p_{q-2}}\\
&+\frac{(U_{q-1}+\gamma_2 Z_{q-1})^2(\gamma_{q-1}-\gamma)^2}{pp_1p_3\cdots p_{q-2}\times p_1p_2\cdots p_{q-2}}+\cdots\cdots+\frac{(U_{q-1}+\gamma_{q-3}Z_{q-1})^2(\gamma_{q-1}-\gamma_{q-2})^2}{pp_1\cdots p_{q-4}p_{q-2}\times pp_1\cdots p_{q-4}p_{q-3}}\\
&+\frac{(U_{q-1}+\gamma_{q-2}Z_{q-1})^2(\gamma_{q-1}-\gamma_{q-3})^2}{pp_1\cdots p_{q-4}p_{q-3}\times pp_1\cdots p_{q-4}p_{q-2}}-\frac{(U_{q-1}+\gamma_{q-1}Z_{q-1})^2(\gamma-\gamma_1)^2}{p_1p_2\cdots p_{q-2}\times pp_2\cdots p_{q-2}}\\
&-\frac{(U_{q-1}+\gamma_{q-1}Z_{q-1})^2(\gamma-\gamma_2)^2}{pp_1p_3\cdots p_{q-2}\times p_1p_2\cdots p_{q-2}}-\cdots\cdots-\frac{(U_{q-1}+\gamma_{-1}Z_{q-1})^2(\gamma_{q-2}-\gamma_{q-3})^2}{pp_1\cdots p_{q-4}p_{q-3}\times pp_1\cdots p_{q-4}p_{q-2}}.
\end{aligned}
$$

Comparant les termes positifs de ce développement aux carrés fournis par le produit

$$
\begin{aligned}
&C_{q-1}\left(\frac{(\gamma_{q-1}-\gamma)^2}{p_1p_2\cdots p_{q-2}}+\frac{(\gamma_{q-1}-\gamma_1)^2}{pp_2\cdots p_{q-2}}+\cdots\cdots+\frac{(\gamma_{q-1}-\gamma_{q-2})^2}{pp_1\cdots p_{q-3}}\right)\\
&\quad=\left\{\frac{(U_{q-1}+\gamma Z_{q-1})^2}{p_1p_2\cdots p_{q-2}}+\frac{(U_{q-1}+\gamma_1 Z_{q-1})^2}{pp_2\cdots p_{q-2}}+\cdots\cdots+\frac{(U_{q-1}+\gamma_{q-2}Z_{q-1})^2}{pp_1\cdots p_{q-3}}\right\}\\
&\qquad\times\left\{\frac{(\gamma_{q-1}-\gamma)^2}{p_1p_2\cdots p_{q-2}}+\frac{(\gamma_{q-1}-\gamma_1)^2}{pp_2\cdots p_{q-2}}+\cdots+\frac{(\gamma_{q-1}-\gamma_{q-2})^2}{pp_1\cdots p_{q-3}}\right\},
\end{aligned}
$$

on reconnaîtra que les uns et les autres sont identiques.

Si, de plus, on fait attention que les termes négatifs qui terminent B^2_{q-1}, peuvent se réunir sous la forme

$$-\frac{(U_{q-1}+\gamma_{q-1}Z_{q-1})^2}{pp_1p_2\cdots p_{q-2}}\left\{\frac{(\gamma-\gamma_1)^2}{p_2p_3\cdots p_{q-2}}+\frac{(\gamma-\gamma_2)^2}{p_1p_3\cdots p_{q-2}}+\ldots+\frac{(\gamma_{q-3}-\gamma_{q-2})^2}{pp_1\cdots p_{q-4}}\right\}$$

$$=-\frac{(U_{q-1}+\gamma_{q-1}Z_{q-1})^2}{pp_1p_2\cdots p_{q-2}}A^2_{q-2},$$

on conclura que

$$B^2_{q-1}=C_{q-1}\left\{\frac{(\gamma_{q-1}-\gamma)^2}{p_1p_2\cdots p_{q-2}}+\frac{(\gamma_{q-1}-\gamma_1)^2}{pp_2\cdots p_{q-2}}+\ldots+\frac{(\gamma_{q-1}-\gamma_{q-2})^2}{pp_1\cdots p_{q-3}}\right\}$$

$$-\frac{(U_{q-1}+\gamma_{q-1}Z_{q-1})^2}{pp_1p_2\cdots p_{q-2}}A^2_{q-2}.$$

D'où

$$\frac{(U_{q-1}+\gamma_{q-1}Z_{q-1})^2}{pp_1\cdots p_{q-2}}-\left\{\frac{(\gamma_{q-1}-\gamma)^2}{p_1p_2\cdots p_{q-2}}+\frac{(\gamma_{q-1}-\gamma_1)^2}{pp_2\cdots p_{q-2}}+\ldots+\frac{(\gamma_{q-1}-\gamma_{q-2})}{pp_1\cdots p_{q-3}}\right\}\frac{C_{q-1}}{A^2_{q-2}}+\frac{B^2_{q-1}}{A^2_{q-2}}=0.$$

C'est bien la somme des termes de l'expression (67), dont il était nécessaire de prouver la nullité identique. Cette équation (67) se réduit donc à

$$\frac{C^2_{q-1}A_{q-1}-B^2_{q-1}}{A^2_{q-2}}+\frac{z^2_qA^2_{q-1}}{p_q}=z^2_qA^2_q-2z_qB_q+C_q,$$

et l'exposant (66) devient

$$K_q+Sq_{-1}-y^2_2-y^2_2-\ldots\ldots-y^2_{q-1}-\frac{u^2}{2A^2_{q-1}}\left(z^2_qA^2_q-2z_qB_q+C_q\right).$$

La forme de la quantité entre parenthèses qui se reproduit ici est trop connue pour ne pas poser immédiatement

$$z_q=y_q\frac{\sqrt{2}\,A_{q-1}}{nA_q}-\frac{B_q}{A^2_q},$$

et par suite le résultat de la substitution qui ramene l'exposant (63) ou (66), et l'intégrale dont il dépend, à

$$(68)\qquad K_q+S_q-y^2{}_2-y^2{}_3-\ldots\ldots\ldots-y^2{}_{q-1}-y^2{}_q-\frac{n^2}{2A^2{}_{q-1}}\left(C_q-\frac{B^2{}_q}{A^2{}_q}\right)=R'$$

$$\int_{b'}^{b} dy_2 dy_3 \ldots dy_{q-1} dy_q dz_{q+1} dz_{q+2} \ldots dz_m du e^{R'}$$

en supprimant d'avance le facteur commun $\frac{\sqrt{2}\,A_{q-1}}{nA_q}$.

L'expression (68) est précisément la même que l'exposant (64). Il est donc établi généralement que la transformation d'une variable quelconque donne un résultat de même forme que les résultats des transformations précédentes, si ces derniers ont conduit à la forme (63), (64) ou (68).

Cette forme spéciale ayant été constatée pour une et deux variables, il est démontré qu'elle se reproduira pour la troisième, pour la quatrième, et jusqu'à épuisement complet des variables z.

Il convient à présent d'examiner ce qui arrivera dans cette dernière hypothèse, et comment l'opération s'achèvera par rapport à la variable u.

En faisant $q = m$ dans la formule (68), elle donne l'intégrale

(69)

$$\int_{b'}^{b} dy_2 dy_3 \ldots dy_m du\; e^{S_m-y^2{}_2-y^2{}_3-\ldots-y^2{}_m-\frac{n^2}{2A^2{}_{m-1}}\left(C_m-\frac{B^2{}_m}{A^2{}_m}\right)}.$$

Changeant aussi $(q-1)$ en m dans les formules (65), les quantités désignées par K_m et Z_m seront nulles, puisqu'on aura employé toutes les variables z, dont elles avaient pour unique objet de représenter des sommes.

La quantité U_m sera égale à u.

On aura ensuite

$$A^2_m = \frac{(\gamma-\gamma_1)^2}{p_2p_3\cdots p_m} + \frac{(\gamma-\gamma_2)^2}{p_1p_3\cdots p_m} + \ldots + \frac{(\gamma_m-\gamma_{m-1})^2}{pp_1\cdots p_{m-2}}$$

$$= \frac{1}{p_m} A^2_{m-1} + \frac{(\gamma_m-\gamma)^2}{p_1p\cdots p_{m-1}} + \frac{(\gamma_m-\gamma_1)^2}{pp_2\cdots p_{m-1}} + \ldots + \frac{(\gamma_m-\gamma_{m-1})^2}{pp_1\cdots p_{m-2}},$$

$$B_m = u\left\{\frac{(\gamma_m-\gamma)^2}{p_1p_2\cdots p_{m-1}} + \frac{(\gamma_m-\gamma_1)^2}{pp_2\cdots p_{m-1}} + \ldots + \frac{(\gamma_m-\gamma_{m-1})^2}{pp_1\cdots p_{m-2}}\right\},$$

$$C_m = u^2\left\{\frac{1}{p_1p_2\cdots p_{m-1}} + \frac{1}{pp_2\cdots p_{m-1}} + \ldots + \frac{1}{pp_1\cdots p_{m-2}}\right\} = u^2\frac{n-p_m}{pp_1\cdots p_{m-1}},$$

Partant

$$C_m A^2_m = \frac{u^2(n-p_m)}{pp_1\cdots p_m}\left[A^2_{m-1} + p_m\left(\frac{(\gamma_m-\gamma)^2}{p_1p_2\cdots p_{m-1}} + \frac{(\gamma_m-\gamma_1)^2}{pp_2\cdots p_{m-1}} + \ldots + \frac{(\gamma_m-\gamma_{m-1})^2}{pp_1\cdots p_{m-2}}\right)\right]$$

$$C_m A^2_m - B^2_m = \frac{u^2 n A^2_{m-1}}{pp_1p_2\cdots p_m}$$

$$-u^2\left[\frac{A^2_{m-1}}{pp_1\cdots p_{m-1}} - \frac{n-p_m}{pp_1\cdots p_{m-1}}\left(\frac{(\gamma_m-\gamma)^2}{p_1p_2\cdots p_{m-1}} + \frac{(\gamma_m-\gamma_1)^2}{pp_2\cdots p_{m-1}} + \ldots + \frac{(\gamma_m-\gamma_{m-1})^2}{pp_1\cdots p_{m-2}}\right) + \frac{B^2_m}{u^2}\right].$$

Mais

$$B^2_m = u^2\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(\gamma_m-\gamma)^2}{(p_1p_2\cdots p_{m-1})^2} + \dfrac{(\gamma_m-\gamma_1)^2}{(pp_2\cdots p_{m-1})^2} + \ldots + \dfrac{(\gamma_m-\gamma_{m-1})^2}{(pp_1\cdots p_{m-2})^2} \\ +2\,\dfrac{(\gamma_m-\gamma)(\gamma_m-\gamma_1)}{p_1p_2\cdots p_{m-1}\times pp_2\cdots p_{m-1}} + \ldots + 2\,\dfrac{(\gamma_m-\gamma_{m-2})(\gamma_m-\gamma_{m-1})}{pp_1\cdots p_{m-3}p_{m-1}\times pp_2\cdots p_{m-2}}\end{array}\right\}.$$

Effectuant sur les doubles produits le changement déjà employé, on a par exemple

$$2(\gamma_m-\gamma)(\gamma_m-\gamma_1) = -(\gamma-\gamma_1)^2+(\gamma_m-\gamma)^2+(\gamma_m-\gamma_1)^2,$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{B_m^2}{u^2} = \frac{1}{pp_1p_2\cdots p_{m-1}}\left\{\frac{(\gamma_m-\gamma)^2p}{p_1p_2\cdots p_{m-1}} + \frac{(\gamma_m-\gamma_1)^2p_1}{pp_2\cdots p_{m-1}} + \cdots + \frac{(\gamma_m-\gamma_{m-1})p_{m-1}}{pp_1\cdots p_{m-2}}\right.$$
$$+ \frac{(\gamma_m-\gamma)^2p_1}{p_1p\cdots_2p_{m-1}} + \frac{(\gamma_m-\gamma_1)^2p}{pp_2\cdots p_{m-1}} + \frac{(\gamma_m-\gamma)^2p_2}{p_1p_2\cdots p_{m-1}} + \frac{(\gamma_m-\gamma_2)^2p}{pp_1\cdots p_{m-1}} \cdots +$$
$$+ \frac{(\gamma_m-\gamma_{m-2})^2p_{m-1}}{pp_1\cdots p_{m-3}p_{m-1}} + \frac{(\gamma_m-\gamma_{m-1})^2p_{m-2}}{pp_1\cdots p_{m-2}} - \frac{(\gamma-\gamma_1)^2}{p_2p_3\cdots p_{m-1}} - \frac{(\gamma-\gamma_2)^2}{p_1p_3\cdots p_{m-1}}$$
$$\left. - \cdots\cdots - \frac{(\gamma_{m-1}-\gamma_{m-2})^2}{pp_1\cdots p_{m-3}}\right\}.$$

Réunissant les termes positifs semblables quant aux fonctions γ, et observant qu'ils sont tous multipliés par $p+p_1+p_2+\cdots+p_{m-1}$ soit par $n-p_m$; que d'ailleurs les termes négatifs sont précisément les termes de A^2_{m-1}, on peut affirmer que

$$\frac{B_m^2}{u^2} = \frac{n-p_m}{pp_1p_2\cdots p_{m-1}}\left\{\frac{(\gamma_m-\gamma)^2}{p_1p_2\cdots p_{m-1}} + \frac{(\gamma_m-\gamma_1)^2}{pp_2\cdots p_{m-1}} + \cdots + \frac{(\gamma_m-\gamma_{m-1})^2}{pp_1\cdots p_{m-2}}\right\}$$
$$- \frac{A^2_{m-1}}{pp_1\cdots p_{m-1}}.$$

Le coefficient de u^2 entre parenthèses dans le développement de $C_mA_m^2 - B_m^2$, est donc identiquement nul; et il reste

$$\frac{C_mA_m^2 - B_m^2}{A^2_{m-1}} = \frac{u^2n}{pp_1p_2\cdots p_m}.$$

La partie de l'exposant de e qui, dans l'intégrale (69), renfermait encore A_{m-1}, B_m, C_m, se réduit par conséquent à

$$-\frac{n^5}{2pp_1p_2\cdots p_mA_m^2}u^2,$$

et si l'on fait

$$u = t\sqrt{\frac{2pp_1p_2\cdots p_mA_m^2}{n^5}},$$

on aura pour l'intégrale, en continuant de supprimer d'avance les facteurs constants hors du signe $\int$, appelant c' et c, les limites de t, et S_{m+1} la série des puissances supérieures transformée en t,

$$(70) \qquad {}_m\int_c^{c'} dy_2 dy_3 \ldots dy_m dt e^{S_{m+1} - y^2 - y_2^2 - \ldots - y_m^2 - t^2}$$

Pour achever l'intégration, il suffira de faire sortir de l'exposant la série S_{m+1} : ce qui donne

$${}_m\int_c^{c'} dy_2 dy_3 \ldots dy_m dt e^{-y_2^2 - y_3^2 - \ldots - y_m^2 - t^2} (1 + S_{m+1} + \tfrac{1}{2} S^2_{m+1} + \text{etc.})$$

On devra remarquer alors qu'en intégrant un terme quelconque par rapport à y_2, la grandeur des limites de cette variable qui est de l'ordre $\sqrt{n}$, le réduira à zéro, si l'exposant de y_2 est impair, et à un facteur constant multiplié par $\sqrt{\pi}$, si l'exposant est pair et que les limites très-grandes soient de signes contraires.

On en conclura facilement qu'après avoir intégré relativement à toutes les variables y, il restera seulement des termes en t, ceux qui se trouvaient multipliés par des puissances paires de chacune de ces variables y.

L'intégration, par rapport à t, conduira ensuite à deux séries : l'une de termes multipliés par $\frac{1}{2} e^{-c^2}$, $\frac{1}{2} e^{-c'^2}$, dont les coefficients, étant de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et ses puissances, seront fort petits quand on prendra pour n un grand nombre, et $c > 2$, $c' > 2$.

On peut donc négliger cette série, dont, au reste, l'analyse précédente est capable de tenir compte.

La seconde série se composera de termes constants affectés de $\int_c^{c'} e^{-t^2} dt$. En la désignant par T, l'intégrale cherchée, devient finalement

$$(71) \qquad ((\sqrt{\pi})^{m-1} + \mathrm{T}) \int_c^{c'} e^{-t^2} dt.$$

Prenant $c' = -c$, on aura le numérateur de la probabilité P. Quant au dénominateur, il faut intégrer l'expression (71),

pour toutes les valeurs possibles de t. Les limites qui renferment toutes les valeurs possibles sont γ et γ_m, la plus petite et la plus grande des arbitraires γ : comme

$$u = v - \frac{p\gamma + p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + \ldots\ldots + p_m\gamma_m}{n},$$

les limites extrêmes de u seront

$$+ \frac{p(\gamma_m - \gamma) + p_1(\gamma_m - \gamma_1) + \ldots\ldots + p_{m-1}(\gamma_m - \gamma_{m-1})}{n}$$

$$- \frac{p_1(\gamma_1 - \gamma) + p_2(\gamma_2 - \gamma) + \ldots\ldots + p_m(\gamma_m - \gamma)}{n},$$

et l'on aura pour les limites de t

$$l = \{p(\gamma_m - \gamma) + p_1(\gamma_m - \gamma_1) + \ldots + p_{m-1}(\gamma_m - \gamma_{m-1})\} \sqrt{\frac{n}{2pp_1p_2\ldots\ldots p_m A_m{}^2}}$$

$$l' = -\{p_1(\gamma_1 - \gamma) + p_2(\gamma_2 - \gamma) + \ldots + p_m(\gamma_m - \gamma)\} \sqrt{\frac{n}{2pp_1p_2\ldots p_m A_m{}_2}}$$

quantités de l'ordre très-grand $\sqrt{n}$. On est donc en droit de supposer dans le dénominateur de la probabilité $t = \pm\infty$: ce qui donne pour la valeur de ce terme

$$((\sqrt{\pi})^{m-1} + \mathrm{T})\sqrt{\pi},$$

et l'on arrive, comme dans les cas précédents, à

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt. \tag{72}$$

C'est la probabilité que la valeur de v est comprise entre les limites

$$\frac{p\gamma + p_1\gamma_1 + \ldots\ldots + p_m\gamma_m}{n} \pm c\sqrt{\frac{2pp_1p_2\ldots\ldots p_m A_m{}^2}{n^3}},$$

ou bien que la différence entre la vraie valeur de v et la moyenne déduite des observations tombe entre

$$\pm c\sqrt{\frac{2pp_1p_2\ldots p_m A_m{}^2}{n^3}},$$

expression qui, en remettant pour $A_m{}^2$ la fonction toujours symétrique que cette lettre représente, prend la forme déjà constatée :

(73)

$$\pm c\sqrt{\frac{2}{n^3}\{pp_1(\gamma-\gamma_1)^2+pp_2(\gamma-\gamma_2)^2+p_1p_2(\gamma_1-\gamma_2)^2+\ldots+p_{m-1}p_m(\gamma_m-\gamma_{m-1})^2\}}$$

Si l'on développe les carrés entre parenthèses, on obtient pour un terme tel que $pp_1(\gamma-\gamma_1)^2$,

$$pp_1\gamma^2+pp_1\gamma_1{}^2-2pp_2\gamma\gamma_1.$$

Il devient ainsi manifeste que le radical renfermant les carrés des différences entre γ et les m autres arbitraires, multipliés chacun par les nombres pp_1, etc., corrélatifs; le produit d'un carré γ^2 par le nombre p, sera multiplié par la somme de tous les autres nombres $p_1+p_2+\ldots+p_m=n-p$.

Les termes de la parenthèse sous le radical (73) pourront donc s'écrire

$$p(n-p)\gamma^2+p_1(n-p_1)\gamma_1{}^2+p_2(n-p_2)\gamma_2{}^2+\ldots.-2pp_1\gamma\gamma_1-2pp_2\gamma\gamma_2 \\ -2p_1p_2\gamma_1\gamma_2-\ldots.-2p_{m-1}p_m\gamma_{m-1}\gamma_m$$

ou bien

$$n(p\gamma^2+p_1\gamma_1{}^2+p_2\gamma_2{}^2+\ldots.+p_m\gamma_m{}^2)-(p^2\gamma^2+p_1{}^2\gamma_1{}^2+p_2{}^2\gamma_2{}^2 \\ +\ldots+p_m{}^2\gamma_m{}^2-2pp_1\gamma\gamma_1-2pp_2\gamma\gamma_2-\ldots-2p_mp_{m-1}\gamma_m\gamma_{m-1}),$$

qui est évidemment égal à

$$n^2\frac{p\gamma^2+p_1{}^2\gamma_1{}^2+\ldots+p_m{}^2\gamma_m{}^2}{n}-n^2\left(\frac{p\gamma+p_1\gamma_1+p_2\gamma_2+\ldots.+p_m\gamma_m}{n}\right)^2$$

d'où l'on obtient pour les limites (73) de l'écart

$$(74) \qquad \pm c\sqrt{\frac{2}{n}\left\{\frac{p\gamma^2+p_1\gamma_1^2+\ldots+p_m\gamma_m^2}{n}-\left(\frac{p\gamma+p_1\gamma_1+\ldots+p_m\gamma_m}{n}\right)^2\right\}}.$$

Ici figurent seulement la moyenne des carrés des n observations, moins le carré de la moyenne : c'est la forme que Laplace a donnée pour mesurer les écarts de la vie moyenne calculée d'après les âges γ, γ_1, γ_2, etc., d'un grand nombre d'individus.

En appelant μ la moyenne, on peut remarquer que

$$\frac{p\gamma^2+p_1\gamma_1^2+\ldots+p_m\gamma_m^2}{n}-\mu^2=\frac{p\gamma^2+p_1\gamma_1^2+\ldots+p_m\gamma_m^2-n\mu^2}{n}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{r}p(\gamma^2+\mu^2-2\gamma\mu)+p_1(\gamma_1^2+\mu^2-2\gamma_1\mu)+\ldots\ldots\ldots+p_m(\gamma_m^2+\mu^2-2\gamma_m\mu)\\ -2n\mu^2+2(p\gamma+p_1\gamma_1+\ldots\ldots\ldots p_m\gamma_m)\mu\end{array}\right\}}{n}$$

$$=\frac{p(\gamma-\mu)^2+p_1(\gamma_1-\mu)^2+\ldots\ldots+p_m(\gamma_m-\mu)^2-2n\mu^2+2n\mu^2}{n}.$$

Les limites de l'écart peuvent donc s'écrire également

$$(75) \qquad \pm\frac{c}{n}\sqrt{2\left\{p(\gamma-\mu)^2+p_1(\gamma_1-\mu)^2+p_2(\gamma_2-\mu)^2+\ldots+p_m(\gamma_m-\mu)^2\right\}}.$$

Il n'y a plus sous le radical que les carrés des différences entre chaque valeur γ résultant de l'observation et la moyenne de toutes.

Laplace a découvert sous cette dernière forme la constante qui mesure les erreurs des résultats moyens des observations astronomiques.

L'analyse qui vient d'être exposée ne permet plus d'élever le moindre doute sur l'emploi de cette constante si remarquable. Elle montre que cette quantité est certainement le coefficient complet du premier terme de la série qui exprime la probabilité de l'écart de la moyenne d'un nombre quelconque d'observations, de même que le radical $\sqrt{\frac{2pp_1}{n^2}}$, sur lequel il n'a jamais été élevé

de doute, est le coefficient du premier terme dans la probabilité de l'écart du rapport réel de possibilité au rapport moyen des répétitions de deux événements qui s'excluent l'un l'autre.

Si la démonstration directe de cette vérité pouvait obtenir le suffrage de l'Académie, peut-être les observateurs feraient-ils plus souvent usage de la règle de Laplace, dont l'exactitude rigoureuse ne paraît avoir été jusqu'ici bien jugée que par un petit nombre de savants. Ce Mémoire aurait alors complétement rempli, dès à présent, l'intention qui l'a fait rédiger, quoique le défaut de temps n'ait point permis d'en développer les conséquences.

MÉMOIRE

SUR

UNE QUESTION D'ANALYSE

AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

PAR M. JOSEPH LIOUVILLE.

I.

La question d'analyse aux différences partielles, à laquelle se rapportent les recherches suivantes, peut être utile dans plusieurs théories physiques, et spécialement dans celle de la chaleur. Le titre placé en tête de ce Mémoire montre assez que je veux la considérer sous un point de vue purement mathématique, abstraction faite de ses applications. Néanmoins il sera bon d'indiquer en peu de mots la nature des problèmes qui m'ont conduit à m'en occuper.

Les lois de la distribution variable ou permanente du calorique, dans les substances solides, dépendent, comme on sait, d'une équation aux différences partielles qu'il s'agit d'intégrer, et d'une ou de plusieurs conditions particulières, relatives, soit à la surface

du corps, soit à l'état initial des températures. Ces conditions définies servent à déterminer les quantités arbitraires introduites par l'intégration de l'équation indéfinie. Lorsque le système dans lequel la chaleur se propage est placé dans un milieu de température donnée, l'équation relative à la surface a pour coefficient d'un de ses termes le pouvoir rayonnant; et, si l'on veut laisser à la question toute la généralité qu'elle comporte, il faut regarder ce pouvoir rayonnant comme une fonction connue quelconque des coordonnées de chaque point de la surface; car, en supposant même qu'il s'agisse d'un corps homogène, la quantité de chaleur émise au dehors, par un élément superficiel de grandeur constante, varie, toutes choses égales d'ailleurs, avec le degré de poli ou la coloration de cet élément.

Lorsqu'on étudie, par exemple, le mouvement de la chaleur dans une barre d'un très-petit diamètre, le pouvoir rayonnant doit être regardé comme une fonction arbitraire de l'abscisse; et si l'on remplaçait cette fonction arbitraire par une simple constante, on restreindrait beaucoup l'étendue de la solution. Au reste, dans le cas d'une barre très-mince, l'introduction d'une fonction arbitraire pour représenter le pouvoir rayonnant, et même pour représenter la chaleur spécifique et la conducibilité intérieure, ne complique pas beaucoup les calculs, du moins tant qu'on se borne à établir des formules algébriques, sans essayer de les réduire en nombres. C'est ce que j'ai fait voir dans un Mémoire présenté, il y a plusieurs années, à l'Académie des sciences; et ce que M. Sturm a prouvé aussi, à peu près à la même époque, par une méthode très-différente de celle que j'ai suivie, quoiqu'elle conduise aux mêmes résultats. Mais, en général, on peut dire que la détermination des lois du mouvement de la chaleur dans un corps solide de forme donnée se complique beaucoup dès qu'on représente le pouvoir rayonnant h, propre à chaque point de la surface de ce corps, par une fonction quelconque $f(x)$ de l'abscisse correspondante à ce point. Aussi voyons-nous que jusqu'à ce jour les géomètres ont regardé la lettre h comme exprimant

une constante, même dans la théorie des températures terrestres, où il serait intéressant d'examiner les effets produits par la variabilité de h.

En cherchant à résoudre divers problèmes, dans lesquels je regardais la quantité h comme variable, je suis tombé sur la question d'analyse aux différences partielles dont je ferai le sujet de ce Mémoire. Cette question a pour objet de déterminer les coefficients des termes successifs d'une série de quantités périodiques, au moyen d'une équation de condition à laquelle cette série doit satisfaire entre deux limites données.

Une des équations de condition dont je parle est, par exemple, de la forme :

$$\text{(A)} \qquad \Sigma A_m m \cos mx + f(x)\Sigma A_m \cos mx = F(x),$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de m exprimées par les nombres impairs 1, 3, 5,... L'équation (A) doit subsister pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x = o$, $x = \frac{\pi}{2}$: les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ sont connues; et il s'agit de déterminer les coefficients A_1, A_3, $A_5 \ldots A_m \ldots$ Cela serait facile par les méthodes ordinaires, si l'on avait $f(x) =$ constante; mais, quand $f(x)$ est variable, la chose devient plus délicate.

Il est aisé de trouver, dans la théorie de la chaleur, un problème qui conduise à l'équation (A). Pour cela, généralisons celui que Fourier a résolu dans le chapitre III de son ouvrage. Ce problème a, comme on sait, pour objet d'exprimer le mouvement de la chaleur dans une lame rectangulaire infinie. Nous supposerons, avec l'illustre auteur, que les deux arêtes parallèles et infinies A et C, qui comprennent le rectangle, sont retenues, par une cause quelconque, à la température fixe 0°; mais quant à l'arête transversale B, au lieu de la regarder comme entretenue aussi à une température fixe 1°, nous admettrons qu'elle rayonne dans un milieu dont la température est donnée

pour chaque point, et nous représenterons son pouvoir émissif par une fonction arbitraire variant d'un point à l'autre de B. La lame étant d'ailleurs homogène, si nous plaçons l'origine des coordonnées au milieu de l'arête B, et si nous comptons les abscisses x le long de cette arête, tandis que les ordonnées y seront comptées dans une direction normale à celle-là, il est visible que la température permanente u, qui répond au point M dont les coordonnées sont x et y, sera déterminée par l'équation aux différences partielles :

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0.$$

En choisissant l'unité de longueur de telle manière que l'arête B, interceptée entre les faces A et C, soit égale à $\pi = 3,14159...$ on aura $u = 0$ pour $x = \pm\frac{\pi}{2}$, puisque les faces A et C sont entretenues à 0° : à cause de l'action de ces mêmes arêtes, la portion du rectangle située à une distance infinie de B doit être aussi à 0°. Ainsi on doit avoir $u = 0$ pour $y = +\infty$. Le long de l'arête B, il y a une autre condition définie, savoir :

$$k\frac{du}{dy}=h(u-\zeta), \text{ pour } y=0, \text{ de } x=-\frac{\pi}{2} \text{ à } x=\frac{\pi}{2},$$

les deux quantités positives h et k désignant le pouvoir émissif et la conducibilité intérieure, tandis que ζ désigne la température du milieu ambiant. D'après nos hypothèses, h et ζ sont des fonctions de x. Nous pouvons donc poser :

$$\frac{h}{k}=f(x), \quad \frac{h\zeta}{k}=\mathrm{F}(x),$$

et l'équation dont il s'agit deviendra :

$$\frac{du}{dy}-uf(x)+\mathrm{F}(x)=0.$$

Les fonctions $f(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ sont jusqu'ici des fonctions quelconques; mais, pour plus de simplicité, nous les regarderons désormais comme des fonctions paires de x; en sorte que l'on ait

$f(-x) = f(x)$, $F(-x) = F(x)$. La température u sera aussi dès lors une fonction paire de x. Par conséquent, la question se réduit à trouver une fonction paire de x qui satisfasse à l'équation :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0,$$

qui s'annule, quel que soit y, quand $x = \frac{\pi}{2}$, et quel que soit x, quand $y = +\infty$; et qui, en outre, lorsqu'on a $y = 0$, satisfasse à l'égalité :

$$\frac{du}{dy} - uf(x) + F(x) = 0,$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Or on trouve que toutes ces conditions seront remplies en posant :

$$u = \Sigma A_m e^{-my} \cos mx,$$

m étant un quelconque des nombres entiers impairs 1, 3, 5,...., et A_m représentant une fonction de m tellement choisie que, pour les valeurs de x renfermées entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$, on ait :

$$\text{(A)} \qquad \Sigma A_m m \cos mx + f(x)\Sigma A_m \cos mx = F(x).$$

Pour déterminer la fonction inconnue A_m, dont la valeur de u dépend, il est donc nécessaire de traiter l'équation (A), dans laquelle $f(x)$ est une fonction positive arbitraire de x.

Si la longueur de l'arête B, que nous avons supposée égale à π, était au contraire égale à $2l$, au lieu de l'équation (A), on aurait à traiter une équation de condition de la forme :

$$\text{(B)} \qquad \Sigma A_m \frac{m\pi}{2l} \cos \frac{m\pi x}{2l} + f(x)\Sigma A_m \cos \frac{m\pi x}{2l} = F(x).$$

En supposant la longueur l infinie, transformant les sommes en intégrales, et substituant à la lettre A_m une fonction $\varphi(\theta)d\theta$ de la

variable $\frac{m\pi}{2l} = \theta$ à laquelle se rapporte l'intégration, l'égalité précédente deviendra :

$$(C) \qquad \int_0^\infty \theta\varphi(\theta)\cos\theta x d\theta + f'(x)\int_0^\infty \varphi(\theta)\cos\theta x d\theta = F(x).$$

Il s'agira donc alors de trouver une fonction $\varphi(\theta)$ qui satisfasse à l'équation (C); et cette fonction une fois déterminée, la température u d'un point quelconque du solide sera fournie par la formule générale :

$$u = \int_0^\infty \varphi(\theta) e^{-\theta y}\cos\theta x d\theta.$$

Nous avons restreint tout à l'heure la généralité de notre problème, en supposant la chaleur distribuée symétriquement de part et d'autre de l'axe qui s'élève au milieu de l'arête B, normalement à cette arête. Admettons maintenant que cette symétrie n'existe pas. Il sera plus commode de placer dans ce cas l'origine des coordonnées au point où les deux faces A et B se rencontrent. D'après cela, nous choisirons l'arête A pour axe des y, et l'arête B pour axe des x. L'équation indéfinie, à laquelle la température u doit satisfaire, sera encore :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0;$$

mais les conditions définies prendront la forme :

$$u = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et pour } x = \pi,$$
$$u = 0 \text{ pour } y = +\infty,$$
$$\frac{du}{dy} - uf(x) + F(x) = 0, \text{ pour } y = 0, \text{ de } x = 0 \text{ à } x = \pi.$$

Nous n'avons pas besoin d'avertir que la longueur de l'arête B est, comme précédemment, représentée par le nombre π. La valeur de u, qu'on déduit de ces équations, est la suivante :

$$u = \Sigma A_m e^{-my}\sin mx,$$

m désignant un quelconque des nombres entiers successifs 1, 2,

3, 4, 5.....; et A_m étant une fonction de m qui doit être telle que, pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et π, on ait :

$$(D) \qquad \Sigma A_m m \sin mx + f(x)\Sigma A_m \sin mx = F(x);$$

pour obtenir la valeur de A_m et par suite la valeur de u, il est donc nécessaire de savoir résoudre les équations de la forme (D).

Considérons actuellement l'état permanent de la chaleur dans un cercle dont le contour rayonne dans un milieu de température donnée; et nous tomberons de nouveau sur une équation semblable aux précédentes, quoiqu'un peu plus générale. En effet, soit u la température fixe d'un point quelconque M du cercle: désignons par r le rayon vecteur OM mené du point M au centre O, et par x l'angle que ce rayon vecteur forme avec une droite OX invariable. L'équation indéfinie du mouvement permanent de la chaleur dans un plan pouvant, comme on le sait, être mise sous la forme :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} = 0,$$

il s'agira d'abord d'intégrer cette équation. Or, si l'on effectue cette intégration, en ayant égard à ces deux circonstances particulières à notre problème, 1° que la valeur de u ne devienne pas infinie, quand on y fait $r = 0$; 2° que cette valeur reste la même quand on y change x en $x + 2\pi$, on trouvera pour l'expression générale de u :

$$u = \Sigma r^m (A_m \cos mx + B_m \sin mx),$$

m désignant un nombre entier quelconque, y compris zéro; et A_m, B_m des fonctions inconnues de m. Il reste encore à satisfaire à l'équation relative à la surface, laquelle, en prenant pour unité le rayon du cercle, est de la forme :

$$k\frac{du}{dr} + h(u - \zeta) = 0, \text{ pour } r = 1, \text{ de } x = -\pi \text{ à } x = \pi,$$

k et h désignant la conducibilité intérieure et le pouvoir rayon-

nant, tandis que ζ représente la température du milieu en contact avec la circonférence du cercle. Nous supposerons que h et ζ sont des fonctions données de l'angle x, et nous poserons :

$$\frac{h}{k} = f(x), \quad \frac{h\zeta}{k} = \mathrm{F}(x);$$

en mettant donc au lieu de u et $\frac{du}{dr}$ leurs valeurs dans notre équation définie, elle deviendra :

$$\text{(E)} \quad \Sigma m(\mathrm{A}_m \cos mx + \mathrm{B}_m \sin mx) + f(x)\Sigma(\mathrm{A}_m \cos mx + \mathrm{B}_m \sin mx) = \mathrm{F}(x),$$

et il faudra en faire usage de manière à déterminer les coefficients A_m et B_m.

Les cinq équations que nous avons dénotées par les cinq premières lettres de l'alphabet répondent à un nombre égal de problèmes dont nous allons essayer de donner la solution. Nous traiterons d'abord le problème (A), qui renferme implicitement (B) et (C), par deux méthodes différentes qui nous conduiront aux mêmes résultats. La seconde de ces deux méthodes étant plus abrégée que l'autre, c'est elle que nous appliquerons ensuite aux derniers problèmes (D), (E).

II.

PREMIÈRE SOLUTION DU PROBLÈME (A).

Soient m un nombre impair quelconque, et A_1, A_3, A_5..... A_m.... des coefficients constants inconnus. Faisons :

$$\mathrm{A}_1 \cos x + \mathrm{A}_3 \cos 3x + \mathrm{A}_5 \cos 5x + \text{etc.} = \Sigma \mathrm{A}_m \cos mx,$$

et

$$\mathrm{A}_1 \cos x + 3\mathrm{A}_3 \cos 3x + 5\mathrm{A}_5 \cos 5x + \text{etc} = \Sigma \mathrm{A}_m m \cos mx.$$

Désignons par $\mathrm{F}(x)$, $f(x)$ deux fonctions de x dont on connaisse

les valeurs depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{\pi}{2}$. Cela posé, notre problème peut s'énoncer de la manière suivante.

PROBLÈME.

On demande de trouver la valeur de A_m *qui satisfait à l'équation :*

$$(A) \qquad \Sigma A_m m \cos mx + f(x)\Sigma A_m \cos mx = F(x),$$

pour toutes les valeurs de x *comprises entre les limites* $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Néanmoins, pour rendre cet énoncé plus précis, il faut ajouter les remarques suivantes qui dérivent de la nature même de la question.

1° Le problème qui, dans le n° 1, nous a conduits à l'équation (A), nous montre que la quantité $\cos mx$ est la limite vers laquelle tend le produit $e^{-my}\cos mx$ quand la grandeur positive y devient infiniment petite. En posant $e^{-y} = p$, p sera un nombre infiniment peu inférieur à l'unité, et nous aurons : $e^{-my}\cos mx = p^m \cos mx$. Il résulte de là que si nos séries périodiques deviennent indéterminées, nous pourrons et nous devrons même en multiplier les divers termes par les puissances successives d'une quantité infiniment peu différente de l'unité, ce qui détruira l'indétermination.

2° Les deux fonctions $f(x)$, $F(x)$ sont données en *nombres finis* pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Le cas où ces fonctions deviendraient infinies, dans l'intervalle cité, doit être exclu formellement comme contraire à la nature physique du problème qui nous a fourni l'équation (A).

3° La fonction $f(x)$ est en outre constamment positive, puis-

qu'elle exprime le rapport du pouvoir rayonnant à la conducibilité.

4° La fonction $F(x)$ peut être indifféremment positive ou négative ; mais nous la supposerons nulle à la limite $x = \frac{\pi}{2}$; en sorte que l'on ait $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. En effet, le premier membre de l'équation (A) s'annule pour la valeur particulière $x = \frac{\pi}{2}$; si donc on n'admettait pas la condition $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, l'analyse paraîtrait se contredire, puisque le second membre, ne s'annulant pas pour cette même valeur, cesserait alors d'être égal au premier.

Si la fonction $f(x)$ se réduisait à une quantité constante β, l'équation (A) pourrait être écrite ainsi :

$$\Sigma A_m(m+\beta)\cos mx = F(x);$$

et, par la méthode ordinaire, on en déduirait :

$$A_m = \frac{4}{\pi(m+\beta)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)\cos mx\,dx.$$

Mais cette méthode est impraticable sitôt qu'on cesse d'avoir $f(x) =$ constante. Il faut donc recourir à d'autres procédés.

D'abord j'observe que la fonction $F(x)$ qui, par hypothèse, satisfait à la condition $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, peut être exprimée, entre les limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, par une série de cosinus, puisque l'on a la formule connue

$$F(x) = \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\mu)\cos m\mu\,d\mu,$$

m désignant, comme ci-dessus, un nombre impair quelconque.

Quant à la fonction $f(x)$, nous pouvons, entre les mêmes limites, la développer sous la forme

$$f(x) = R_0 + R_2\cos 2x + R_4\cos 4x + \ldots + R_n\cos nx + \ldots,$$

ou, pour abréger

$$f(x) = \Sigma R_n \cos nx,$$

n désignant un quelconque des nombres pairs 0, 2, 4, 6,..., et R_n étant un coefficient déterminé par l'égalité :

$$R_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\mu)\cos n\mu\, d\mu,$$

dont le second membre doit néanmoins être réduit à moitié lorsque $n = 0$. En remplaçant $f(x)$ et $F(x)$ par leurs valeurs dans l'équation (A), cette équation devient

$$(A')\quad \Sigma A_m m\cos mx + \Sigma R_n \cos nx \Sigma A_m \cos mx = \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\mu)\cos m\mu\, d\mu,$$

et l'on peut s'assurer que, si l'équation (A') a lieu pour toutes les valeurs de x comprises entre $x = 0$, et $x = \frac{\pi}{2}$, elle aura également lieu quand x se trouvera en deçà ou en delà de ces limites. Tel est l'avantage que l'on trouve à remplacer $f(x)$ et $F(x)$ par les séries de cosinus équivalentes; et c'est en cela que consiste l'esprit de ces substitutions.

Le produit

$$\Sigma R_n \cos nx \Sigma A_m \cos mx,$$

qui n'est autre chose que le produit des deux quantités

$$R_0 + R_2\cos 2x + R_4\cos 4x + \ldots + R_n\cos nx + \ldots,$$

et

$$A_1\cos x + A_3\cos 3x + A_5\cos 5x + \ldots + A_m\cos mx + \ldots,$$

peut être effectué en général. Si l'on fait usage de la formule

$$\cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2}\cos(m+n)x + \tfrac{1}{2}\cos(m-n)x,$$

on ramène ce produit à la forme

$$a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + a_5 \cos 5x + \text{etc.}$$

On peut donc poser

$$\Sigma R_n \cos nx \, \Sigma A_m \cos mx = a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + a_5 \cos 5x + \text{etc.},$$

et, en effectuant les calculs, on obtient aisément

$$a_1 = R_0 A_1 + \frac{R_2}{2}(A_3 + A_1) + \frac{R_4}{2}(A_5 + A_3) + \ldots\ldots,$$

$$a_3 = R_0 A_3 + \frac{R_2}{2}(A_5 + A_1) + \frac{R_4}{2}(A_7 + A_1) + \ldots\ldots$$

$$a_5 = R_0 A_5 + \frac{R_2}{2}(A_7 + A_3) + \frac{R_4}{2}(A_9 + A_1) + \ldots\ldots$$

. . . . . .

Ces valeurs de a_1, a_3, a_5.... dépendent des quantités A_1, A_3, A_5.... A_m....; mais, pour bien mettre en évidence la loi régulière de leur formation, il convient d'introduire aussi dans le calcul les quantités A_{-1}, A_{-3}, A_{-5},... A_{-m},.... Ces quantités n'ont aucun sens par elles-mêmes : voici quelle signification nous leur attribuerons dans la suite. Il faut concevoir une fonction $\varphi(m)$ telle que l'on ait en général $A_m = \varphi(m)$, quand m est un quelconque des nombres impairs 1, 3, 5,.... A présent, si dans la fonction analytique $\varphi(m)$, on remplace m par $-m$, le résultat de la substitution sera $\varphi(-m)$. Or c'est précisément ce résultat que désormais nous dénoterons par A_{-m}, en posant en conséquence

$$A_{-1} = \varphi(-1),\ A_{-3} = \varphi(-3),\ldots\ A_{-m} = \varphi(-m),\ldots\ldots$$

Introduisant dans nos calculs les quantités A_{-1}, A_{-3},... A_{-m},... nous pourrons mettre les valeurs de a_1, a_3, a_5.... sous la forme

$$a_1 = b_1 + R_0 A_1 + \frac{R_2}{2}(A_3 + A_{-1}) + \frac{R_4}{2}(A_5 + A_{-3}) + \ldots + \frac{R_n}{2}(A_{1+n} + A_{1-n}) + \ldots,$$

$$a_3 = b_3 + R_0 A_3 + \frac{R_2}{2}(A_5 + A_1) + \frac{R_4}{2}(A_7 + A_{-1}) + \ldots + \frac{R_n}{2}(A_{3+n} + A_{3-n}) + \ldots,$$

$$a_5 = b_5 + R_0 A_5 + \frac{R_2}{2}(A_7 + A_3) + \frac{R_4}{2}(A_9 + A_1) + \ldots + \frac{R_n}{2}(A_{5+n} + A_{5-n}) + \ldots,$$

. . . . . .

b_1, b_3, b_5.... étant exprimés comme il suit :

$$b_1 = \frac{R_2}{2}(A_1 - A_{-1}) + \frac{R_4}{2}(A_3 - A_{-3}) + \frac{R_6}{2}(A_5 - A_{-5}) + \ldots,$$

$$b_3 = \frac{R_4}{2}(A_1 - A_{-1}) + \frac{R_6}{2}(A_3 - A_{-3}) + \frac{R_8}{2}(A_5 - A_{-5}) + \ldots,$$

$$b_5 = \frac{R_6}{2}(A_1 - A_{-1}) + \frac{R_8}{2}(A_3 - A_{-3}) + \frac{R_{10}}{2}(A_5 - A_{-5}) + \ldots,$$

. . . . . .

La loi de formation des quantités b_1, b_3, b_5.... et a_1, a_3, a_5..... est facile à apercevoir; et l'emploi des signes A_{-1}, A_{-3}, etc., n'a pas peu contribué à rendre cette loi évidente. En adoptant pour a_1, a_3, a_5.... les valeurs ci-dessus, le produit

$$\Sigma R_n \cos nx \, \Sigma A_m \cos mx,$$

est égal à

$$a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + a_5 \cos 5x + \text{etc.}$$

Si donc on fait, pour abréger,

$$X = b_1 \cos x + b_3 \cos 3x + b_5 \cos 5x + \ldots\ldots$$

$$Y = \Sigma \cos mx \left(R_0 A_m + \frac{R_2}{2}(A_{m+2} + A_{m-2}) + \frac{R_4}{2}(A_{m+4} + A_{m-4}) + \ldots\right)$$

on aura

$$\Sigma R_n \cos nx \, \Sigma A_m \cos mx = X + Y,$$

et l'équation (A') deviendra

$$(A'') \quad \Sigma A_m m \cos mx + X + Y = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\mu) \cos m\mu \, d\mu.$$

Dorénavant, c'est à l'équation (A″) que nous nous proposerons de satisfaire.

Dans le cas très-particulier où l'on a $f(x) =$ constante, on peut, comme on l'a dit plus haut, trouver par les méthodes ordinaires la valeur de A_m qui satisfait à l'équation (A″). En examinant attentivement cette valeur, on en conclut par induction que, dans le cas le plus général, où $f(x)$ est une fonction quelconque de x, il doit être permis de poser

$$A_m = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu(P\cos m\mu + Q\sin m\mu),$$

P et Q désignant des fonctions de μ indépendantes de m, qu'il s'agit de déterminer en sorte que l'équation (A″) ait lieu. Toutefois, on pourrait douter *à priori* de la possibilité d'écrire la valeur de A_m sous la forme précédente; mais comme nous arriverons par notre analyse à calculer P et Q, il nous sera facile de vérifier *à posteriori* l'exactitude de notre hypothèse.

Posons donc

$$A_m = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu(P\cos m\mu + Q\sin m\mu),$$

et voyons s'il existe en effet des fonctions de μ, indépendantes de m, qui, mises au lieu de P et Q, rendent la valeur de A_m propre à satisfaire à l'équation (A″).

Pour cela, calculons successivement, et mettons sous leur forme la plus simple les trois quantités $\Sigma A_m m\cos mx$, X, Y, dont se compose le premier membre de l'équation (A″).

En premier lieu, nous aurons

$$\Sigma A_m m\cos mx = \frac{4}{\pi}\ \Sigma m\cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu(P\cos m\mu + Q\sin m\mu);$$

or il vient, en intégrant par parties,

$$\int P\cos m\mu\, d\mu = \frac{P\sin m\mu}{m} - \frac{1}{m}\int \sin m\mu \frac{dP}{d\mu}\, d\mu$$

et

$$\int \mathrm{Q}\sin m\mu d\mu = -\frac{\mathrm{Q}\cos m\mu}{m} + \frac{1}{m}\int \cos m\mu \frac{d\mathrm{Q}}{d\mu}\, d\mu.$$

Si donc on se rappelle que m est un nombre impair, et si l'on suppose les fonctions P et Q assujetties aux conditions

$$\mathrm{P} = 0 \text{ pour } \mu = \frac{\pi}{2}, \qquad \mathrm{Q} = 0 \text{ pour } \mu = 0,$$

on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{P}\cos m\mu d\mu = -\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin m\mu \frac{d\mathrm{P}}{d\mu}\, d\mu,$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Q}\sin m\mu d\mu = \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\mu \frac{d\mathrm{Q}}{d\mu}\, d\mu;$$

d'où résulte

$$\Sigma \mathrm{A}_m m\cos mx = \frac{4}{\pi}\,\Sigma\cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \left(\cos m\mu \frac{d\mathrm{Q}}{d\mu} - \sin m\mu \frac{d\mathrm{P}}{d\mu}\right).$$

Le terme Y est également très-simple à former. En effet, on a

$$\mathrm{Y} = \Sigma\cos mx \left(\mathrm{R}_0\mathrm{A}_m + \frac{\mathrm{R}_2}{2}(\mathrm{A}_{m+2} + \mathrm{A}_{m-2}) + \frac{\mathrm{R}_4}{2}(\mathrm{A}_{m+4} + \mathrm{A}_{m-4}) + \ldots\right).$$

Les quantités A_{m+2}, A_{m-2}, A_{m+4}, A_{m-4}, etc., se déduisent de l'expression générale de A_m, en donnant à l'indice m une valeur convenable; et en observant que l'on a

$$\cos(m+n)\mu + \cos(m-n)\mu = 2\cos m\mu\cos n\mu,$$
$$\sin(m+n)\mu + \sin(m-n)\mu = 2\sin m\mu\cos n\mu,$$

on obtient sans difficulté :

$$\mathrm{A}_{m+2} + \mathrm{A}_{m-2} = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\cos 2\mu(\mathrm{P}\cos m\mu + \mathrm{Q}\sin m\mu)$$

$$\mathrm{A}_{m+4} + \mathrm{A}_{m-4} = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\cos 4\mu(\mathrm{P}\cos m\mu + \mathrm{Q}\sin m\mu).$$

. . . . . .

Au moyen de ces valeurs, je calcule celle de la quantité

$$R_0 A_m + \frac{R_2}{2}(A_{m+2} + A_{m-2}) + \frac{R_4}{2}(A_{m+4} + A_{m-4}) + \ldots,$$

et je la trouve égale à

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu (P\cos m\mu + Q\sin m\mu)(R_0 + R_2\cos 2\mu + R_4\cos 4\mu + \text{etc.})$$

Si l'on se rappelle maintenant que la série

$$R_0 + R_2\cos 2\mu + R_4\cos 4\mu + \ldots,$$

est précisément le développement de la fonction $f(\mu)$ entre les limites $\mu = 0$, $\mu = \frac{\pi}{2}$, on verra que l'expression précédente se réduit à

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu (Pf(\mu)\cos m\mu + Qf(\mu)\sin m\mu).$$

Par conséquent, on a

$$Y = \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu (Pf(\mu)\cos m\mu + Qf(\mu)\sin m\mu).$$

Calculons maintenant la valeur de X. Or cette valeur, réduite en série, est exprimée par l'égalité

$$X = b_1\cos x + b_3\cos 3x + b_5\cos 5x + \ldots,$$

Les coefficients b_1, b_3, b_5....., sont eux-mêmes exprimés par séries. Ainsi l'on a

$$b_1 = \frac{R_1}{2}(A_1 - A_{-1}) + \frac{R_3}{2}(A_3 - A_{-3}) + \frac{R_5}{2}(A_5 - A_{-5}) + \ldots\ldots$$

En mettant pour A_1, A_3, ...A_{-1}..., leurs valeurs, cette valeur de b_1 devient

$$b_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q d\mu (R_2\sin\mu + R_4\sin 3\mu + R_6\sin 5\mu + \ldots\ldots).$$

On trouvera de même

$$b_3 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q\,d\mu\,(R_4\sin\mu + R_6\sin 3\mu + R_8\sin 5\mu + ..),$$

$$b_5 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q\,d\mu\,(R_6\sin\mu + R_8\sin 3\mu + R_{10}\sin 5\mu + ..).$$

. . . . . .

Si l'on multiplie ces valeurs de b_1, b_3, b_5...., respectivement par les facteurs $\cos x$, $\cos 3x$, $\cos 5x$....., qu'on pourra faire passer sous le signe $\int$, puis qu'on ajoute les produits obtenus, la somme ainsi formée sera égale à X. En ordonnant la quantité placée sous le signe $\int$, par rapport aux lettres R_2, R_4, R_6,...., on pourra donc écrire X ainsi qu'il suit :

$$X = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q\,d\mu\,(R_2M_2 + R_4M_4 + R_6M_6 + R_8M_8 + ...),$$

les valeurs de M_2, M_4, M_6, M_8..... étant :

$$M_2 = \cos x\sin\mu,$$

$$M_4 = \cos x\sin 3\mu + \cos 3x\sin\mu,$$

$$M_6 = \cos x\sin 5\mu + \cos 3x\sin 3\mu + \cos 5x\sin\mu,$$

$$M_8 = \cos x\sin 7\mu + \cos 3x\sin 5\mu + \cos 5x\sin 3\mu + \cos 7x\sin\mu,$$

. . . . . .

En observant que si p désigne un nombre entier on a en général

$$\cos x\sin(2p-1)\mu + \cos 3x\sin(2p-3)\mu + ... + \cos(2p-1)x\sin\mu = \frac{\cos x\sin\mu(\cos 2px - \cos 2p\mu)}{\cos 2x - \cos 2\mu},$$

les valeurs de M_2, M_4, M_6, M_8.... se simplifient et deviennent

$$M_2 = \frac{\cos x \sin\mu(\cos 2x - \cos 2\mu)}{\cos 2x - \cos 2\mu},$$

$$M_4 = \frac{\cos x \sin\mu(\cos 4x - \cos 4\mu)}{\cos 2x - \cos 2\mu},$$

$$M_6 = \frac{\cos x \sin\mu(\cos 6x - \cos 6\mu)}{\cos 2x - \cos 2\mu},$$

$$M_8 = \frac{\cos x \sin\mu(\cos 8x - \cos 8\mu)}{\cos 2x - \cos 2\mu},$$

. . . . . .

Substituons ces valeurs dans celle de X, et rappelons-nous que l'on a

$$f(x) = R_0 + R_2\cos 2x + R_4\cos 4x + \text{etc.},$$
$$f(\mu) = R_0 + R_2\cos 2\mu + R_4\cos 4\mu + \text{etc.};$$

nous obtiendrons

$$X = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q\cos x \sin\mu(f(x) - f(\mu))d\mu}{\cos 2x - \cos 2\mu},$$

ou bien, en remplaçant, ce qui est permis, la lettre μ par la lettre α, et désignant par Q_α ce que devient Q en vertu de ce changement :

$$X = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_\alpha \cos x \sin\alpha(f(x) - f(\alpha))d\alpha}{\cos 2x - \cos 2\alpha}.$$

La fonction désignée par X est une fonction paire de x, qui s'évanouit pour $x = \frac{\pi}{2}$. Entre les deux limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, on peut la développer en une série de cosinus d'arcs multiples impairs de x. Et par la méthode ordinaire on trouve

$$X = \frac{16}{\pi^2}\Sigma\cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos m\mu d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_\alpha \cos\mu \sin\alpha(f(\mu) - f(\alpha))d\alpha}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha}.$$

Les expressions des trois quantités $\Sigma A_m m\cos mx$, X, Y, une fois formées, il faut les reporter dans l'équation (A''). Pour simplifier l'écriture, posons

$$U = \frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) - F(\mu) + \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_\alpha \cos\mu \sin\alpha (f(\mu) - f(\alpha))\, d\alpha}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha},$$

$$V = \frac{dP}{d\mu} - Qf(\mu);$$

et nous verrons facilement qu'après avoir effectué la substitution dont il s'agit, on peut mettre l'équation (A'') sous la forme :

$$\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu (U \cos m\mu - V \sin m\mu) = 0.$$

Or cette dernière égalité sera évidemment satisfaite, si les valeurs de P et Q sont telles qu'on ait à la fois $U = 0$ et $V = 0$.

Donc la détermination des deux quantités P et Q dépend des deux équations

$$\frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) = F(\mu) - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_\alpha \cos\mu \sin\alpha (f(\mu) - f(\alpha)) d\alpha}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha},$$

$$\frac{dP}{d\mu} - Qf(\mu) = 0,$$

auxquelles il ne faut pas oublier de joindre les conditions définies

$$P = 0 \text{ pour } \mu = \frac{\pi}{2}, \qquad Q = 0 \text{ pour } \mu = 0,$$

que nous avons supposées satisfaites en effectuant tout à l'heure une intégration par parties. Les équations auxquelles nous venons d'arriver sont remarquables en ce que la fonction Q se trouve placée à la fois sous un signe d'intégration définie et hors de ce même signe. Plusieurs questions d'analyse élevée mènent à de semblables égalités; et nous avons déjà eu l'occasion d'en traiter quelques-unes lorsque nous nous sommes occupé des différentielles à indices quelconques.

Lorsque la fonction $f(x)$ est égale à une constante b, nos équations deviennent

$$\frac{dQ}{d\mu} + bP = F(\mu), \qquad \frac{dP}{d\mu} - bQ = 0;$$

il est très-facile de les intégrer, et la valeur de A_m, à laquelle elles conduisent, coïncide, après quelques transformations, avec celle que fournit la méthode ordinaire. Mais il est inutile d'entrer ici dans le détail de ces transformations qui n'ont rien de remarquable.

Si l'on veut vérifier l'exactitude de nos équations en les appliquant à un exemple, dans lequel $f(x)$ soit une quantité variable et qui, cependant, n'exige pas de calculs compliqués, on n'a qu'à faire $f(x) = \cos^2 x$, et $F(x) = \frac{3}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos^5 x$. On trouve alors $P = -\frac{1}{2}\cos^3\mu$, $Q = \sin\mu$, valeurs dont il est aisé de constater l'exactitude en les substituant dans nos équations. Il résulte donc de notre analyse qu'en posant

$$A_m = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu(\sin\mu\sin m\mu - \tfrac{1}{2}\cos^3\mu\cos m\mu),$$

on doit avoir

$$\Sigma A_m m\cos mx + \cos^2 x \Sigma A_m \cos mx = \tfrac{3}{2}\cos x - \tfrac{1}{2}\cos^5 x.$$

D'après la valeur de A_m, la quantité $\Sigma A_m \cos mx$ est la différence de deux autres quantités dont la première, savoir :

$$\frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\sin\mu\sin m\mu$$

est égale à $\cos x$, et dont la seconde, savoir :

$$\frac{4}{3\pi}\Sigma\cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\mu\cos m\mu d\mu$$

est égale à $\frac{1}{2}\cos^3 x$. On a par conséquent

$$\Sigma A_m \cos mx = \cos x - \tfrac{1}{8}\cos^3 x = \tfrac{3}{4}\cos x - \tfrac{1}{12}\cos 3x,$$

d'où

$$\Sigma A_m m\cos mx = \tfrac{3}{4}\cos x - \tfrac{1}{4}\cos 3x.$$

L'équation que nous voulons vérifier devient donc

$$\tfrac{5}{4}\cos x - \tfrac{1}{4}\cos 3x + \cos^2 x(\cos x - \tfrac{1}{5}\cos^3 x) = \tfrac{5}{2}\cos x - \tfrac{1}{5}\cos^5 x.$$

Or en effectuant les calculs et remettant pour $\cos 3x$ sa valeur $4\cos^3 x - 3\cos x$, on trouve qu'elle est identique, comme cela doit être.

Pour montrer comment nos équations font connaître les valeurs de P et Q, je vais considérer le cas particulier très-simple où l'on a

$$f(x) = \mathrm{R}_0 + \mathrm{R}_2\cos 2x.$$

De cette valeur de $f(x)$ il résulte que

$$\frac{f(\mu) - f(\alpha)}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha} = \mathrm{R}_2.$$

Les équations en P et Q sont donc ici

$$\frac{d\mathrm{Q}}{d\mu} + \mathrm{P}f(\mu) = \mathrm{F}(\mu) - \frac{4\mathrm{R}_2\cos\mu}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Q}_\alpha \sin\alpha\, d\alpha,$$

$$\frac{d\mathrm{P}}{d\mu} - \mathrm{Q}f(\mu) = 0.$$

Posons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Q}_\alpha \sin\alpha\, d\alpha = \mathrm{C}$; C sera une constante inconnue que nous déterminerons à la fin du calcul. Si nous divisons maintenant nos deux équations par $f(\mu)$ et si nous posons $f(\mu)d\mu = d\theta$, θ désignant une nouvelle variable égale à $\mathrm{R}_0\mu + \frac{\mathrm{R}_2}{2}\sin 2\mu$, elles deviendront

$$\frac{d\mathrm{Q}}{d\theta} + \mathrm{P} = \frac{\mathrm{F}(\mu)}{f(\mu)} - \frac{4\mathrm{CR}_2\cos\mu}{\pi f(\mu)},$$

$$\frac{d\mathrm{P}}{d\theta} - \mathrm{Q} = 0;$$

ou bien, en éliminant Q,

$$\frac{d^2\mathrm{P}}{d\theta^2} + \mathrm{P} = \frac{\mathrm{F}(\mu)}{f(\mu)} - \frac{4\mathrm{CR}^2\cos\mu}{\pi f(\mu)}.$$

Cette équation du second ordre est facile à intégrer, soit par la méthode ordinaire, soit en procédant comme on va le voir.

L'égalité $\theta = R_0\mu + \frac{R_2}{2}\sin 2\mu = \int_0^\mu f(\mu)d\mu$, dans laquelle $f(\mu)$ est une fonction toujours positive depuis $\mu = 0$ jusqu'à $\mu = \frac{\pi}{2}$, nous prouve que θ est une fonction positive croissante dans le même intervalle; en sorte que θ grandit par degrés insensibles depuis $\theta = 0$ jusqu'à la valeur extrême $\theta = \frac{R_0\pi}{2}$ que nous désignerons par ω. En vertu de cette même égalité, μ est une fonction de θ, et on peut en dire autant des deux quantités $\frac{F(\mu)}{f(\mu)}$, $\frac{4R_2\cos\mu}{\pi f(\mu)}$. De plus, ces deux quantités s'évanouissent lorsqu'on a $\mu = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\theta = \omega$. Donc, entre les limites $\theta = 0$, $\theta = \omega$, on peut, par ces méthodes connues, développer :

$$\frac{F(\mu)}{f(\mu)}, \qquad \frac{4R_2\cos\mu}{\pi f(\mu)},$$

en séries de la forme :

$$\frac{F(\mu)}{f(\mu)} = \Sigma H\cos\frac{m\pi\theta}{2\omega}, \qquad \frac{2R_2\cos\mu}{\pi f(\mu)} = \Sigma K\cos\frac{m\pi\theta}{2\omega},$$

m désignant un nombre impair quelconque. On aura ensuite

$$\frac{d^2P}{d\theta^2} + P = \Sigma H\cos\frac{m\pi\theta}{2\omega} - C\Sigma K\cos\frac{m\pi\theta}{2\omega},$$

et on satisfera à cette équation en posant

$$P = 4\Sigma\frac{H\cos\frac{m\pi\theta}{2\omega}}{4\omega^2 - m^2\pi^2} - 4C\omega^2\Sigma\frac{K\cos\frac{m\pi\theta}{2\omega}}{4\omega^2 - m^2\pi^2}.$$

La valeur de P, différenciée par rapport à θ, fournit celle de Q. Ainsi l'on a

$$Q = -2\omega\pi\Sigma\frac{mH\sin\frac{m\pi\theta}{2\omega}}{4\omega^2 - m^2\pi^2} + 2C\omega\pi\Sigma\frac{mK\sin\frac{m\pi\theta}{2\omega}}{4\omega^2 - m^2\pi^2}.$$

Quoique la valeur de P ne soit qu'une intégrale particulière de l'équation du second ordre qui détermine P, cette intégrale particulière suffit pour le moment; car les conditions définies

$$P = 0, \text{ pour } \mu = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \theta = \omega,$$

$$Q = 0, \text{ pour } \mu = 0 \text{ ou } \theta = 0,$$

qui doivent servir à déterminer les deux constantes arbitraires, sont ici satisfaites d'elles-mêmes.

La quantité inconnue C, qui reste encore dans nos formules, doit être telle que l'on ait

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \sin\alpha d\alpha = C.$$

En formant l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \sin\alpha d\alpha$ et l'égalant à C, nous déterminerons donc cette constante, et nous trouverons

$$C = -\frac{2\omega\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha d\alpha \Sigma \frac{m\mathrm{H}\sin\frac{m\pi\theta\alpha}{2\omega}}{4\omega^2 - m^2\pi^2}}{1 - 2\omega\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha d\alpha \Sigma \frac{m\mathrm{K}\sin\frac{m\pi\theta\alpha}{2\omega}}{4\omega^2 - m^2\pi^2}},$$

$\theta\alpha$ étant ce que devient θ lorsqu'on y remplace μ par α, en sorte que $\theta\alpha = R_0\alpha + \frac{R_2}{2}\sin 2\alpha$. La valeur de C étant ainsi connue, il ne reste plus rien d'indéterminé dans les expressions de P et Q; et la recherche de ces expressions est terminée.

En général les équations

$$\frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) = F(\mu) - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_\alpha \cos\mu \sin\alpha (f(\mu) - f(\alpha)) d\alpha}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha},$$

$$\frac{dP}{d\mu} - Qf(\mu) = 0,$$

feront connaître les valeurs de P et Q, sous forme finie, toutes les fois que la fraction

$$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos\mu\sin\alpha(f(\mu)-f(\alpha))}{\cos 2\mu-\cos 2\alpha}$$

pourra être ramenée à la forme

$$\Psi_1(\mu)\Pi_1(\alpha)+\Psi_2(\mu)\Pi_2(\alpha)+\ldots\ldots+\Psi_n(\mu)\Pi_n(\alpha),$$

quelles que soient d'ailleurs les fonctions $\Psi_1(\mu)$, $\Pi_1(\alpha)$, etc. En effet, dans cette hypothèse, si l'on pose

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q\alpha\Pi_1(\alpha)d\alpha = C_1,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q\alpha\Pi_2(\alpha)d\alpha = C_2,\ldots\ldots$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q\alpha\Pi_n(\alpha)d\alpha = C_n,$$

on aura

$$\frac{dQ}{d\mu}+Pf(\mu) = F(\mu) - C_1\Psi_1(\mu) - C_2\Psi_2(\mu) -\ldots- C_n\Psi_n(\mu),$$

$$\frac{dP}{d\mu} - Qf(\mu) = 0.$$

Ces deux équations différentielles du second ordre sont faciles à intégrer, puisqu'en posant $\int_0^{\mu} f(\mu)d\mu = \theta$, et prenant θ pour variable indépendante, les coefficients des quantités P, Q, et de leurs différentielles $\frac{dP}{d\theta}$, $\frac{dQ}{d\theta}$ se réduisent à de simples constantes. L'intégration effectuée, on déterminera d'abord les deux constantes arbitraires que cette intégration introduit, en faisant usage des conditions définies $P = 0$ pour $\mu = \frac{\pi}{2}$, $Q = 0$ pour $\mu = 0$. Ensuite on chassera C_1, C_2..... C_n en ayant égard aux n égalités

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q\alpha\Pi_1(\alpha)d\alpha = C_1,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q\alpha\Pi_2(\alpha)d\alpha = C_2,\ldots$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q\alpha\Pi_n(\alpha)d\alpha = C_n,$$

et, quand on aura terminé ces calculs d'élimination, les valeurs de P et Q en général ne renfermeront plus rien d'indéterminé.

Reste à savoir maintenant dans quel cas la fraction

$$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos\mu\sin\alpha(f(\mu)-f(\alpha))}{\cos 2\mu-\cos 2\alpha},$$

ou, ce qui revient au même, la fraction

$$\frac{f(\mu)-f(\alpha)}{\cos 2\mu-\cos 2\alpha}=\frac{1}{2}\,\frac{f(\mu)-f(\alpha)}{\cos^2\mu-\cos^2\alpha}$$

peut être ramenée à la forme citée $\Psi_1(\mu)\Pi_1(\alpha)+$ etc. Or je dis que cela arrivera toutes les fois que $f(x)$ sera une fonction rationnelle, entière ou fractionnaire de $\cos^2 x$.

Supposons, en effet, qu'on ait $f(\mu)=\frac{f_1(\mu)}{f_2(\mu)}$, $f_1(\mu)$ et $f_2(\mu)$ désignant des fonctions entières de $\cos^2\mu$. On aura, en changeant μ en α $f(\alpha)=\frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)}$. Par conséquent,

$$\frac{f(\mu)-f(\alpha)}{\cos^2\mu-\cos^2\alpha}=\frac{f_1(\mu)f_2(\alpha)-f_1(\alpha)f_2(\mu)}{f_2(\mu)f_2(\alpha)(\cos^2\mu-\cos^2\alpha)}.$$

Pour démontrer la proposition énoncée, il suffit évidemment de faire voir que la quantité

$$\frac{f_1(\mu)f_2(\alpha)-f_1(\alpha)f_2(\mu)}{\cos^2\mu-\cos^2\alpha}$$

est réductible à la forme $\Psi_1(\mu)\Pi_1(\alpha)+\Psi_2(\mu)\Pi_2(\alpha)+\ldots+\Psi_n(\mu)\Pi_n(\alpha)$. Or rien n'est plus facile : en effet, la fonction $f_1(\mu)f_2(\alpha)-f_1(\alpha)f_2(\mu)$ étant une fonction entière de $\cos^2\mu$, $\cos^2\alpha$, et s'annulant quand on a $\cos^2\mu=\cos^2\alpha$, elle doit être divisible par $\cos^2\mu-\cos^2\alpha$, et le résultat de la division ne peut se composer que d'un nombre limité de termes de la forme $A\cos^{2p}\mu\cos^{2q}\alpha$.

Les équations

$$\frac{dQ}{d\mu}+Pf(\mu)=F(\mu)-\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Q\alpha\cos\mu\sin\alpha(f(\mu)-f(\alpha))d\alpha}{\cos 2\mu-\cos 2\alpha}$$

$$\frac{dP}{d\mu}-Qf(\mu)=0,$$

s'intégreront donc, sous forme finie, par notre méthode, toutes les fois que le pouvoir rayonnant $f(x)$ sera exprimé par une fonction rationnelle quelconque de $\cos^2 x$. A plus forte raison s'intégreront-elles si la valeur de $f(x)$ est de la forme

$$f(x) = R_0 + R_2\cos 2x + R_4\cos 4x + \ldots + R_n\cos nx,$$

n désignant un nombre pair; car le second membre peut être réduit à une fonction entière de $\cos^2 x$.

Maintenant, quelle que soit la valeur de $f(x)$, nous pouvons toujours la développer en série et poser

$$f(x) = R_0 + R_2\cos 2x + R_4\cos 4x + \ldots + R_n\cos nx + \ldots,$$

En prenant dans le second membre un nombre limité de termes, on aura une première valeur approchée de $f(x)$: en la traitant comme si elle était rigoureusement exacte, on pourra donc en déduire aussi des valeurs approchées de P et Q; et il ne restera plus qu'à les corriger par la méthode connue des approximations successives.

En résumé, nous sommes parvenu à obtenir, dans tous les cas possibles, les valeurs de P et Q exactes ou indéfiniment approchées, et par conséquent, à trouver la valeur de A_m qui satisfait à l'équation

$$(A) \qquad \Sigma A_m m\cos mx + f(x)\Sigma A_m\cos mx = F(x).$$

La valeur de A_m est égale à $\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\mu(P\cos m\mu + Q\sin m\mu)$; elle s'exprime sous forme finie toutes les fois que $f(x)$ est une fonction rationnelle de $\cos^2 x$. La méthode qui nous a conduit à ces résultats est directe, mais un peu longue. Quand on examine avec soin la forme des équations qui déterminent P et Q, on en découvre une autre beaucoup plus simple que je vais exposer.

III.

SECONDE SOLUTION DU PROBLÈME (A). — SOLUTIONS DES PROBLÈMES (B) ET (C).

Pour satisfaire à l'équation (A), nous remplacerons, comme tout à l'heure, $F(x)$ par son développement, et posant

$$A_m = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu(P\cos m\mu + Q\sin m\mu),$$

nous chercherons à déterminer les deux fonctions P et Q, en sorte que l'on ait

$$\Sigma A_m m\cos mx + f(x)\Sigma A_m \cos mx = \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\mu F(\mu)d\mu.$$

Si nous admettons que P et Q satisfassent aux conditions définies

$$P = 0 \text{ pour } \mu = \frac{\pi}{2},\ Q = 0 \text{ pour } \mu = 0,$$

une intégration par parties nous donnera de suite

$$\Sigma A_m m\cos mx = \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\left(\cos m\mu\frac{dQ}{d\mu} - \sin m\mu\frac{dP}{d\mu}\right).$$

En désignant par P_x ce que devient P, quand on y change μ en x, nous voyons que P_x s'évanouit à la limite $x = \frac{\pi}{2}$. On peut donc, entre les limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, développer P_x en une série de cosinus d'arcs multiples impairs de x, ce qui donne

$$P_x = \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} P\cos m\mu d\mu.$$

On aura de même

$$\mathrm{P}_x f(x) = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_o^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{P} f(\mu) \cos m\mu d\mu ,$$

et il en résulte, en mettant pour P_x sa valeur

$$\frac{4f(x)}{\pi} \Sigma \cos mx \int_o^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{P} \cos m\mu d\mu = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_o^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{P} f(\mu) \cos m\mu d\mu .$$

D'un autre côté, on a l'équation identique

$$\frac{4f(x)}{\pi} \Sigma \cos mx \int_o^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Q} \sin m\mu d\mu = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_o^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Q} f(\mu) \sin m\mu d\mu$$
$$+ \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_o^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Q}(f(x) - f(\mu)) \sin m\mu d\mu .$$

En l'ajoutant, membre à membre, à la précédente, on obtient d'une part la quantité

$$\frac{4f(x)}{\pi} \Sigma \cos mx \int_o^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{P} \cos m\mu d\mu + \frac{4f(x)}{\pi} \Sigma \cos mx \int_o^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Q} \sin m\mu d\mu ,$$

qui, d'après la valeur de A_m, est précisément égale à $f(x)\Sigma \mathrm{A}_m \cos mx$; et, d'autre part, la quantité

$$\frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_o^{\frac{\pi}{2}} d\mu (\mathrm{P} f(\mu) \cos m\mu + \mathrm{Q} f(\mu) \sin m\mu)$$
$$+ \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_o^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Q}(f(x) - f(\mu)) \sin m\mu d\mu ,$$

laquelle, par conséquent, doit être aussi équivalente à $f(x)\Sigma \mathrm{A}_m \cos mx$.

Après avoir ainsi formé les valeurs de $\Sigma \mathrm{A}_m m \cos mx$, et de $f(x)\Sigma \mathrm{A}_m \cos mx$, je les ajoute, et en faisant, pour plus de simplicité,

$$X = \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\left(\cos m\mu\left(Pf(\mu)+\frac{dQ}{d\mu}\right)\right.$$
$$\left.+\sin m\mu\left(Qf(\mu)-\frac{dP}{d\mu}\right)\right),$$

$$Y = \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q(f(x)-f(\mu))\sin m\mu d\mu,$$

je trouve

$$\Sigma A_m m\cos mx + f(x)\Sigma A_m\cos mx = X+Y.$$

En comparant cette équation à celle du problème, il vient

$$X+Y = \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos m\mu F(\mu)d\mu.$$

La valeur de X est mise sous une forme convenable; mais il n'en est pas de même de celle de Y. Pour atteindre le but que nous nous proposons, il est nécessaire d'intervertir l'ordre des signes Σ et $\int$, ce qui donne

$$Y = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q(f(x)-f(\mu))d\mu\Sigma\cos mx\sin m\mu.$$

Par la méthode connue pour la sommation des séries de sinus, on obtient

$$(f(x)-f(\mu))\Sigma\cos mx\sin m\mu = \frac{\cos x\sin\mu(f(x)-f(\mu))}{\cos 2x-\cos 2\mu},$$

et il est bon d'observer que, à cause du facteur $f(x)-f(\mu)$ qui s'évanouit lorsque $x=\mu$, la fraction placée dans le second membre ne devient jamais infinie. Je porte cette fraction dans la valeur de Y, et je substitue en même temps à la lettre μ une autre lettre α, ce qui est indifférent. Il vient ainsi

$$Y = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Q_\alpha\cos x\sin\alpha(f(x)-f(\alpha))d\alpha}{\cos 2x-\cos 2\alpha},$$

Q_α désignant ce que devient Q lorsqu'on y change μ en α. Mais la fonction Y, ayant $\cos x$ pour facteur, s'évanouit quand $x = \frac{\pi}{2}$: donc, entre les limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, on peut développer cette fonction en une série de cosinus d'arcs multiples impairs de x. La méthode ordinaire, appliquée ici, nous donne

$$Y = \frac{16}{\pi^2} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\mu d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_\alpha \cos\mu \sin\alpha (f(\mu) - f(\alpha)) d\alpha}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha},$$

et c'est sous cette forme que la valeur de Y doit être employée.

Remettons-la en effet, ainsi que celle de X, dans l'équation

$$X + Y = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\mu F(\mu) d\mu,$$

et le résultat de la substitution, sera

$$\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu (U \cos m\mu - V \sin m\mu) = 0,$$

U et V ayant les valeurs que voici :

$$U = \frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) - F(\mu) + \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_\alpha \cos\mu \sin\alpha (f(\mu) - f(\alpha)) d\alpha}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha},$$

$$V = \frac{dP}{d\mu} - Pf(\mu).$$

Or, il est évident que l'équation

$$\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu (U \cos m\mu - V \sin m\mu) = 0,$$

sera satisfaite si U et V sont nuls à la fois. Donc les deux équations $U = 0$, $V = 0$, sont celles qui doivent déterminer les inconnues P et Q, pourvu qu'on y joigne toutefois les conditions définies

$$P = 0 \text{ pour } \mu = \frac{\pi}{2}, \qquad Q = 0 \text{ pour } \mu = 0;$$

ce qui coïncide avec les résultats obtenus dans le numéro précédent.

Le problème (A) une fois résolu, on en déduit bien facilement les solutions des problèmes (B) et (C). Le premier de ces nouveaux problèmes peut être énoncé comme ceci.

PROBLÈME.

Soient m un nombre impair quelconque, et $A_1, A_3 \ldots\ldots, A_m \ldots\ldots$ *des coefficients constants inconnus. On propose de trouver la valeur de* A_m *qui satisfait à l'équation*

$$(B) \qquad \Sigma A_m \frac{m\pi}{2l} \cos\frac{m\pi x}{2l} + f(x)\Sigma A_m \cos\frac{m\pi x}{2l} = F(x),$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x = 0$, $x = l$.

La fonction $f(x)$ est essentiellement positive, et nous regardons la fonction $F(x)$ comme assujettie à la condition $F(l) = 0$.

Pour ramener ce problème au précédent, il suffira de poser $\frac{\pi x}{2l} = y$, puis de multiplier par $\frac{2l}{\pi}$ l'équation (B). Il viendra.

$$\Sigma A_m m \cos my + \frac{2l}{\pi} f\left(\frac{2ly}{\pi}\right) \Sigma A_m \cos my = \frac{2l}{\pi} F\left(\frac{2ly}{\pi}\right),$$

et cette nouvelle équation devra subsister entre les limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, comme l'équation (A) dont nous nous sommes occupés tout à l'heure. Par conséquent, si nous posons

$$A_m = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu (P\cos m\mu + Q\sin m\mu),$$

P et Q devront satisfaire aux deux équations

$$\frac{dQ}{d\mu} + \frac{2l}{\pi} P f\left(\frac{2l\mu}{\pi}\right) = \frac{2l}{\pi} F\left(\frac{2l\mu}{\pi}\right) - \frac{8l}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q\alpha\cos\mu\sin\alpha\left(f\left(\frac{2l\mu}{\pi}\right) - f\left(\frac{2l\alpha}{\pi}\right)\right)d\alpha}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha}$$

$$\frac{dP}{d\mu} - \frac{2l}{\pi} Q f\left(\frac{2l\mu}{\pi}\right) = 0.$$

On les simplifiera un peu en changeant les variables α et μ en d'autres variables α' et μ' liées aux deux autres par les égalités

$$\alpha = \frac{\pi\alpha'}{2l}, \qquad \mu = \frac{\pi\mu'}{2l};$$

ou, ce qui revient au même, en remplaçant partout α et μ par $\frac{\pi\alpha}{2l}$, $\frac{\pi\mu}{2l}$, ce qui exige que l'on prenne 0 et l, au lieu de 0 et $\frac{\pi}{2}$ pour limites des intégrales définies. Par ces changements on trouvera

$$A_m = \frac{2}{l}\int_0^l d\mu\left(P\cos\frac{m\pi\mu}{2l} + Q\sin\frac{m\pi\mu}{2l}\right),$$

P et Q étant deux fonctions de μ déterminées par les deux équations

$$\frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) = F(\mu) - \frac{2}{l}\int_0^l \frac{Q\alpha\cos\frac{\pi\mu}{2l}\sin\frac{\pi\alpha}{2l}\left(f(\mu) - f(\alpha)\right)d\alpha}{\cos\frac{\pi\mu}{l} - \cos\frac{\pi\alpha}{l}}$$

$$\frac{dP}{d\mu} - Qf(\mu) = 0,$$

auxquelles toutefois il faudra joindre les deux conditions définies $P = 0$ pour $\mu = l$, $Q = 0$ pour $\mu = 0$.

En supposant la longueur l infiniment grande, la valeur de

A_m deviendra infiniment petite, et la somme $\Sigma A_m \cos mx$ se transformera en une intégrale. On posera alors $\frac{m\pi}{2l} = \theta$, et on regardera θ comme une variable continue. Puisque l'accroissement constant de m est $= 2$, l'accroissement constant de θ sera égal à $\frac{\pi}{l}$, et il faudra poser $d\theta = \frac{\pi}{l}$. En faisant donc $A_m = \varphi(\theta) d\theta$, les deux sommes $\Sigma A_m \cos \frac{m\pi x}{2l}$, $\Sigma A_m \frac{m\pi}{2l} \cos \frac{m\pi x}{2l}$ se transformeront dans les deux intégrales définies

$$\int_0^\infty \varphi(\theta) \cos\theta x d\theta, \qquad \int_0^\infty \theta\varphi(\theta) \cos\theta x d\theta;$$

et l'équation (B) deviendra

$$\int_0^\infty \theta\Phi(\theta) \cos\theta x d\theta + f(x) \int_0^\infty \varphi(\theta) \cos\theta x d\theta = F(x).$$

Cela posé, proposons-nous le problème suivant.

PROBLÈME.

Trouver la fonction $\Phi(\theta)$ *qui satisfait à l'équation*

$$\text{(C)} \quad \int_0^\infty \theta\varphi(\theta) \cos\theta x d\theta + f(x) \int_0^\infty \varphi(\theta) \cos\theta x d\theta = F(x),$$

pour toutes les valeurs réelles et positives de x.

D'après ce qui précède, la valeur cherchée de $\varphi(\theta)$ s'obtiendra en divisant par $d\theta$ ou par $\frac{\pi}{l}$ la valeur de A_m, après qu'on y aura fait $\frac{m\pi}{2l} = \theta$, et $l = \infty$. On aura donc

$$\varphi(\theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\mu (P \cos\mu\theta + Q \sin\mu\theta),$$

et les valeurs de P et Q seront fournies par les deux équations

écrites plus haut. Mais, en y introduisant la condition $l = \infty$, la première de ces équations change un peu de forme. En effet, lorsque l devient une quantité infiniment grande, il est aisé de s'assurer qu'on a

$$\frac{2}{l} \cdot \frac{\cos\frac{\pi\mu}{2l}\sin\frac{\pi\alpha}{2l}}{\cos\frac{\pi\mu}{l} - \cos\frac{\pi\alpha}{l}} = -\frac{2\alpha}{\pi(\mu^2 - \alpha^2)}.$$

L'équation dont nous parlons devient par conséquent

$$\frac{d\mathrm{Q}}{d\mu} + \mathrm{P}f(\mu) = \mathrm{F}(\mu) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha \mathrm{Q}\alpha(f(\mu) - f(\alpha))d\alpha}{\mu^2 - \alpha^2},$$

et il faudra y joindre l'autre équation

$$\frac{d\mathrm{P}}{d\mu} - \mathrm{Q}f(\mu) = 0,$$

ainsi que les conditions définies $\mathrm{P} = 0$ pour $\mu = \infty$, $\mathrm{Q} = 0$ pour $\mu = 0$. Sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans de plus grands détails, on comprendra que ces égalités permettent de trouver les valeurs finies de P et Q toutes les fois que $f(x)$ est une fonction rationnelle, entière ou fractionnaire, de x^2. Dans tous les autres cas, il sera aisé d'obtenir ces mêmes valeurs par la méthode des approximations successives.

IV.

SOLUTION DU PROBLÈME (D).

Appliquons maintenant notre seconde méthode à la solution du problème (D) dont voici l'énoncé :

PROBLÈME.

Soient m un quelconque des nombres entiers successifs 1, 2, 3, 4, 5,.... *et* A_1, A_2, A_3, A_4,... A_m.... *des coefficients cons-*

tants inconnus. On propose de déterminer ces coefficients de telle manière que l'on ait

$$\Sigma A_m m \sin mx + f(x)\Sigma A_m \sin mx = F(x)$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et π.

La fonction $f(x)$ est essentiellement positive. La fonction $F(x)$ peut être positive ou négative; mais, comme le premier membre s'évanouit pour $x = 0$ et pour $x = \pi$, nous admettrons qu'on a $F(0) = 0$ et $F(\pi) = 0$.

Les conditions $F(0) = 0$, $F(\pi) = 0$ étant satisfaites, on peut développer $F(x)$ en une série de sinus pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et π. Le développement est de la forme

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\Sigma \sin mx \int_0^\pi \sin m\mu F(\mu) d\mu.$$

L'équation (D) devient donc

$$\text{(D')} \qquad \Sigma A_m m \sin mx + f(x)\Sigma A_m \sin mx = \frac{2}{\pi}\Sigma \sin mx \int_0^\pi \sin m\mu P(\mu) d\mu.$$

Pour y satisfaire, nous poserons

$$A_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\mu (P\cos m\mu + Q\sin m\mu),$$

P et Q désignant deux fonctions de μ qu'il s'agit de déterminer convenablement.

En intégrant par parties, on a

$$\int P\cos m\mu d\mu = \frac{P\sin m\mu}{m} - \frac{1}{m}\int \sin m\mu \frac{dP}{d\mu} d\mu,$$

$$\int Q\sin m\mu d\mu = -\frac{Q\cos m\mu}{m} + \frac{1}{m}\int \cos m\mu \frac{dQ}{d\mu} d\mu;$$

si donc on se rappelle que m est un nombre entier, et si on suppose la fonction $\mathbf{Q}$ assujettie aux deux conditions

$$\mathbf{Q} = 0 \text{ pour } \mu = 0, \qquad \mathbf{Q} = 0 \text{ pour } \mu = \pi,$$

il viendra

$$\int_0^\pi \mathrm{P}\cos m\mu d\mu = -\frac{1}{m}\int_0^\pi \sin m\mu \frac{d\mathrm{P}}{d\mu} d\mu,$$

$$\int_0^\pi \mathbf{Q}\sin m\mu d\mu = \frac{1}{m}\int_0^\pi \cos m\mu \frac{d\mathbf{Q}}{d\mu} d\mu,$$

et on aura

$$\mathrm{A}_m = \frac{2}{\pi m}\int_0^\pi d\mu\left(\cos m\mu \frac{d\mathbf{Q}}{d\mu} - \sin m\mu \frac{d\mathrm{P}}{d\mu}\right).$$

Cette valeur de A_m nous donne tout de suite

$$\Sigma \mathrm{A}_m m\cos mx = \frac{2}{\pi}\Sigma\cos mx \int_0^\pi d\mu\left(\cos m\mu \frac{d\mathbf{Q}}{d\mu} - \sin m\mu \frac{d\mathrm{P}}{d\mu}\right).$$

D'autre part on a

$$f(x)\Sigma \mathrm{A}_m \sin mx = \frac{2f(x)}{\pi}\Sigma\sin mx \int_0^\pi d\mu(\mathrm{P}\cos m\mu + \mathbf{Q}\sin m\mu).$$

Cette valeur se compose de deux parties que nous allons considérer l'une après l'autre. La seconde, savoir :

$$\frac{2f(x)}{\pi}\Sigma\sin mx \int_0^\pi \mathbf{Q}\sin m\mu d\mu,$$

est la plus simple à traiter. Comme la fonction $\mathbf{Q}$ est nulle aux deux limites $\mu = 0$, $\mu = \pi$, et qu'il en est de même du produit $\mathbf{Q}f(\mu)$, il en résulte que si on désigne par $\mathbf{Q}_x$ ce que devient $\mathbf{Q}$ en y changeant μ en x, on aura

$$\mathbf{Q}_x = \frac{2}{\pi}\Sigma\sin mx\int_0^\pi \mathbf{Q}\sin m\mu d\mu,$$

$$\mathbf{Q}_x f(x) = \frac{2}{\pi}\Sigma\sin mx\int_0^\pi \mathbf{Q}f(\mu)\sin m\mu d\mu.$$

En multipliant la première de ces égalités par $f(x)$, et la comparant ensuite à la seconde, on en déduit

$$\frac{2f(x)}{\pi}\Sigma\sin mx\int_0^\pi \mathbf{Q}\sin m\mu d\mu = \frac{2}{\pi}\Sigma\sin mx\int_0^\pi \mathbf{Q}f(\mu)\sin m\mu d\mu.$$

L'autre quantité, savoir :

$$\frac{2f(x)}{\pi}\Sigma\sin mx\int_0^\pi \mathbf{P}\cos m\mu d\mu,$$

peut être mise sous la forme

$$\frac{2}{\pi}\Sigma\sin mx\int_0^\pi \mathbf{P}f(\mu)\cos m\mu d\mu + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathbf{P}(f(x)-f(\mu))d\mu\Sigma\sin mx\cos m\mu;$$

ou bien, en observant que l'on a

$$\Sigma\sin mx\cos m\mu = -\frac{\sin x}{2(\cos x-\cos\mu)},$$

sous cette autre forme

$$\frac{2}{\pi}\Sigma\sin mx\int_0^\pi \mathbf{P}f(\mu)\cos m\mu d\mu - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\mathbf{P}\sin x(f(x)-f(\mu))d\mu}{\cos x-\cos\mu}.$$

Le dernier terme ne change pas de valeur si l'on remplace la lettre μ par la lettre α. En nommant $\mathbf{P}_\alpha$ ce que devient P en vertu de ce changement, il est égal à

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{P_\alpha \sin x(f(x)-f(\alpha))d\alpha}{\cos x-\cos\alpha}.$$

C'est une fonction de x qui s'évanouit, à cause du facteur $\sin x$, aux deux limites $x=0$, $x=\pi$, et que par conséquent on peut, entre ces limites, développer en une série de sinus. Effectuant le développement par le procédé ordinaire, nous aurons

$$\int_0^\pi \frac{P_\alpha \sin x(f(x)-f(\alpha))d\alpha}{\cos x-\cos\alpha} = \frac{2}{\pi}\Sigma \sin mx \int_0^\pi \sin m\mu d\mu \int_0^\pi \frac{P_\alpha \sin\mu(f(\mu)-f(\alpha))d\alpha}{\cos\mu-\cos\alpha}.$$

La valeur de la quantité

$$\frac{2f(x)}{\pi}\Sigma \sin mx \int_0^\pi P\cos m\mu d\mu,$$

est donc

$$\frac{2}{\pi}\Sigma \sin mx \int_0^\pi P f(\mu)\cos m\mu d\mu - \frac{2}{\pi^2}\Sigma \sin mx \int_0^\pi \sin m\mu d\mu \int_0^\pi \frac{P\alpha \sin\mu(f(\mu)-f(\alpha))d\alpha}{\cos\mu-\cos\alpha},$$

et il faut ajouter à cette dernière expression l'expression suivante :

$$\frac{2}{\pi}\Sigma \sin mx \int_0^\pi Q f(\mu)\sin m\mu d\mu,$$

pour composer, d'après ce qu'on a vu, la valeur de $f(x)\Sigma A_m \sin mx$.

Ayant écrit ainsi, sous forme convenable, cette valeur et celle de $\Sigma A_m m \sin mx$, reportons-les dans l'équation (D'); et cette équation deviendra

$$\Sigma \sin mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu (\mathrm{U}\cos m\mu - \mathrm{V}\sin m\mu) = 0,$$

U et V ayant les valeurs suivantes :

$$\mathrm{U} = \frac{d\mathrm{Q}}{d\mu} + \mathrm{P}f(\mu),$$

$$\mathrm{V} = \frac{d\mathrm{P}}{d\mu} - \mathrm{Q}f(\mu) + \mathrm{F}(\mu) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{P}_\alpha \sin\mu (f(\mu) - f(\alpha))d\alpha}{\cos\mu - \cos\alpha}.$$

Or il est clair que l'équation du problème sera satisfaite si l'on a $\mathrm{U} = 0$, $\mathrm{V} = 0$. Donc les fonctions P et Q, desquelles dépend la valeur de A_m qui satisfait à l'équation (D), sont fournies par les deux équations

$$\frac{d\mathrm{Q}}{d\mu} + \mathrm{P}f(\mu) = 0,$$

$$\frac{d\mathrm{P}}{d\mu} - \mathrm{Q}f(\mu) + \mathrm{F}(\mu) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{P}_\alpha \sin\mu (f(\mu) - f(\alpha))d\alpha}{\cos\mu - \cos\alpha} = 0,$$

auxquelles il faut joindre les deux conditions particulières

$$\mathrm{Q} = 0 \text{ pour } \mu = 0, \quad \mathrm{Q} = 0 \text{ pour } \mu = \pi,$$

que précédemment nous avons supposées remplies.

Ces équations s'intègrent évidemment, sous forme finie, toutes les fois que $f(x)$ est une fonction rationnelle, entière ou fractionnaire de $\cos x$; et lorsque cela n'a pas lieu, il est du moins toujours facile d'obtenir les valeurs de P et Q exprimées en séries convergentes par la méthode connue des approximations successives.

Nous appliquerons nos équations à un seul exemple extrêmement simple, et quoique, dans cet exemple, la fonction $f(x)$ ne reste pas constamment positive, comme l'exige la nature physique

du problème, nous les verrons néanmoins se vérifier. Nous poserons $f(x)=\cos x$, $F(x)=\sin x+\sin x\cos x$: les valeurs de P et Q fournies par notre analyse seront $P = -1$, $Q = \sin\mu$, ainsi qu'il est aisé de le vérifier par la substitution dans nos équations. Il résulte de là que l'équation

$$\Sigma A_m m\sin mx+\cos x\Sigma A_m \sin mx = \sin x+\sin x\cos x,$$

doit être satisfaite en posant

$$A_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} d\mu(\sin\mu\sin m\mu - \cos m\mu).$$

Or cela arrive en effet, car on déduit de là

$$\Sigma A_m \sin mx = \sin x, \qquad \Sigma A_m m\sin mx = \sin x,$$

valeurs qui, substituées dans l'égalité qu'on veut vérifier, rendent les deux membres identiquement égaux.

V.

SOLUTION DU PROBLÈME (E).

Notre méthode résout aussi le problème (E) sans que l'on ait à vaincre aucune difficulté nouvelle. Voici comment ce problème doit être énoncé.

PROBLÈME.

Soient m un quelconque des nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5.... *et* A_0, A_1...., A_m...., B_1, B_2...., B_m.... *des coefficients constants inconnus. On propose de déterminer ces coefficients de manière à satisfaire à l'équation*

$$(E)\quad \Sigma m(A_m\cos mx+B_m\sin mx)+f(x)\Sigma(A_m\cos mx + B_m\sin mx) = F(x)$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x = -\pi$, $x = \pi$.

D'après la nature du problème qui conduit à l'équation (E), la fonction $f(x)$ est toujours positive entre les limites $x = -\pi$, $x = \pi$. De plus, les deux fonctions $f(x)$, $F(x)$ sont assujetties à satisfaire aux conditions $f(\pi) = f(-\pi)$, $F(\pi) = F(-\pi)$.

Puisque la fonction $F(x)$ prend la même valeur aux deux limites $x = -\pi$, $x = \pi$, on peut, entre ces limites, la développer en une série de cosinus de la forme

$$F(x) = \Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu F(\mu) \cos m(x - \mu),$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de m comprises dans la série 0, 1, 2, 3,.... et $\frac{1}{a_m}$ désignant l'intégrale définie $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 mx dx$, laquelle est égale à 2π quand $m = 0$, et seulement égale à π, lorsque m est un nombre entier positif quelconque.

Cela posé, je fais

$$A_m = a_m \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu (P \cos m\mu - Q \sin m\mu),$$

$$B_m = a_m \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu (P \sin m\mu + Q \cos m\mu),$$

P et Q représentant deux fonctions de μ, dont je pourrai disposer à volonté par la suite, mais que j'assujettis dès à présent à ne pas changer de valeur, lorsqu'on y pose successivement $\mu = \pi$ et $\mu = -\pi$, de telle manière que l'on ait $P_\pi = P_{-\pi}$, $Q_\pi = Q_{-\pi}$.

En intégrant par parties et ayant égard à ces conditions, il vient

$$A_m = -\frac{a_m}{m} \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu \left(\sin m\mu \frac{dP}{d\mu} + \cos m\mu \frac{dQ}{d\mu} \right),$$

$$B_m = \frac{a_m}{m} \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu \left(\cos m\mu \frac{dP}{d\mu} - \sin m\mu \frac{dQ}{d\mu} \right).$$

Substituant ces valeurs dans l'expression

$$\Sigma m(\mathrm{A}_m \cos mx + \mathrm{B}_m \sin mx),$$

on la trouve égale à

$$\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu \left(\sin m(x - \mu) \frac{d\mathrm{P}}{d\mu} - \cos m(x - \mu) \frac{d\mathrm{Q}}{d\mu} \right).$$

Quant à l'autre quantité

$$f(x)\Sigma(\mathrm{A}_m \cos mx + \mathrm{B}_m \sin mx),$$

il faut y substituer les valeurs primitives de A_m, B_m ; et elle devient

$$f(x)\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu (\mathrm{P}\cos m(x - \mu) + \mathrm{Q}\sin m(x - \mu)).$$

Elle se compose donc de deux parties, savoir :

$$f(x)\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{P}\cos m(x - \mu) d\mu,$$

$$f(x)\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Q}\sin m(x - \mu) d\mu,$$

dont je vais successivement m'occuper.

La première peut être mise sous une forme convenable par la transformation que voici. Soit P_x ce que devient P lorsqu'on y change μ en x. Puisque l'on a $\mathrm{P}_\pi = \mathrm{P}_{-\pi}, f(\pi) = f(-\pi)$, on a aussi $\mathrm{P}_\pi f(\pi) = \mathrm{P}_{-\pi} f(-\pi)$. Il résulte de là que la fonction P_x est égale à la série

$$\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{P}\cos m(x - \mu) d\mu,$$

et que, par conséquent, le produit de $f(x)$ par cette série est égal à $\mathrm{P}_x f(x)$, c'est-à-dire à

$$\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{P} f(\mu)\cos m(x - \mu)d\mu.$$

Relativement à la seconde partie, savoir :

$$f(x)\Sigma a_m \int_{+\pi}^{+\pi} \mathrm{Q}\sin m(x - \mu)d\mu$$

elle est évidemment équivalente à

$$\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Q} f(\mu)\sin m(x - \mu)d\mu$$

$$+ \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Q}(f(x) - f(\mu))\Sigma a_m \sin m(x - \mu).$$

Il est aisé de s'assurer que

$$\Sigma a_m \sin m(x - \mu) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin(x - \mu)}{1 - \cos(x - \mu)}.$$

On a donc

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Q}(f(x) - f(\mu))\Sigma a_m \sin m(x - \mu)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathrm{Q}(f(x) - f(\mu))\sin(x - \mu)d\mu}{1 - \cos(x - \mu)},$$

ou, ce qui revient au même

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Q}(f(x) - f(\mu))\Sigma a_m \sin m(x - \mu)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathrm{Q}_\alpha(f(x) - f(\alpha))\sin(x - \alpha)d\alpha}{-\cos(x - \alpha)},$$

Q_α désignant ce que devient Q lorsqu'on y change μ en α. Le second membre de l'équation que nous venons d'écrire étant considéré comme une fonction de x, on peut constater que cette

fonction donne le même résultat, quand on y pose $x = \pi$ et quand on y pose $x = -\pi$. Rien n'empêche, par conséquent, de la développer en une série de cosinus sous la forme

$$\frac{1}{2\pi}\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \cos m(x-\mu)d\mu \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{Q\alpha(f(\mu)-f(\alpha))\sin(\mu-\alpha)d\alpha}{1-\cos(\mu-\alpha)}.$$

Telle est la quantité qu'il faut ajouter à

$$\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} Qf(\mu)\sin m(x-\mu)d\mu,$$

et à

$$\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} Pf(\mu)\cos m(x-\mu)d\mu,$$

pour former la valeur complète du terme $f(x)\Sigma(A_m \cos mx + B_m \sin mx)$.

Reportons à présent dans l'équation (E) cette valeur ainsi que celles obtenues tout à l'heure pour $F(x)$ et pour $\Sigma m(A_m \cos mx + B_m \sin mx)$. Le résultat sur lequel nous tomberons sera de la forme

$$\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu(U\cos m(x-\mu)+V\sin m(x-\mu)) = 0,$$

U et V ayant les valeurs suivantes :

$$U = -\frac{dQ}{d\mu}+Pf(\mu) - F(\mu) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{Q_\alpha(f(\mu)-f(\alpha))\sin(\mu-\alpha)d\alpha}{1-\cos(\mu-\alpha)}$$

$$V = \frac{dP}{d\mu}+Qf(\mu).$$

Les équations $U = 0$ $V = 0$ sont donc celles que l'on devra traiter pour obtenir les valeurs de P et Q, en ayant soin toutefois d'y joindre les conditions définies $P_\pi = P_{-\pi}$, $Q_\pi = Q_{-\pi}$.

Si nous supposons qu'on ait par exemple $f(\mu) = \cos\mu$, $F(\mu) = -\sin\mu(1+\cos\mu)$, bien que la valeur attribuée à la fonction $f(x)$ soit étrangère à la question du mouvement de la chaleur, dans laquelle le pouvoir rayonnant est nécessairement positif, les équations $U = 0$, $V = 0$ nous conduiront à des résultats exacts. Nous trouverons $Q = 1$, $P = -\sin\mu$, valeurs faciles à vérifier, et qui donnent $A_m = 0$, quel que soit m, puis $B_1 = -1$, $B_2 = 0$, $B_3 = 0$,.... $B_m = 0$,... Ces valeurs de A_m, B_m doivent donc rendre identique l'équation

$$\Sigma m(A_m \cos mx + B_m \sin mx) + \cos x \Sigma(A_m \cos mx + B_m \sin mx) = -\sin x(1+\cos x);$$

et c'est ce qui arrive en effet.

Les équations $U = 0$, $V = 0$, s'intégreront sous forme finie, toutes les fois que la quantité

$$X = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(f(\mu) - f(\alpha))\sin(\mu - \alpha)}{1 - \cos(\mu - \alpha)}$$

pourra être ramenée à la forme

$$X = \Psi_1(\mu)\Pi_1(\alpha) + \Psi_2(\mu)\Pi_2(\alpha) + \ldots\ldots + \Psi_n(\alpha)\Pi_n(\alpha),$$

quelles que soient d'ailleurs les fonctions $\Psi_1(\mu)$, $\Pi_1(\alpha)$, etc. ; car alors, en posant

$$\int_{-\pi}^{+\pi} Q\alpha\Pi_1(\alpha)d\alpha = C_1, \int_{-\pi}^{+\pi} Q\alpha\Pi_2(\alpha)d\alpha = C_2, \ldots$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} Q\alpha\Pi_n(\alpha)d\alpha = C_n,$$

elles deviendront

$$\frac{dQ}{d\mu} - Pf(\mu) + F(\mu) - C_1\Psi_1(\mu) - C_2\Psi_2(\mu) - \ldots - C_n\Psi_n(\mu) = 0,$$

$$\frac{dP}{d\mu} + Qf(\mu) = 0.$$

En divisant ces équations par $f'(\mu)$, puis faisant $\int_o^{\mu} f'(\mu)d\mu = \theta$, $f'(\mu)d\mu = d\theta$, et prenant θ pour variable indépendante, on n'aura plus à traiter que deux équations linéaires simultanées dans lesquelles les variables et leurs différentielles seront affectées de coefficients constants. L'intégrale complète de ces équations renfermera deux arbitraires que l'on déterminera à l'aide des conditions définies $P_{\pi} = P_{-\pi}$, $Q_{\pi} = Q_{-\pi}$: elle renfermera en outre les n constantes C_1, C_2...., C_n dont on calculera les valeurs à l'aide des égalités

$$\int_{-\pi}^{+\pi} Q\alpha\Pi_1(\alpha)d\alpha = C_1, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} Q\alpha\Pi_2(\alpha)d\alpha = C_2, \ldots$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} Q\alpha\Pi_n(\alpha)d\alpha = C_n,$$

et, ce calcul une fois effectué, les valeurs de P et Q ne renfermeront plus en général que des quantités connues.

Je dis maintenant que X se ramènera à la forme indiquée, toutes les fois que $f(x)$ sera une fonction rationnelle quelconque de $\sin x$, $\cos x$, c'est à dire toutes les fois que l'on aura

$$f(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x)\sin x}{f_3(x)},$$

$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ désignant des fonctions rationnelles et entières de $\cos x$.

En effet, il viendra dans cette hypothèse

$$X = \frac{\sin(\mu - \alpha)}{1 - \cos(\mu - \alpha)} \cdot \frac{f_1(\mu)f_3(\alpha) - f_1(\alpha)f_3(\mu) + f_2(\mu)f_3(\alpha)\sin\mu - f_2(\alpha)f_3(\mu)\sin\alpha}{2\pi f_3(\alpha)f_3(\mu)}.$$

Mais on a

$$\frac{\sin(\mu - \alpha)}{1 - \cos(\mu - \alpha)} = \frac{\sin\mu + \sin\alpha}{\cos\alpha - \cos\mu}.$$

La valeur de X est donc composée de deux parties distinctes que je désignerai par X_1, X_2, et dont voici les valeurs :

$$X_1 = (\sin\mu + \sin\alpha)\,\frac{f_1(\mu)f_3(\alpha) - f_1(\alpha)f_3(\mu)}{2\pi(\cos\alpha - \cos\mu)},$$

$$X_2 = (\sin\mu + \sin\alpha)\,\frac{f_2(\mu)f_3(\alpha)\sin\mu - f_2(\alpha)f_3(\mu)\sin\alpha}{2\pi(\cos\alpha - \cos\mu)};$$

or, je puis prouver que chacune des deux quantités X_1, X_2 est réductible à la forme

$$\Psi_1(\mu)\Pi_1(\alpha) + \Psi_2(\mu)\Pi_2(\alpha) + \ldots + \Psi_n(\mu)\Pi_n(\alpha).$$

Cela est presqu'évident pour la fonction X_1 : en effet le numérateur $f_1(\mu)f_3(\alpha) - f_1(\alpha)f_3(\mu)$ étant une fonction entière de $\cos\alpha$, $\cos\mu$, et s'annulant quand on a $\cos\alpha = \cos\mu$, ce numérateur doit être divisible par $\cos\alpha - \cos\mu$; et il est clair que lequotient ne peut se composer que d'un nombre limité de termes de la forme $A\cos^p\mu\cos^q\alpha$.

Quant à la fonction X_2, en effectuant les calculs indiqués, je trouve

$$X_2 = \frac{f_2(\mu)f_3(\alpha)\sin^2\mu - f_2(\alpha)f_3(\mu)\sin^2\alpha}{2\pi(\cos\alpha - \cos\mu)} + \sin\alpha\sin\mu\,\frac{f_2(\mu)f_3(\alpha) - f_2(\alpha)f_3(\mu)}{2\pi(\cos\alpha - \cos\mu)}.$$

La fraction

$$\frac{f_2(\mu)f_3(\alpha)\sin^2\mu - f_2(\alpha)f_3(\mu)\sin^2\alpha}{2\pi(\cos\alpha - \cos\mu)}$$

est égale à

$$\frac{f_2(\mu)f_3(\alpha)(1 - \cos^2\mu) - f_2(\alpha)f_3(\mu)(1 - \cos^2\alpha)}{2\pi(\cos\alpha - \cos\mu)}.$$

son numérateur est donc une fonction entière de $\cos\alpha$, $\cos\mu$: puisque cette fonction s'annule lorsqu'on pose $\cos\alpha = \cos\mu$, elle doit être divisible par $\cos\alpha - \cos\mu$, et le quotient ne peut se composer que d'un nombre limité de termes de la forme

$A\cos^p\mu\cos^q\alpha$. Il en est de même, par la même raison, de la fraction

$$\frac{f_2(\mu)f_3(\alpha) - f_3(\alpha)f_3(\mu)}{\cos\alpha - \cos\mu}.$$

Donc les valeurs de X_1. X_2 et par suite de X se réduisent à la forme

$$\Psi_1(\mu)\Pi_1(\alpha) + \Psi_2(\mu)\Pi_2(\alpha) + \ldots + \Psi_n(\mu)\Pi_n(\alpha);$$

donc aussi les valeurs de A_m, B_m peuvent être calculées, sous forme finie, de manière à satisfaire à l'équation (E), toutes les fois que $f(x)$ est une fonction rationnelle, entière ou fractionnaire, des deux quantités $\sin x$, $\cos x$.

La méthode très-simple dont nous avons fait usage pour résoudre le problème (A) s'étend d'elle-même, comme on voit, au problème plus compliqué (E). Et cette méthode peut être regardée comme générale pour toutes les questions du genre de celles que nous avons traitées dans ce mémoire.

RECHERCHES

ANATOMIQUES ET PHYSIOLOGIQUES

SUR

L'ORGANE DE L'OUIE DES POISSONS;

PAR M. G. BRESCHET.

Si l'étude de la structure de l'organe de l'ouïe, chez les poissons, présente de grandes difficultés, elle donne en récompense des résultats aussi nombreux que variés. Dans aucune autre partie de la chaîne animale, on ne trouve autant de différences dans la disposition des éléments qui composent l'appareil de l'audition. Ainsi, soit qu'on examine les osselets du tympan représentés, suivant quelques anatomistes, par les pièces operculaires, soit qu'on considère les vestiges du tympan lui-même, soit enfin que l'on étudie les connexions de la vessie natatoire avec les cavités labyrinthiques, constamment on découvre chez les poissons des variétés multiples dans leur structure et leur arrangement.

Le mémoire que je présente aujourd'hui à l'Académie n'est qu'un fragment d'un travail dont je m'occupe depuis longtemps; mais j'ai cru convenable, dans les circonstances présentes, de faire connaître quelques-uns des résultats de mes recherches, et de

préférer pour mes premières lectures la communication de faits nouveaux d'anatomie comparée, plutôt que des communications, déjà si fréquentes, de travaux spéciaux sur la chirurgie, comme je me le proposais d'abord. Je m'arrêterai particulièrement sur la description de l'oreille de la lamproye marine, sur celle de l'esturgeon et sur celle de l'alose.

Le premier de ces poissons a appelé plus spécialement mon attention par la différence de structure qu'il offre avec celle des autres poissons, car par sa simplicité, l'oreille de la lamproye se rapproche beaucoup plus de celle de quelques crustacés et de plusieurs mollusques céphalopodes, que de l'organe de l'ouïe des autres poissons. Une seconde cause par laquelle j'ai été porté à faire ces recherches, c'est la dissidence d'opinions des anatomistes sur l'existence ou l'absence des canaux demi-circulaires dans l'oreille des lamproies [1].

[1] « L'oreille est contenue, de chaque côté, dans des cavités particulières, qui font saillie « en dehors et en arrière du crâne. Nous avons reconnu dans ces cavités des canaux demi-« circulaires; mais nous n'avons observé aucune partie dure ou amylacée, comme chez les « autres poissons. » (M. C. Duméril, *Anatomie des lamproyes*, page 130; Paris, 1800.)

« ..... Situm nempe ad latera occipitis, tubera format duo undique clausa; aperta « cavum ostendentia vesiculam continens, quæ, aqua et pulpa nervea repleta, *lapillo planè* « *caret. Etsi canales invenire non potui*, tamen eos absentes non credo, cùm constantissimi « sint, et exemplaria, quæ examinanda habui, diu spiritu vini adservata, difficilius accura « tam minutiarum talium disquisitionem permiserint. » (Chr. ed. Pohl, *Expositio generalis anatomica organi auditus*, etc.; Vindobonæ, 1818, p. 8 et 9.)

« Petromysontes fluviatiles æque atque marini vestibulo cartilagineo a cavitate cranii se-« parato prædìti sunt, canalibus vero semicircularibus tam cartilageneis quam membrana-« ceis, lapillis vestibulo aut sacco inclusis, adituque auris externo planè carent. Vestibulum « eorum membranaceum in plures cellas divisum est. » (Ern. Henr. Weber, *De aure et auditu hominis et animalium*. Lipsiæ, 1820, pag. 129.)

« Les lamproies nous offrent subitement une oreille beaucoup plus simple que tous les « autres poissons. Le labyrinthe est encore contenu dans une loge particulière creusée dans « la paroi du crâne, à peu près comme dans les autres dermodontes, avec cette différence, « qu'une partie de la cloison interne est membraneuse, comme dans les chimères; cette ca-« vité ovale est entièrement tapissée par un vestibule à peine divisé en deux ou trois loges « par des replis membraneux, et qui n'offre aucune trace de sac proprement dit, ni même de « canaux semi-circulaires. Sa surface interne est revêtue par une masse pulpeuse, formée, « en grande partie, par le nerf auditif, *mais sans trace de matière crétacée.* » (*De l'organi-*

L'esturgeon, placé parmi les poissons dont les branchies sont libres, présente dans l'appareil operculaire des modifications sous le rapport du nombre des pièces osseuses et sous celui de la situation et de la direction de ces pièces ; mais ce qui a frappé surtout mes regards, c'est qu'indépendamment de cette plus grande simplicité dans l'opercule, le tympan existe à l'état rudimentaire. En dehors de la cavité du labyrinthe, j'ai découvert une petite pièce osseuse que je considère comme l'ébauche d'un osselet du tympan, et particulièrement de l'étrier qui, comme on le sait, est la pièce qui disparaît la dernière dans les autres familles des animaux vertébrés.

Enfin, ainsi que l'a fait E.-H. Weber en Allemagne, j'ai étudié les connexions de la vessie natatoire avec l'organe de l'ouïe, et j'ai reconnu que ces recherches ouvraient une carrière des plus fécondes pour l'étude de la structure de l'oreille. Tous les clupes que j'ai pu examiner m'ont donné des résultats analogues ; mais c'est surtout dans l'espèce dont les dimensions facilitent le plus les investigations anatomiques, que je me suis arrêté, et je donne ici le sommaire de mes observations.

Si ce genre d'étude est accueilli par l'Académie, je lui ferai connaître plus tard des travaux analogues que j'ai entrepris sur les autres parties des appareils sensitifs et sur le système osseux des poissons.

sation des animaux, ou *Principes d'anatomie comparée*, par M. H. M. Ducrotay de Blainville, page 564; Paris, 1822.)

Il est étonnant que M. Rathké, dans la monographie qu'il a donnée de la *pricka*, ne dise rien touchant les canaux semi-circulaires et la matière amylacée; il se borne, à cet égard, à ce que rapporte E.-H. Weber, et en adopte conséquemment l'opinion. Il ajoute que l'organe auditif de ce poisson est aussi simple qu'il puisse l'être, et qu'il se montre de beaucoup inférieur à ce qu'il est dans les autres poissons, et même dans les écrevisses. Il dit aussi que le *nez* des lamproies tient lieu de trompe gutturale : par cette circonstance, l'*appendice nasal* de ces poissons devient l'analogue de la vessie natatoire des poissons osseux, vessie qui, comme E.-H. Weber nous l'a fait voir, est aussi, chez beaucoup de poissons, dans le rapport le plus intime avec l'oreille. *Bemerkungen ueber den innern Bau der Pricke oder des Petromyson fluviatilis des Linneus.* Von H. Rathke. Danzig, 1826.

CHAPITRE Ier.

DE L'ORGANE AUDITIF DE LA LAMPROIE (*Petromyson maximus*, L.).

1° *Nerf acoustique*[1]. Il part, sous forme d'un paquet de fibrilles courtes et déliées, des côtés du bulbe rachidien, et pénètre presque aussitôt dans le vestibule par une membrane criblée. Immédiatement après son entrée dans le vestibule il se termine d'une manière subite; il est comme tronqué, et je n'en ai pas vu partir de petits filaments pour aller se distribuer dans le reste du vestibule.

2° Les *canaux semi-circulaires* sont nuls; point de plis non plus, et ce que l'on voit au dehors, et qui en impose pour de semblables canaux, n'est qu'une traînée de graviers (*otoconies*) très-fins et déposés sur la face interne du vestibule membraneux; au microscope on distingue très-bien que ces graviers sont de très-petits cristaux. (Voy. pl. I, fig. 1, 2, 6.)

3° Le *vestibule membraneux* présente en petit la forme d'une châtaigne, avec un pédicule qui n'est que l'insertion du nerf acoustique, pouvant facilement être retiré de sa boîte cartilagineuse et examiné sous le microscope. Il est rempli d'une humeur limpide; ses parois sont assez résistantes, lisses à leur surface externe, couvertes immédiatement de graviers fins; comme je l'ai déjà dit, ce gravier, ou du moins la place qu'il occupe, peut être distingué au dehors par des stries blanchâtres et opaques. Ces stries en ont sans doute imposé pour des canaux semi-circulaires.

4° L'*aqueduc du vestibule*, que plusieurs auteurs ont nommé *fenêtre*, et que d'autres ont regardé comme un orifice destiné au passage des vaisseaux, s'ouvre dans la cavité crânienne, comme

[1] En commençant cette description, je dois dire que j'ai le plus souvent employé, pour désigner les parties, les dénominations données par M. E.-H. Weber.

dans tous les animaux supérieurs, et il est situé immédiatement au-dessus de l'orifice destiné au passage du nerf acoustique.

5° *Sinus accessoire de l'organe olfactif.* Ce sinus se prolonge sous la cavité crânienne où il offre une dilatation; la paroi cartilagineuse qui le sépare de la cavité crânienne est très-mince; il n'y a point d'orifice de communication entre ces deux cavités, mais les vibrations sonores peuvent être très-bien transmises de l'une à l'autre. Le sinus en question, quoique paraissant n'être qu'accessoire à la fonction de l'olfaction, est pourtant nécessaire à l'exercice de cette fonction. Comme la cavité olfactive ne communique point avec le pharynx, et qu'elle ne forme qu'une espèce de sac, les particules odorantes ne pourraient point y passer et repasser sans cette arrière-cavité qui, en se vidant et se remplissant alternativement, fait constamment parvenir dans l'organe olfactif des particules odorantes nouvelles. Elle fait à l'égard du nez ce que le poumon fait à l'égard du même organe dans les animaux supérieurs. (Voy. pl. I, fig. 1, 5.)

La transmission des vibrations sonores a principalement lieu, je crois, par les branchies dont la cavité parvient jusqu'auprès du vestibule cartilagineux; en voulant écouter, l'animal doit dilater ses branchies. (Voy. pl. I, fig. 1, o, o.)

CHAPITRE II.

DE L'ORGANE AUDITIF DE L'ESTURGEON (*Acipenser sturio*, L.).

L'organe de l'ouïe, dans l'esturgeon, est assez simple, et se rapproche, pour sa conformation générale, de ce qu'on observe dans la plupart des poissons; il est remarquable par sa grandeur et surtout par l'étendue des canaux semi-circulaires; mais ce caractère, comme on sait, appartient à tous les chondroptérigiens. Il est dépourvu de toute communication avec le dehors et de tout appareil de perfectionnement; cependant j'y ai reconnu un *vestige d'osselet*, un *rudiment d'étrier*, comme il sera dit plus bas.

Nous aurons à examiner successivement dans cette oreille, 1° le bulbe auditif (*sinus utriculosus et sacculus*); 2° l'appareil des canaux semi-circulaires; 3° le nerf acoustique; 4° le petit osselet; 5° un ligament qui sert à fixer l'oreille. (Voy. pl. I, fig. 9; pl. II, fig. 3; fig. 1, 2.)

1° *Bulbe auditif, vestibule membraneux, etc.* Ces termes, exprimant la même chose, peuvent être employés indistinctement pour désigner cette partie de l'organe auditif qui représente une espèce de poche, située au-dessous des canaux semi-circulaires, et contenant des concrétions pierreuses. Le *saccule* est oblong, légèrement comprimé latéralement, dirigé d'avant en arrière, long de six à huit lignes, large de trois à quatre, logé sur les côtés de la base du crâne, dans un enfoncement creusé dans la substance cartilagineuse, et qui n'est pas tout à fait rempli par le *saccule*. Il correspond, par son côté interne, à la portion dure de la septième paire de nerfs, laquelle est immédiatement appliquée contre lui d'avant en arrière : il est encore en rapport, par cette même face, avec la branche postérieure du nerf acoustique; enfin ce côté interne du *saccule* est caché par une sorte d'expansion ligamenteuse séparant l'organe auditif de la cavité crânienne, et destiné à fixer l'organe de l'ouïe, comme nous le dirons plus bas.

Le côté externe du *saccule* est appliqué contre la paroi externe de la cavité crânienne (vue sur le squelette), et ne présente rien de remarquable.

La face inférieure ne repose pas tout à fait sur la base du crâne; elle est arrondie, convexe, en contact postérieurement avec le petit osselet.

Supérieurement, le *saccule* prend plus particulièrement le nom de *sinus median* ou *sinus utriculeux* (*sinus utriculosus*); il se continue avec l'appareil des canaux semi-circulaires; mais, entre lui et ces derniers, il y a un étranglement, un rétrécissement, surtout très-prononcé en arrière, établissant une limite naturelle entre ces deux parties. Ce rétrécissement n'a que la moitié de la longueur,

environ, du *saccule;* c'est à cet endroit que l'organe auditif est affaissé; les deux parois du vestibule membraneux étant appliquées l'une contre l'autre. C'est donc un passage entre deux cavités plus étendues, et comme ce passage correspond à la partie antérieure du *Saccule,* il se trouve que celui-ci fait une sorte de cul-de-sac en arrière, le passage en question s'ouvre immédiatement dans la partie inférieure du *sinus utriculeux* qui est très-vaste.

Les parois du *saccule* et du *sinus médian* sont formées, comme celles de tout le bulbe auditif membraneux, d'un tissu particulier, transparent, nullement fibreux, se rompant avec assez de facilité et d'une manière irrégulière; c'est comme du tissu corné extrêmement mince, membraniforme et ramolli. Dans l'intérieur est contenue une humeur claire (*endolymphe*), plus dense que l'eau (albumineuse sans doute), et c'est dans cette humeur que nagent deux *otolithes,* l'un antérieur plus grand, et l'autre postérieur plus petit. Le grand a plus de quatre lignes de longueur et deux demi-lignes de largeur; il a une surface légèrement concave, supérieure, et l'autre convexe inférieure; il offre un corps et une espèce de tête; le corps est ovoïde, la tête est un tubercule appliqué à l'extrémité antérieure du corps, et pourvu tout autour d'une série de rayons concrets extrêmement fragiles. Le petit *otolithe* est assez arrondi, a une ligne de diamètre à peu près, offre une surface légèrement concave et une autre qui est un peu convexe. Ces deux *lapilli* sont d'un beau blanc; leur substance est dure, rayonnée au dehors, cassante comme toutes les concrétions inorganiques, et formée, en majeure partie, de carbonate de chaux. (Voy. pl. I, fig. 10.)

2° *Appareil des canaux semi-circulaires.* Les trois canaux semi-circulaires se rendent, par leurs six extrémités, à une espèce de poche commune, qui est le *sinus médian.* Celui-ci se trouve immédiatement au-dessus du *saccule,* dans une position verticale; les parois qui le forment ont la même structure que celles de ce dernier, mais ces parois sont appliquées l'une contre

l'autre, ou du moins très-peu distantes, de sorte que le *sinus* paraît aplati; sa forme est triangulaire, mais ses angles sont obtus; l'un est supérieur, l'autre antérieur et le troisième postérieur. Le *sinus médian* est appliqué contre la paroi externe de la cavité crânienne (considérée sur le squelette); sa face interne est en grande partie couverte par le ligament dont il a déjà été question plus haut; sa base est en rapport avec le *saccule* qui s'y ouvre; ses deux bords latéraux sont concaves, et servent à compléter les cercles que forment les canaux semi-circulaires antérieur et postérieur. L'angle supérieur, qui est très-obtus, reçoit les deux extrémités non renflées des canaux antérieur et postérieur; l'angle antérieur (et inférieur) reçoit les extrémités ampoulées des canaux externe et antérieur; l'angle postérieur (et inférieur) reçoit l'extrémité renflée du canal postérieur; à la face externe de cet angle, on voit l'extrémité non-globuleuse du canal externe, qui vient se rendre dans le *sinus médian :* celui-ci a un pouce d'étendue, depuis sa base jusqu'au sommet, et autant depuis l'angle antérieur jusqu'à l'angle postérieur. La cavité du *sinus utriculeux* ne contient qu'une petite quantité de liquide (*endolymphe*), qui est de même nature que celui du *saccule;* ce liquide existe surtout inférieurement. Cette cavité communique avec les extrémités des canaux semi-circulaires.

Les canaux semi-circulaires, proprement dits, circonscrivent un grand espace, comme je l'ai déjà exprimé. Ils se distinguent en antérieur, en postérieur (verticaux) et en externe (horizontal). Chacun est pourvu d'une ampoule à l'une de ses extrémités; deux de ces ampoules sont antérieures (celles des canaux externe et antérieur); la troisième est postérieure (celle du canal postérieur) : ces trois canaux sont logés dans des cavités du tissu cartilagineux plus grandes que ne l'exige leur volume. L'angle antérieur du *sinus utriculosus* offre, à l'endroit où les deux ampoules se réunissent, un renflement qui ne se trouve pas à l'angle postérieur. Ce renflement ampulliforme reçoit son filet nerveux, mais il ne contient point d'*otolithe;* je n'y ai observé

que quelques flocons de substance amylacée; j'ai aussi observé la même chose dans l'ampoule postérieure; les ampoules ne sont pas bien développées en proportion des canaux demi-circulaires; elles ne sont pas non plus bien tranchées. (Voy. pl. I, fig 9; pl. II; pl. III, fig. 1, 2.)

3° *Nerf acoustique.* Ce nerf tire son origine du côté du bulbe rachidien, entre le nerf de la cinquième paire et le nerf vague : il se divise bientôt en deux branches, dont l'une est antérieure et l'autre postérieure; cette division a lieu à quelques lignes derrière le trou pour le passage du nerf de la cinquième paire : les deux branches sont aplaties et appliquées contre la paroi du crâne.

La *branche antérieure* est un peu plus forte que l'autre; elle est aussi plus courte, parce qu'elle a un moindre espace à parcourir : elle se dirige en dehors, en arrière et un peu en haut, et se partage en trois rameaux, dont l'antérieur gagne l'ampoule du canal semi-circulaire du même nom; le moyen se rend à l'ampoule du canal semi-circulaire externe; le rameau postérieur, enfin, se rend au renflement ampulliforme dont il vient d'être question. (Voy. pl. I, fig. 9, *k, l, m;* pl. III, fig. 1, *t;* fig. 2, *i.*)

La *branche postérieure* du nerf acoustique est un peu plus grêle que l'antérieure; elle est beaucoup plus longue, et se porte directement d'avant en arrière, en passant à côté et au-dessus de la portion dure de la septième paire. En arrivant sur la face interne du *saccule,* elle fournit à celui-ci une grande quantité de petit filets qui s'épanouissent tout autour des *otolithes* (*lapilli*); ensuite elle fournit un rameau plus considérable qui va plus loin que le *saccule,* passe sous l'angle postérieur du *sinus médian,* et se termine à l'ampoule postérieure. La portion dure n'a aucun rapport direct avec l'organe auditif.

4° *Petit osselet.* A la partie postérieure et inférieure du *saccule,* entre celui-ci et la cavité crânienne, se trouve un petit osselet long d'une ligne et demie, formé d'une tige et d'une sorte de renflement ou de tête. Par sa tige, l'osselet tient à la paroi car-

tilagineuse du crâne; par sa tête, il est appliqué contre le *saccule*. Cette tête est munie, sur un point de sa circonférence, d'une petite saillie, de la même manière que la base de l'étrier chez les oiseaux. La tige est fixée à la paroi crânienne par une petite bride ligamenteuse, de telle manière qu'elle permet des mouvements. La direction de l'osselet est oblique de haut en bas, du dedans au dehors et d'avant en arrière; il se trouve sous l'endroit par où passe le nerf de la portion dure; s'il était prolongé jusqu'au dehors, il viendrait aboutir derrière et au-dessous du point où l'appareil operculaire est articulé avec la tête, c'est-à-dire à l'endroit où devrait se trouver le tympan, s'il y en avait réellement un. Cet osselet est formé d'une véritable substance osseuse et non d'une concrétion calcaire comme les *otolithes;* il est même très-dur. On connaît la dureté des osselets de l'ouïe des animaux supérieurs; c'est même là que l'ossification se manifeste d'abord et se développe le plus vite.

Cet osselet est, à mon avis, un rudiment de ce qu'on nomme l'*étrier,* et cette manière de le considérer devient d'autant plus frappante de vérité, qu'on a plus d'égard aux transformations successives qu'éprouvent les osselets de l'ouïe, depuis les mammifères jusqu'aux poissons exclusivement. Chez les oiseaux, en effet, les osselets sont déjà presque réduits à ce qu'on nomme *l'étrier,* car la petite pièce cartilagineuse qui surmonte l'*étrier* ne représente plus très-bien ni le marteau ni l'enclume; il n'y a d'osseux que l'*étrier,* et celui-ci même ne se présente plus que sous la forme d'une tige terminée par une base, laquelle est en contact avec le vestibule membraneux; cependant, chez les oiseaux, il y a toujours une membrane tympanique à laquelle vient aboutir l'extrémité externe de la chaîne des osselets; mais, chez les reptiles, cette membrane du tympan finit aussi par disparaître; on ne reconnaît plus de cavité du tympan dans les serpents, quoiqu'il existe un osselet; la peau dure et écailleuse recouvre immédiatement la cavité osseuse qui contient l'organe de l'audition; l'osselet n'est libre qu'à son extrémité qui touche le vestibule membraneux : dans tout le reste de son étendue, il est caché dans l'épaisseur

du tissu cutané. Ainsi dans les serpents, où il n'y a plus de cavité tympanique, ni conséquemment de membrane du tympan, il y a un osselet dont une extrémité (la base) est en rapport avec l'organe auditif, et dont l'autre se perd dans l'épaisseur de la paroi de la tête. Qu'y a-t-il dans l'esturgeon? un osselet dont une extrémité (la base) est en rapport avec l'organe auditif, et dont l'autre se continue avec la paroi crânienne : c'est l'état le plus rudimentaire que puissent présenter les osselets de l'ouïe. L'*étrier* est donc la partie la plus constante de ces osselets. L'osselet de l'esturgeon présente de grandes analogies de forme, de position et de structure avec l'*étrier* des reptiles et des oiseaux. (Voy. pl. I, fig. 9-11.)

5° *Ligament de l'organe auditif.* Quand on ouvre la cavité crânienne de l'esturgeon, on trouve qu'elle est presque complétement séparée de la cavité auditive par une bande ligamenteuse, large de six à huit lignes, qui se dirige obliquement de bas en haut et d'arrière en avant. Ce ligament est fixé vers son milieu au *saccule* et au *sinus utriculeux,* et il est assez difficile de le séparer, si on ne veut pas rompre ces parties; à ces deux extrémités, il est attaché aux parois de la cavité du crâne. L'usage de ce ligament est évidemment de fixer l'organe auditif, qui, sans cela, pourrait facilement se déplacer, vu son grand développement. (Voy. pl. I, fig. 9; pl. III, fig. 1 et 2, et leur description.)

ORGANE AUDITIF DU GRAND ESTURGEON (*Acipenser huso*).

Comme l'organe auditif du grand esturgeon ressemble, pour la forme générale, à celui de l'esturgeon ordinaire, qui, le premier, a été soumis à notre examen, et que nous avons considéré comme appartenant à l'espèce *acipenser sturio*, nous nous bornerons ici à indiquer les principales différences.

La différence la plus frappante que nous ayons remarquée dans la stucture de l'organe de l'ouïe, est que, dans le grand esturgeon, (huso) nous n'avons pas rencontré de vestige d'osselet qui unisse la partie postérieure du *sacculus* à la paroi du crâne; cette union n'a

lieu qu'au moyen de simple brides ligamenteuses. Ainsi l'esturgeon ordinaire (*ac. sturio*) a l'oreille pourvue d'un osselet fort bien conditionné, tandis que l'espèce dont nous nous occupons ici (*ac. huso*) n'en offre plus de traces. La présence ou l'absence de cet osselet pourrait donc devenir un fort bon caractère spécifique, si déjà d'autres caractères différentiels n'existaient pas, et si notre observation est confirmée par de nouvelles investigations.

Ce n'est pas seulement le genre des esturgeons, dans ce règne animal, qui présente une anomalie de structure, d'autres genres offrent des différences de conformation tout aussi frappantes, et qui sont autant de circonstances contraires à la théorie de l'*unité de plan* dans la conformation organique des animaux. Ainsi l'*ardea stellaris* n'a qu'une seule artère carotide, qui résulte de la réunion de deux artères; tandis que toutes les autres espèces du genre *ardea* (héron) ont deux artères carotides distinctes et séparées.

Nous n'avons pas besoin de dire que l'oreille du grand esturgeon (*ac. huso*) a des dimensions plus grandes que celle de l'esturgeon ordinaire (*ac. sturio*). Nous avons également remarqué qu'il y a un gravier blanc, très-fin, dans les ampoules, tandis que chez l'esturgeon ordinaire il n'y a qu'une substance amylacée. Quant aux *lapilles* du vestibule membraneux, nous n'y avons pas trouvé de différence.

CHAPITRE III.

ORGANE AUDITIF DE L'ALOSE (*Clupea alosa*, L.).

L'oreille de l'alose est une des plus singulières du règne animal, tant par son état de complication que par les particularités de sa structure. Située sur les côtés de la cavité crânienne, et à la partie postérieure de cette même cavité, elle est en grande partie engagée dans l'épaisseur des os du crâne; et il n'y a qu'une petite portion du vestibule qui soit visible, après l'enlèvement de l'encéphale. Inférieurement, elle s'étend depuis la fosse pituitaire jusqu'au bulbe rachidien; supérieurement, et sur la ligne moyenne,

elle correspond à la face postérieure du crâne et sépare le cervelet du trou occipital; latéralement, elle se prolonge dans les saillies osseuses de la tête, qui servent de soutien et de point d'appui à l'appareil operculaire. Ce qui frappe surtout les yeux lorsqu'on considère l'organe auditif de l'alose, c'est qu'on voit deux prolongements, l'un supérieur et l'autre inférieur, partir de l'oreille d'un côté pour se joindre, en traversant la cavité crânienne, avec l'oreille du côté opposé. (Voy. pl. IV, fig. 1, *i, k, l.*)

Pour procéder d'une manière méthodique dans la description de cet organe auditif, nous décrirons d'abord les parties accessoires ou de perfectionnement, puis l'oreille proprement dite.

1° Les organes accessoires sont la *vessie natatoire* et ses dépendances. (Voy. pl. IV, fig. 1, *h.*)

La vessie natatoire s'étend depuis l'anus jusqu'auprès de la tête, le long de la partie supérieure de la cavité abdominale, au-dessous de la colonne vertébrale dont elle est séparée par le péritoine et par le foie; elle est longuette, lancéolée, peu large dans son milieu, et rétrécie vers ses deux extrémités; elle ne forme qu'une seule poche, dont les parois sont résistantes, élastiques, assez épaisses, et présentant un aspect noir. Son extrémité postérieure se termine en une pointe extrêmement aiguë au-dessus du cloaque. L'extrémité antérieure se rétrécit jusqu'au niveau de la partie postérieure du vomer : parvenue à cet endroit, elle subit un petit renflement ou bien forme une espèce de petit nœud, et se bifurque en deux canaux assez grêles qui s'avancent, l'un à droite, l'autre à gauche du vomer. Ces petits canaux, que nous nommerons provisoirement *trompes cystiques*, sont cartilaginiformes, transparents et percés de conduits très-étroits; après leur bifurcation, ils se dirigent chacun d'arrière en avant, de bas en haut, et du dedans en dehors, pour parvenir sur les parties latérales de la base du crâne; dans ce trajet, ils sont couverts par les nerfs vagues. Après avoir parcouru un espace de six à huit lignes, de cartilagineux qu'ils sont, ils deviennent osseux. (C'est l'histoire de la portion cartilagineuse et de la portion os-

seuse de la trompe d'Eustachio.) L'endroit où cette transformation de substance cartilagineuse en substance osseuse a lieu, correspond précisément à l'intervalle qui est entre la fenêtre vestibulaire et l'orifice par lequel le nerf vague sort du crâne. La partie osseuse de la *trompe cystique* ne parcourt qu'un espace de deux lignes à peu près dans la base du crâne; ensuite elle se bifurque et chacune des deux branches de la bifurcation augmente aussitôt de volume. Ces deux branches se distinguent en antérieure et postérieure; elles sont tout au plus longues de deux lignes, et mènent chacune à un petit renflement qu'on appelle *globe osseux*. La branche postérieure de la bifurcation se dirige de dedans en dehors et de bas en haut; elle passe dans l'intérieur du demi-cercle qui circonscrit le canal semi-circulaire externe, de manière à être en contact avec le canal semi-circulaire; immédiatement après avoir dépassé le niveau de ce dernier, elle se dilate pour former le *globe osseux postérieur,* qui est le plus petit des deux. La branche antérieure de la bifurcation se dirige d'arrière en avant et légèrement de haut en bas; elle se dilate également comme la précédente pour former le *globe osseux antérieur,* qui est beaucoup plus gros que le postérieur : le globe antérieur fait une saillie lisse au dehors comme dans l'intérieur du crâne; il se trouve immédiatement derrière l'orifice qui donne passage au nerf de la cinquième paire au devant du vestibule membraneux, au-dessous des ampoules réunies des canaux semi-circulaires antérieurs et externes, et en dehors de la fosse pituitaire. La saillie que le globe antérieur fait dans la cavité crânienne est plus considérable que celle qu'il fait au dehors : il présente dans sa partie intra-crânienne un orifice étroit, allongé transversalement, en croissant, qui établit une communication du dehors avec l'intérieur du globe osseux. Ce petit orifice ou, pour mieux dire, cette espèce de petite fente se trouve, non pas précisément à la partie supérieure du globe, mais un peu en arrière; ses bords sont nettement dessinés, relevés, et un peu plus écartés en dehors qu'en dedans : le point du globe osseux qui est percé de cet orifice est couvert

par une partie du vestibule membraneux et par des filets nerveux, dont nous parlerons plus bas.

La partie cartilagineuse de la trompe cystique est tapissée intérieurement d'une pellicule très-mince qui est la continuation de la membrane muqueuse de la vessie natatoire et de celle du tube alimentaire : cette pellicule se continue dans la portion osseuse de la trompe et dans les deux globes osseux : dans ces derniers, elle acquiert plus de force, présente un aspect nacré, et se laisse très-facilement séparer des parois osseuses qu'elle tapisse : elle n'est point percée à l'endroit où se trouve l'orifice du globe antérieur. (Voy. pl. IV, fig. 1, *l, k;* fig. 3, *c, c, e, f, f.*)

Les trompes cystiques et les *globes osseux* ne représentent, selon moi, que l'appareil *salpingo-tympanique* des animaux supérieurs; les trompes cystiques seraient l'analogue des trompes d'Eustachio, et les deux globes osseux seraient l'analogue de la cavité tympanique, qui, comme on sait, est également divisée en deux compartiments dans un grand nombre d'animaux. Qu'est-ce en effet que la cavité du tympan, sinon un prolongement de la membrane de l'arrière-bouche jusqu'auprès de l'organe auditif? Et l'arrière-bouche n'est-elle pas un canal commun aux voies digestives et respiratoires? Or, si nous revenons à ce qui a lieu dans l'alose, nous voyons la vessie natatoire communiquer par un large conduit avec l'œsophage; nous savons de plus que la vessie natatoire est un dernier reste de l'appareil pulmonaire, ou, pour parler plus physiologiquement, elle n'est que l'appareil pulmonaire réduit à l'état le plus rudimentaire; nous savons enfin que la vessie natatoire est en rapport direct avec l'organe auditif, au moyen des trompes cystiques et des globes osseux; il y a donc ici communication des appareils digestif et pulmonaire avec l'organe de l'ouïe, absolument comme cela a lieu dans les animaux supérieurs, dont le conduit qui établit cette communication est l'analogue de la trompe d'Eustachio, et la dilatation de ce conduit, l'analogue de la cavité du tympan. Mais, dira-t-on, il n'y a pas d'osselets dans le tympan? La réponse est facile : c'est

que ce tympan, presque rudimentaire, est réduit, si nous pouvons dire ainsi, à sa plus simple expression. Il n'y a point d'osselets parce qu'il n'y a point de membrane du tympan, parce que celle-ci ne convient qu'à l'audition aérienne et nullement à l'audition aquatique. Une autre circonstance, qui prouve que le tympan de l'alose est réduit à l'état rudimentaire, c'est qu'il ne correspond qu'à une petite étendue de l'organe auditif, tandis que chez les animaux où l'oreille est parfaite le tympan embrasse toute la surface externe de l'organe de l'ouïe : l'alose est, pour cette raison, un animal très-favorable pour étudier la dégénération que l'appareil tympanique est susceptible d'éprouver dans le bas de l'échelle animale ; toutefois, si ce poisson offre des traces du tympan sans osselets, il n'en est pas de même de ce qu'on appelle *fenêtre* de l'oreille moyenne, car le globe osseux antérieur présente effectivement une fenêtre vestibulaire qui est le petit orifice allongé dont nous avons parlé plus haut : cette fenêtre, qui correspond intérieurement avec le vestibule membraneux, est une des preuves les plus convaincantes en faveur de notre manière d'envisager la nature des globes osseux dans les clupes. (Voy. pl. IV, fig. 3, *c, c, c, f, f.*)

2° *Organe auditif,* proprement dit.

L'organe auditif a ici pour base, comme dans les autres poissons, un vestibule membraneux ou bulbe auditif auquel viennent aboutir les canaux semi-circulaires; mais, dans l'alose, il y a en outre un petit bulbe accessoire (l'analogue du limaçon) et deux commissures, l'une supérieure et l'autre inférieure, au moyen desquelles les deux oreilles tiennent ensemble; comme ces deux commissures sont l'une à la base du crâne et l'autre à la voûte de la même cavité, il en résulte que l'organe de l'ouïe fait tout le tour du crâne, et qu'il forme une espèce d'anneau embrassant le bulbe de la moelle épinière. L'organe de l'ouïe, c'est-à-dire toutes les parties molles du labyrinthe, ont une couleur rouge-brun, sont transparentes et formées d'un tissu qui n'est ni absolument membraneux, ni absolument cartilagineux; ce tissu est assez fragile, un peu élastique, ayant à peu près la mollesse de la gomme élastique, mais con-

servant (ce que ne fait pas cette dernière) l'impression des corps durs. Ce tissu est très-épais relativement aux cavités qui sont dans son intérieur; en effet, tout le creux du labyrinthe se réduit à très-peu de chose, et à peine y aperçoit-on quelques traces d'humidité.

Le *vestibule membraneux* est situé à la partie inférieure et latérale du crâne; il est allongé d'avant en arrière; sa partie postérieure est enfoncée dans la base du crâne, sa partie antérieure repose sur le globe osseux antérieur et communique avec le vestibule du côté opposé au moyen de la commissure inférieure. La partie postérieure du vestibule constitue ce qu'on appelle proprement le *saccule;* immédiatement au-dessus du *saccule* on aperçoit l'ampoule du canal semi-circulaire postérieur; les ampoules des canaux semi-circulaires externe et antérieur se trouvent à la partie antérieure et externe du vestibule. C'est immédiatement au-dessous de ces deux dernières ampoules que le bulbe accessoire du vestibule (limaçon) est situé. C'est du point de réunion des deux tiers antérieurs du vestibule avec le tiers postérieur que s'élève le *sinus utriculosus,* ou *sinus médian,* dans lequel se réunissent les canaux semi-circulaires antérieur et postérieur. Le vestibule est aplati dans la plus grande partie de son étendue, sa cavité est très-peu considérable et contient trois *otolithes,* dont deux sont très-petits. Un de ces *lapilli* est renfermé dans le *saccule;* c'est le plus grand; il est aplati, ovoïde, un peu échancré, et n'a pas deux lignes dans son plus grand diamètre. Le second *lapillus* se trouve à la base de l'ampoule postérieure, immédiatement au-dessus du *saccule;* c'est le plus petit; il est arrondi d'un côté, très-mince, muni d'un petit onglet, concave, et ayant une demi-ligne dans son plus grand diamètre. Le troisième *lapillus,* qui est un peu plus grand et plus solide que le précédent, se voit à la base des deux ampoules antérieures, immédiatement au-dessus du petit orifice dont est percé le globe osseux antérieur. Le *saccule* forme une petite cavité séparée, qui occupe toute l'extrémité postérieure du vestibule membraneux; il n'est

point aplati comme le reste du vestibule; il est engagé dans une espèce de cul-de-sac creusé dans la base du crâne, une portion de la paroi externe de ce cul-de-sac est membraneuse, et constitue ce qu'on appelle une *fenêtre;* je l'appellerai la *fenêtre postérieure,* par rapport à la fenêtre dont est percé le globe osseux antérieur, et que j'appellerai *fenêtre antérieure.* La fenêtre postérieure est légèrement arrondie; son diamètre moyen est d'une ligne à peu près; en dehors elle correspond à la partie supérieure de la fente branchiale, et elle s'ouvre entre l'attache du muscle adducteur de l'opercule et l'endroit par où le nerf vague sort du crâne; cette fenêtre n'est plus recouverte par la membrane muqueuse qui tapisse tout le pharynx; en sorte que les vibrations communiquées à l'eau peuvent facilement être transmises par cette voie jusqu'au *saccule,* qui est en contact immédiat avec la fenêtre. Outre le grand *lapillus,* le *saccule* renferme encore un liquide très-peu consistant, dans lequel nage la pièce concrète.

Les *canaux semi-circulaires* sont, comme partout où ils existent, au nombre de trois; chacun est pourvu d'une seule ampoule; deux ampoules sont antérieures et appartiennent aux canaux antérieur et externe; une seule est postérieure et appartient au canal postérieur. L'extrémité non renflée du canal externe vient se rendre au vestibule avec l'ampoule postérieure; les deux extrémités non renflées des canaux antérieur et postérieur se réunissent en un seul canal épais, fort, vertical, qui est ce qu'on appelle le *sinus médian* (*sinus utriculosus*); celui-ci s'étend depuis la voûte de la cavité crânienne jusqu'à la base et s'ouvre dans le vestibule membraneux. Les trois canaux semi-circulaires sont entourés de substance osseuse, le *sinus utriculosus* seul n'est pas entouré de substance osseuse de toutes parts, car il est libre à sa face interne qui regarde la cavité crânienne. Les canaux sont tous les trois grêles; les ampoules sont bien dessinées; le canal externe est tout à fait horizontal, et dans le milieu de son trajet il est en contact avec le *globe osseux postérieur;* les deux

autres canaux s'élèvent à angle droit sur le précédent; ils forment chacun une espèce de demi-cercle, auquel le *sinus utriculosus* sert de diamètre. Ils sont dirigés : l'antérieur, du dedans au dehors et d'arrière en avant; et le postérieur, du dedans au dehors et d'avant en arrière. (Voy. pl. IV, fig. 4, *m*.)

La *commissure supérieure* n'est qu'une espèce de bande roulée, formée du même tissu que le reste de l'organe auditif, et passant d'un *sinus utriculosus* à l'autre (pl. IV, fig. 4, *m*). En disséquant cette partie avec beaucoup d'attention, on voit qu'elle part du vestibule membraneux, qu'elle monte le long de la partie interne du *sinus utriculosus;* et que, parvenue vers la partie supérieure de ce dernier organe, elle s'incline en dedans, pour décrire une espèce d'arcade et venir joindre l'extrémité supérieure de l'autre *sinus utriculosus,* le long duquel elle redescend, en se comportant comme du côté opposé. Cette commissure se trouve immédiatement derrière le cervelet qui est appliqué contre elle; elle constitue un lien puissant entre les deux organes auditifs, elle n'est pas creuse comme les canaux semi-circulaires, ou comme le *sinus utriculosus* avec lequel elle semble avoir tant d'analogie au premier aspect. Quand on l'examine de près, on n'y distingue qu'un tissu foliacé, qu'une membrane pliée ou roulée, qui, en définitive, n'est qu'un épanouissement du tissu du vestibule. Cette commissure aurait-elle pour but de mettre le cervelet en rapport direct avec les impressions perçues par l'organe de l'ouïe? C'est ce que prouverait assez le rapport intime entre ces deux parties.

La *commissure inférieure* est, comme la supérieure, une extension du tissu du vestibule membraneux; elle constitue une large bande transversale à la base du crâne (pl. IV, fig. 4, *n*), passant d'un vestibule à l'autre, et complétant ainsi l'anneau auditif, à la formation duquel concourent en haut la commissure supérieure et latéralement les deux *sinus médians;* elle a deux lignes de largeur et trois lignes à peu près d'étendue transversale d'un nerf auditif à l'autre; car les nerfs auditifs indiquent l'endroit où cette commissure se joint au vestibule membraneux. Son bord postérieur est

mince, le bord antérieur est épais et arrondi; il limite la fosse pituitaire en arrière, les deux extrémités de ce bord reposent sur les globes osseux antérieurs La face supérieure de cette commissure est plane d'avant en arrière, et légèrement concave transversalement; c'est sur elle que repose la partie postérieure du cerveau. La face inférieure est immédiatement appliquée contre la base du crâne. La commissure inférieure n'offre point de véritable canal dans son intérieur, pas plus que la commissure supérieure; mais voici ce qu'on observe: quand on soulève le bord antérieur, on voit que le feuillet membraneux dont la commissure est formée s'est replié en dessous, sans que cependant la partie repliée revienne jusqu'au bord postérieur; c'est cette duplicature qui donne plus d'épaisseur au bord antérieur, qu'il est d'ailleurs facile de dédoubler. La substance de la commissure s'identifie avec les parois du vestibule, et elle ne doit être considérée que comme une expansion membraneuse de ces dernières. Je ferai la même remarque pour cette commissure que pour la commissure supérieure; elle est en rapport direct avec la base du cerveau, comme l'autre l'est avec le cervelet: c'est sans doute pour mettre le cerveau dans un rapport plus intime avec les impressions reçues par l'organe auditif.

Le *bulbe accessoire* est encore une de ces parties qui rendent l'étude de l'organe auditif de l'alose si intéressante; c'est un petit corps triangulaire, d'une forme prismatique, surajouté au vestibule membraneux et pourvu d'un filet nerveux comme les ampoules et le *saccule*. Il se trouve immédiatement au-dessous des deux ampoules antérieures : sa pointe est tournée en dehors, et sa base correspond au vestibule; il a environ une ligne et demie d'étendue depuis la base jusqu'au sommet; son tissu est spongieux, rougeâtre comme celui de tout le labyrinthe membraneux; il ne contient point de *lapillus*. Ce bulbe accessoire, qui est placé entre les deux *globes osseux*, se trouve au fond d'un canal large et aplati, au moyen duquel la cavité crânienne communique avec le dehors, si on considère la chose sur le squelette sec. Le canal en question s'ouvre d'une part dans la cavité crânienne, en dehors et au-dessus

du *globe osseux* antérieur; de là il se dirige en dehors, en haut et un peu en arrière, pour venir aboutir d'une autre part à la partie supérieure et latérale de la tête, où il s'évase et se divise en trois conduits plus petits, dont l'un est antérieur, l'autre postérieur, et le troisième externe. Depuis la cavité crânienne jusqu'à l'endroit où il se divise, il a plus de trois lignes d'étendue; il est large de deux lignes; mais, considéré dans l'état frais, ce canal est divisé en deux parties : la partie supérieure, où l'évasement appartient à un appareil de canaux excréteurs; et la partie inferieure, qui n'est séparée de la première que par une mince pellicule, et n'est occupée que par le *bulbe accessoire*. Je reviendrai tout à l'heure sur les canaux excréteurs en question, et auparavant je dirai quelques mots de la signification du *bulbe accessoire :* je ne puis comparer ce bulbe qu'à un rudiment de limaçon; c'est le limaçon réduit à une espèce de petit tubercule, comme cela a lieu dans les oiseaux et mieux encore dans les reptiles (voy. pl. IV, fig. 4, *k-k*); il est placé à la partie antérieure du vestibule, comme le limaçon doit toujours l'être; correspond au-dessous des canaux semi-circulaires, et c'est encore un des caractères de position desquels le limacon ne s'éloigne jamais. Cependant il ne contient point d'*otolithe*, et on verra que le limaçon des oiseaux, ainsi que celui de beaucoup de reptiles, en renferme, et il reçoit un filet nerveux particulier, comme cela a toujours lieu quand il existe un limaçon distinct. Cet ensemble de caractères m'a donc déterminé à considérer le *bulbe accessoire* de l'alose comme l'analogue du limaçon des oiseaux et des reptiles ne sachant à quoi comparer ce bulbe. Cependant je n'attache pas trop d'importance et de rigueur à ce parallèle, car j'ai dit ailleurs que la cochlée véritable n'existe que chez les animaux à respiration pulmonaire et pourvus d'un appareil vocal. Nous ferons à cet égard remarquer que, sous tous les rapports, et principalement sous ceux de la formation et de la communication avec un réservoir aérien (la *vessie natatoire*), nous nous trouvons ici, pour admettre la possibilité de l'existence d'un rudiment de cochlée, dans de meilleures conditions que chez plusieurs autres poissons, et particulièrement

que chez quelques ésocéens, l'*esox lucius*, par exemple. Quant aux *canaux excréteurs* dont nous avons parlé plus haut, nous dirons qu'on voit, sur l'opercule de l'alose, un système de conduits ramifiés qui se réunissent en un seul conduit vers l'opercule; c'est le conduit externe qui mène à l'évasement dont nous avons déjà parlé. Deux autres systèmes de conduits ramifiés, partant l'un de la partie antérieure de la tête et l'autre du corps même du poisson, viennent également aboutir à l'évasement en question par les conduits antérieur et postérieur. Voilà donc l'évasement avec les trois conduits, comme il a été dit plus haut. Tous ces conduits ne sont probablement que des organes de secrétion, comme on le remarque à la tête d'un grand nombre de poissons. Cet appareil secrétoire n'offrirait aucun intérêt ici, s'il ne se réunissait pas en une espèce de *sac* ou de dilatation, qui correspond précisément à l'évasement du canal dans lequel est situé le bulbe cochléiforme. Ce *sac* est constitué par la membrane interne des conduits extérieurs, et c'est cette membrane très-mince, qui est établie entre le prétendu limaçon et le liquide contenu dans l'appareil excréteur. Une semblable disposition n'a lieu, sans aucun doute, que pour transmettre plus facilement les vibrations du dehors jusqu'à l'organe auditif.

Les *nerfs auditifs* sont, comme dans les poissons en général, au nombre de deux pour chaque oreille, un antérieur et l'autre postérieur. Ils partent, très-près l'un de l'autre, des parties latérales du bulbe de la moelle épinière; l'antérieur est un peu plus gros que le postérieur. Le nerf auditif antérieur, après avoir parcouru une ligne de chemin, s'enfonce dans la partie interne et antérieure du vestibule membraneux, à l'endroit où celui-ci s'unit avec la commissure inférieure. Comme le vestibule est transparent, on voit le nerf s'avancer entre lui et le globe osseux antérieur et se diviser en plusieurs filets. Les deux premiers filets se rendent vers le *lapillus* inférieur qu'ils embrassent et sur les bords duquel ils s'épanouissent. Ce *lapillus*, avec ses filets nerveux, se trouve justement couvrir l'orifice du globe osseux antérieur, orifice que

nous nommerons *fenêtre antérieure.* Le but de cette disposition est indubitablement de rendre l'oreille plus sensible aux vibrations sonores qui viennent par le *globe osseux.* Le troisième filet nerveux se rend au bulbe accessoire ou prétendu limaçon, et les deux derniers se portent sur les deux ampoules antérieures.

Le *nerf auditif postérieur* est un peu plus petit que le précédent; il se partage en trois filets, dont l'un va à l'ampoule postérieure, l'autre s'épanouit sur les bords du grand *lapillus* contenu dans le *saccule,* et le troisième gagne les bords du petit *lapillus* postérieur. L'oreille de l'alose et des autres clupes est la plus compliquée de toutes celles qu'on observe dans l'ordre des poissons. C'est en effet l'unique genre qui présente bien manifestement des traces de tympan et des apparences de limaçon. Il y a ici deux fenêtres comme dans les animaux supérieurs. (Par *fenêtre* il faut toujours entendre un amincissement membraneux contigu, d'une part, avec le vestibule membraneux ou avec une de ses dépendances, et de l'autre avec le dehors ou du moins avec une cavité plus extérieure que celle du labyrinthe.) Mais il n'y a plus qu'une seule fenêtre dans l'alose, qui s'ouvre dans le tympan, l'autre s'ouvre déjà dans le pharynx, vu le peu de développement de la cavité tympanique qui n'a pu l'embrasser. La fenêtre antérieure est sans doute celle qui correspond à notre fenêtre ovale. Il y a en outre dans l'alose deux dépendances de l'organe auditif, les deux commissures, qui semblent destinées à mettre l'encéphale dans un contact plus intime avec l'ouïe.

Tant de développement dans un organe d'*avertissement* fait déjà dire *à priori* que l'alose est un poisson faible, constamment obligé de se tenir en garde, par tous les moyens que lui accorde la nature, pour échapper aux poursuites de ses ennemis. (Voy. pl. IV, fig. 1, 2, 3, 4, 5, etc.)

CHAPITRE IV.

ORGANE AUDITIF DU MAQUEREAU (*Scomber-scombrus,* L.)

L'oreille du maquereau se distingue par sa simplicité et par

l'absence de tout caractère bien tranché. Elle ne tient à aucun appareil extérieur comme cela a lieu, par exemple, dans la carpe, l'alose, etc.; elle ne présente pas même une fenêtre, ou, en d'autres termes, le vestibule membraneux n'est en rapport avec aucun amincissement de la paroi crânienne, au moyen duquel les vibrations du dehors seraient plus facilement transmises. Il ne nous reste donc à décrire que ce qu'on nomme proprement l'*oreille interne.* (Voyez pl. V, fig. 3.)

La description de l'oreille interne comprendra le vestibule membraneux et l'appareil des canaux semi-circulaires. Ces deux parties de l'organe auditif sont très-distinctes l'une de l'autre dans le maquereau; elles ne tiennent ensemble que par un petit étranglement, et sont plus distantes l'une de l'autre que cela n'a lieu ordinairement. Les deux organes auditifs sont situés aux parties postérieures et latérales de la cavité crânienne, et leurs portions les plus internes ne sont séparées de la cavité du crâne que par une pellicule extrêmement délicate. Le tissu de l'organe auditif lui-même est mince, lâche et nullement résistant; en ceci, l'oreille du maquereau diffère de celle du thon, qui est du même genre, mais dont la substance auditive possède une certaine résistance et une certaine élasticité.

1° *Du vestibule membraneux.*

Le vestibule membraneux est un sac allongé d'arrière en avant, renflé dans une cavité particulière à la base du crâne, et contenant dans son intérieur deux *otolithes.* La cavité dans laquelle il est logé a trois lignes et demie de longueur, une ligne de largeur et une ligne de profondeur; elle est très-rapprochée de celle du côté opposé : il n'y a guère qu'une ligne d'intervalle. Cette cavité occupe à peu près tout l'espace qui se trouve entre l'origine du nerf vague et celle de la cinquième paire; son bord supérieur est tranchant dans l'état naturel; elle est remplie par le *saccule* qui ne dépasse pas le niveau de la base du crâne, et qui envoie seulement une petite bride membraneuse, laquelle établit la communication des canaux semi-circulaires avec le *saccule.* Ce

dernier contient une humeur de consistance aqueuse, dans laquelle nagent deux *otolithes,* dont l'un antérieur plus grand, et l'autre postérieur plus petit. Ces *lapilli* sont très-développés eu égard à l'étendue du vestibule membraneux Le grand *otolithe* a la forme d'un carré allongé, sa longueur est de deux lignes, sa largeur de plus d'une demi-ligne; son extrémité présente une espèce de saillie ou d'apophyse; une des faces est concave et l'autre convexe. Le petit *lapillus* a une forme semi-lunaire et n'a guère au delà d'une demi-ligne de longueur: un des bords est concave et tranchant, l'autre est plus épais et convexe. (Voy. Pl. V, fig. 4 et 5.) Quant aux nerfs du vestibule, nous les décrirons avec ceux des ampoules, après avoir parlé de l'appareil des canaux semi-circulaires.

2° *Appareil du labyrinthe membraneux* ou *bulbe auditif.* Dans cet appareil, nous décrirons, comme nous l'avons toujours fait jusqu'à présent, plusieurs parties, savoir : le *sinus médian* ou *sinus utriculosus,* qui est pour ainsi dire le rendez-vous des trois canaux, et le *saccule;* puis les *ampoules,* également au nombre de trois comme les canaux, et qui peuvent être considérées comme les racines ou les bulbes des *canaux semi-circulaires;* enfin ces canaux eux-mêmes.

A. Le *sinus médian* s'étend depuis le sommet jusqu'à la base de la cavité du crâne, c'est-à-dire depuis la réunion des *canaux semi-circulaires antérieur* et *postérieur,* avec lesquels il se continue, jusqu'au *saccule;* c'est un canal aplati, étroit supérieurement et élargi inférieurement. Sa partie inférieure offre trois cornes : l'une antérieure, qui est la plus longue, et qui est en rapport avec les deux ampoules antérieures; la postérieure, qui est la plus courte, se continue avec l'ampoule postérieure; la corne moyenne se continue avec le *saccule* et constitue ce rétrécissement dont nous avons déjà parlé plus haut. De tout cela il résulte que le *sinus médian* n'est qu'un organe destiné à établir des rapports entre les différentes parties de l'oreille interne.

B. Les *ampoules* sont, comme toujours, au nombre de trois, deux *antérieures* et une *postérieure;* cette dernière est pour le canal

semi-circulaire du même nom, et les deux antérieures sont pour les deux canaux restants. Les ampoules sont très-bien dessinées, arrondies, légèrement comprimées et munies chacune d'un filet nerveux. D'un côté elles tiennent à la base du *sinus médian*, et de l'autre elles se continuent avec leurs canaux respectifs. A la base des deux canaux antérieurs se trouve un tout petit *lapillus*, ayant la forme d'un prisme tétraèdre, mais ne dépassant point le volume d'un grain de millet. Un semblable *lapillus* ne se trouve pas auprès de l'ampoule postérieure.

C. Les *canaux semi-circulaires* ont proportionnellement assez d'étendue; c'est l'antérieur qui est le plus grand et l'externe qui est le plus petit. La forme de l'antérieur n'est rien moins que semi-circulaire; il décrit, au contraire, un carré à angles obtus; il n'est point logé dans un canal, mais seulement appliqué contre la paroi externe de la cavité crânienne. Le canal externe est logé dans un conduit osseux particulier, beaucoup plus large que ne l'exigeait son volume; ce canal ne décrit pas non plus un demi-cercle, mais il est ovalaire. Le canal externe est très-rétréci dans le milieu de son étendue; celui-ci forme à peu près un demi-cercle; il est logé dans un conduit osseux qui est pareillement resserré dans son milieu. Chacun de ces canaux présente, comme nous l'avons déjà observé, une extrémité pourvue d'une *ampoule;* l'extrémité non ampoulée des canaux antérieur et postérieur se termine dans la partie supérieure du *sinus médian*, et l'extrémité non ampoulée du canal externe se rend dans ce *sinus médian*, tout auprès de l'ampoule postérieure.

D. Le *nerf acoustique* provient de la partie latérale du bulbe rachidien et se divise aussitôt en deux faisceaux, dont l'un est antérieur et l'autre postérieur.

Le faisceau antérieur se distribue en quatre points différents; 1° un filet pour l'ampoule du canal antérieur; 2° un pour l'ampoule du canal externe; 3° un filet qui s'épanouit sur le petit *lapillus* qui est à la base des ampoules antérieures, et 4° une série de petits filaments à la partie antérieure du *saccule*.

Le faisceau postérieur n'a que deux points de distribution, 1° un filet à l'ampoule postérieure, et 2° une série de petits filaments à la partie postérieure du *saccule*. (Voyez, pour compléter cette histoire, les planches qui représentent l'oreille du *scomber scombrus* (pl. V, fig. 3 et 4), et du *scomber thynnus* (pl. XIV, fig. 1 et 2), ainsi que leur description.

CHAPITRE V.

ORGANE AUDITIF DU MILANDRE (*Squalus galeus*, L.)

L'organe auditif de ce poisson est très-développé et ressemble à celui des autres chondroptérigiens. (Voy. pl. V, fig. 1 et 2.)

Il est formé de trois tubes semi-circulaires très-étendus, l'un antérieur, l'autre postérieur et le troisième externe; tous trois ont des ampoules à leur origine; ils ne remplissent pas à beaucoup près les canaux dans lesquels ils sont situés.

Ils tiennent, ainsi que le bulbe, aux parois de la cavité auditive par le moyen de nombreuses brides cellulaires.

Le nerf auditif naît près de celui de la cinquième paire, sous les corps restiformes; il est considérable, élargi et se divise bientôt en deux faisceaux, dont l'un antérieur et l'autre postérieur: ces faisceaux s'épanouissent chacun de son côté dans le bulbe et les ampoules.

L'ampoule contenait (sur l'individu que j'ai examiné) une substance transparente gélatineuse; je n'y ai point trouvé de *lapillus;* mais, comme la pièce avait longtemps séjourné dans du vinaigre, il est probable que le *lapillus* aura été dissous.

Sur le côté interne du bulbe auditif, on voit deux cavités dirigées de haut en bas et recourbées en arrière vers leur extrémité. Ces conduits se rétrécissent près de la peau extérieure et semblent être bouchées en cet endroit par du tissu cellulaire; ils aboutissent à la partie moyenne et supérieure de la tête où ils s'ouvrent par deux petits orifices.

Dans le milandre, il y a ce qu'on nomme improprement des

évents : ceux-ci s'ouvrent par de petits orifices sur la tête, près de la ligne médiane et au-dessus des organes auditifs; ces petits pertuis conduisent dans un canal qui s'élargit considérablement en descendant; il a sa plus grande largeur à peu près au niveau du cerveau. Le canal se trouve sur le côté interne du bulbe auditif, et n'est séparé de la cavité crânienne que par une mince lame cartilagineuse. Vers la base de la cavité crânienne il se recourbe en arrière. Ce canal est tapissé d'une membrane, et voici comment il se comporte à l'égard de l'organe auditif: 1° il communique avec l'intérieur du bulbe auditif, au moyen d'un orifice d'une ligne de diamètre; cet orifice est en dehors et se dirige de haut en bas; 2° il communique (en s'y terminant inférieurement) avec le canal semi-circulaire postérieur, en se continuant avec l'ampoule inférieure de celui-ci. D'après tout cela, il me semble que l'*évent* de ce poisson n'est autre chose que l'*aqueduc du vestibule* des animaux supérieurs.

CHAPITRE VI.

ORGANE AUDITIF DU CONGRE (*Muræna conger, L.*).

Organe auditif. Renfermé dans l'intérieur du crâne comme dans tous les poissons osseux. (Pl. VI, fig. 1.)

Vestibule osseux. Vaste, rempli de petites cellulosités qui se continuent avec celles de la cavité crânienne, ayant beaucoup plus d'espace qu'il n'en faut pour loger le bulbe auditif et les canaux semi-circulaires. Les parois qui renferment l'organe auditif sont de toutes parts cartilagineuses; elles peuvent être coupées avec le scalpel; ce n'est qu'à une certaine distance de l'oreille qu'elles redeviennent osseuses.

Vestibule membraneux. Oblong ou elliptique d'avant en arrière; arrondi à sa face inférieure, un peu aplati supérieurement. La face supérieure se continue avec le *sinus médian* ou *utriculiforme.* Dans l'intérieur du vestibule membraneux l'on aperçoit le *lapillus* qui est blanc, oblong et assez lisse. L'extrémité postérieure

du même vestibule se continue en un petit bourrelet semi-cartilagineux qui s'attache d'une manière assez intime au squelette du crâne. (Pl. VI, fig. 1, *a, b.*)

Sinus médian ou *utriculiforme.* Il se continue en avant et en arrière, avec les ampoules des canaux semi-circulaires; de sa partie moyenne s'élève un prolongement auquel aboutissent les canaux semi-circulaires antérieur et postérieur.

Ampoules. Il y en a trois; chaque canal semi-circulaire a la sienne. Ainsi, il n'y a qu'une seule extrémité de chaque canal qui soit pourvue d'une ampoule; celles du canal antérieur et du canal externe se trouvent l'une à côté de l'autre à la partie antérieure et externe du *sinus médian* ; celle du canal postérieur se trouve en dehors de l'extrémité postérieure du même sinus; chaque ampoule reçoit son petit cordon nerveux qui s'y termine d'une manière subite. (Pl. VI, fig. 1, *c, e, g.*)

Canaux semi-circulaires. Il faut toujours y considérer deux extrémités bien distinctes, l'une pourvue d'une ampoule et l'autre privée de cette partie.

Les canaux antérieur et postérieur se terminent par leur extrémité dépourvue d'ampoules, au prolongement mitoyen du *sinus utriculiforme;* l'extrémité non ampoulée du canal extérieur se rend dans l'extrémité postérieur du sinus mentionné.

Les nerfs partent des parties latérales du bulbe rachidien, par deux faisceaux, dont l'un antérieur et l'autre postérieur. Chacun de ces faisceaux se subdivise bientôt, en sorte qu'il y a quatre cordons nerveux à considérer près de l'organe auditif :

1° Le *faisceau antérieur et supérieur* est le plus gros de tous, il se termine tout entier dans les ampoules des canaux antérieur et externe.

2° Le *faisceau postérieur et supérieur* est plus petit que le précédent, fournit un premier cordon à l'ampoule du canal postérieur, puis un second cordon qui passe derrière cette ampoule, traverse la paroi crânienne, et va se distribuer en dehors : ce dernier est l'analogue de la portion dure de la septième paire.

3° et 4° Les deux faisceaux inférieurs, dont l'un est antérieur

et l'autre postérieur, se distribuent chacun par une grande quantité de filaments sur le bord antérieur du vestibule membraneux au niveau et le long du *lapillus*. (Pl. VI, fig. 1, *i, k, l, l.*)

De tous les faits contenus dans ces premiers chapitres, n'est-on pas autorisé à conclure :

1° Que l'organe de l'ouïe de la lamproie est des plus simples, qu'il ressemble beaucoup plus à celui de quelques mollusques ou de quelques crustacés, qu'à celui des autres poissons.

2° Que dans la lamproie il n'y a réellement point de canaux demi-circulaires, mais qu'une matière amylacée ou crétacée, sous forme cristalline, disposée en demi-cercles et apercevable seulement à une forte loupe ou au microscope, indique l'état rudimentaire de ces canaux.

3° Que cette matière amylacée, refusée à l'oreille de la lamproie par plusieurs anatomistes modernes, existe réellement, et qu'elle indique ici, comme dans d'autres poissons, un développement organique à un degré inférieur.

4° Que l'esturgeon présente un tympan à l'état le plus simple, caractérisé par la présence d'un rudiment d'osselet (*étrier*) situé en dehors des cavités du labyrinthe, retenu en position par un ligament, et appliqué sur le côté externe du *saccule*, auquel il transmet problablement les vibrations qu'il reçoit du dehors : disposition qui n'a été indiquée par aucun zoologiste, pas même par Kalrœuter [1], auquel nous devons la description la plus circonstanciée de l'oreille de plusieurs esturgeons, ni par Chr.-Ed. Pohl [2], qui a donné, en 1818, la description de l'oreille de l'*acipenser sturio* et de l'*acipenser huso*.

5° Que l'alose et plusieurs autres clupes ont une oreille fort

[1] *Miss. histor. piscium promovendæ.* 1740 et 1746 in-4°, Lipsiæ.

[2] *Expositio generalis anatomica organis auditus per classes animalium.* Vindebonæ, 1818.

complexe, dans laquelle on peut aussi reconnaître des rudiments de cochlée et peut être de tympan, mais autrement disposés que dans l'esturgeon, et que cet organe présente avec la vessie natatoire une communication directe et incontestable. Ces diverses dispositions sont très-remarquables et doivent être placées à côté de celles qui déjà ont été signalées par E.-H. Weber[1], dans les *cyprins*, le *silurus glanis*, le *cobitis fossilis*, etc., par MM. les professeurs Otto[2] et Heusinger, dans le *lepidoleprus* et dans les *mormyres*; enfin, par M. Cuvier, dans le *myripristis*[3].

CHAPITRE VII.

Dans les sciences fondées sur l'expérience et l'observation, on devrait peut-être une ou deux fois chaque siècle faire un inventaire des divers faits déjà enregistrés, et voir si tous ont été exprimés avec précision et exactitude. Cette espèce de recensement de nos connaissances, s'il ne conduisait pas à de nouvelles découvertes apporterait du moins une plus grande rigueur dans les connaissances que déjà nous possédons.

Ce désir a été exprimé par un membre de cette académie, et en entreprenant ce travail j'ai moins pensé à découvrir des dispositions jusqu'ici inconnues dans la structure de l'oreille, qu'à vérifier ce qu'on avait déjà dit, ou à étendre, d'après l'examen, ces notions à un plus grand nombre d'animaux, pour reconnaître le degré de justesse du système des analogies. Encouragé par M. G. Cuvier, d'après mes premières recherches sur l'organe de l'audition de quelques poissons, je fus engagé par cet illustre savant à revoir

[1] *De aure et auditu hominis et animalium. Pars prima : de aure animalium aquatilium. Lipsiæ 1820.*

[2] *Uber die Gehororgane des Lepidoleprus trachyrhincus und cælorrinchus;* von A.-W. Otto, professor in Breslaw. *Zeitschrift zur Physiologie*, von fr. Tiedemann und Treviranus, etc. T. 2, p. 86. Darmstadt, 1826.

[3] Histoire naturelle des poissons, par le b^on^ Cuvier et M. Valenciennes. T. 1^er^, p. 458. Paris, 1828.

tout ce qu'on avait fait sur cet organe, afin de dissiper les doutes sur certaines dispositions; par exemple, sur l'oreille des raies et des squales.

Le travail que nous communiquons aujourd'hui à l'académie des sciences est la continuation de celui sur lequel MM. G. Cuvier et C. Dumeril ont fait un rapport[1], et nous nous proposons de persévérer avec le même zèle, parce que nous sommes certain de trouver dans MM. Dumeril et Valenciennes, au Muséum du Jardin du Roi, les mêmes facilités que celles que nous a toujours données M. G. Cuvier.

Il faut donc chercher dans ces travaux bien moins un grand nombre de faits nouveaux que des faits mieux observés, et qui doivent dissiper des incertitudes et faire cesser des contestations. Si la généralisation des faits et l'établissement des lois d'une science sont l'œuvre du génie, l'observation exacte doit les précéder, et dès lors elle est d'un haut intérêt. Cependant, comme le dit avec justesse l'auteur de la *Philosophie de l'anatomie*[2], les faits n'arrivent aux âges futurs que s'ils sont escortés et protégés par les idées qui s'y rapportent, et qui seules par conséquent en font la principale valeur; c'est pourquoi nous avons cru pouvoir, dans le cours de tous ces mémoires, que nous considérons bien moins comme des travaux achevés ou comme des monographies complètes, que comme de simples matériaux pour servir à l'anatomie comparée, hasarder quelques explications ou quelques théories, parfois un peu hypothétiques, mais toujours en rapport avec les lois de la physiologie générale.

Bien qu'on ait comparé l'organe auditif à un instrument d'acous-

[1] Le premier mémoire présenté à l'académie des sciences, le 2 novembre 1829, et sur lequel MM. G. Cuvier et C. Dumeril ont fait un rapport, en 1830, avait pour titre : *Mémoire sur la structure de l'organe de l'ouïe dans les poissons.*

Nous publierons ce mémoire immédiatement après ceux-ci. Le nombre des planches nous force à ne pas suivre dans l'impression l'ordre chronologique et celui de la présentation à l'académie des sciences.

[2] Recherches sur de grands sauriens trouvés à l'état fossile vers les confins maritimes de la Basse-Normandie, etc., par M. Geoffroy Saint-Hilaire, page 136; Paris, 1831.

tique, il ne faut pas en inférer que l'appareil soit toujours le même, et qu'on y trouve constamment et le même nombre de pièces et une disposition semblable. A considérer cet instrument dans les animaux vertébrés, on reconnaît qu'il est très-compliqué dans les mammifères; qu'il l'est déjà bien moins dans les oiseaux; mais dans ces deux classes le type reste le même pour tous les ordres et tous les genres, tandis qu'on voit de nombreuses modifications et des différences capitales entre les divers ordres des poissons, ou entre les reptiles comparés les uns aux autres. Ainsi, par exemple, l'oreille d'un saurien ne ressemble guère à celle d'un batracien, et parmi les batraciens cet organe présente encore des différences très-remarquables; mais ces différences portent sur les annexes de l'appareil, ou parties accessoires, et non sur les pièces fondamentales.

L'étude de l'oreille d'un mammifère ou d'un oiseau donnera une idée exacte de la disposition de l'organe dans toute la série des animaux de la même classe, tandis qu'il en est tout autrement pour les poissons et les reptiles, où les modifications des parties secondaires sont beaucoup plus grandes et plus multipliées.

Dans les poissons, dont nous nous sommes occupé plus spécialement, on peut rapporter les dispositions différentes à cinq types principaux. Les deux premiers appartiennent aux chondroptérigiens; le troisième contient et des poissons cartilagineux et des poissons osseux; enfin, les deux derniers sont exclusifs aux poissons osseux.

1° Le premier type est propre aux cyclostomes, et nous l'avons décrit dans le mémoire, où nous traçons l'histoire de l'oreille de la lamproie. C'est une simple poche contenant un liquide et une concrétion pierreuse, mais il n'y a ni divisions dans cette espèce de *crypte,* ni canaux ou tubes semi-circulaires.

2° Le second type se rapporte à l'oreille des raies, des chimères, etc. Ici l'on voit une poche contenant des amas pulvérulents (*otoconies*) et des ouvertures qui sont, les unes fermées par une simple cloison membraneuse, les autres presque constamment béantes et communiquant avec l'extérieur.

3° Le troisième type comprend l'oreille des *lamies*, des *mormyres*, du *lepidoleprus*, etc. L'organe offre de simples ouvertures ou fenêtres vestibulaires fermées par des expansions membraneuses ou des rudiments de chaîne osseuse, comme, par exemple, dans quelques *sturioniens*, deux poches *lapidifères*, des tubes semi-circulaires membraneux. Le caractère principal est ici l'existence d'ouvertures closes par des membranes et établissant des communications médiates entre l'extérieur et le labyrinthe.

4° Le quatrième type est le plus simple et le plus répandu; il appartient presque exclusivement aux poissons osseux; on voit deux poches vestibulaires et trois tubes semi-circulaires, mais aucun pertuis en rapport avec l'extérieur, soit fermé, soit ouvert, n'a encore été aperçu.

5° Enfin, sous le cinquième type se rangent tous les Poissons dont le labyrinthe membraneux communique plus ou moins directement avec la vessie aérienne. Les *clupes*, les *cyprins*, les *spares*, les *cobites*, les *silures*, etc., nous en fournissent des exemples incontestables.

Dans un de nos mémoires sur l'oreille des poissons, nous nous sommes particulièrement attachés à faire connaître les connexions et les parties accessoires de l'organe auditif, et à découvrir dans quelques espèces les vestiges d'un tympan; à constater les communications, déjà signalées par plusieurs anatomistes, entre les cavités du labyrinthe et la vessie aérienne ou natatoire. Depuis cette époque nous avons continué nos investigations sur ce dernier point, et nous avons découvert plusieurs dispositions jusqu'ici inaperçues; mais, la gravure de nos dessins n'étant pas achevée, nous remettons à une autre époque d'en faire connaître les résultats.

Cependant, en attendant que nous ayons pu compléter la série de recherches que nous avons entreprises, nous croyons pouvoir publier ce que nous avons vu sur plusieurs poissons dont l'oreille n'a aucune communication avec la vessie aérienne et ce que nous avons observé sur la communication avec cette vessie ou avec le milieu aqueux dans lequel vit l'animal.

L'oreille de quelques-uns de ces poissons n'avait pas encore été examinée, tandis que celle de quelques autres avait déjà été décrite, mais nous avons trouvé à rectifier plusieurs indications, ou à leur donner plus de développement ou plus de précision. Nous croyons donc nos recherches dignes de quelque intérêt, et leurs résultats assez importants pour être communiqués à une académie qui accueille toujours favorablement les moindres faits fournis par l'observation ou par l'expérience.

Les poissons sur lesquels ont porté nos recherches, après celles que nous avions faites sur les lamproies, les esturgeons et les clupes, le maquereau, le thon, le milandre, le congre, sont :

1° Plusieurs squales;
2° Un grand nombre de raies;
3° La chimère antarctique;
4° Le brochet;
5° Le grondin;
6° Le turbot;
7° Le saumon;
8° Le bar;
9° La baudroie;
10° L'anguille;
11° Le ptéroïs.
12° Les cyprins.

Avant d'entrer dans la description des différences entre les diverses pièces constitutives de l'oreille des poissons, indiquons, par une simple énumération, les parties qui forment la base de cet organe :

1° Cage osseuse ou cartilagineuse enveloppant le labyrinthe membraneux;

2° Labyrinthe membraneux consistant :

A En sinus médian ou utriculeux;

B Sac ou saccule;

C Tubes demi-circulaires et ampoules de ces tubes;
D Utricule;
E Cysticule;
F *Otolithes* ou pierres auditives; *otoconies* ou matière pulvérulente du labyrinthe;
G *Périlympe* ou lymphe de Cotugno;
H *Endolymphe* ou liqueur contenue dans le labyrinthe membraneux, le sac, l'utricule, les canaux membraneux demi-circulaires et leurs ampoules.
I Nerfs.

CHAPITRE VIII.

ORGANE AUDITIF DE LA BAUDROIE (*Lophius piscatorius, L., Rana piscatrix,* Raie pêcheresse). (Voy. pl. VI, fig. 3 et 4.)

L'oreille de la baudroie est construite d'après le même type que celle des poissons osseux, c'est-à-dire qu'elle est contenue dans une cavité qui n'est point isolée de la cavité crânienne; qu'elle est formée de trois tubes semi-circulaires, d'un sinus utriculeux ou médian et d'un sac; qu'elle contient des otolithes ou concrétions solides pierreuses, et qu'elle est pourvue de deux petites poches, ou arrière-cavités, qui donnent à cet appareil un caractère de perfectionnement.

Elle est située sur les côtés du cerveau, entre la cinquième et la huitième paire de nerfs. De ces trois canaux demi-circulaires, il n'y a que l'externe et le postérieur qui soient enclavés, l'antérieur ne l'est point. Chacun de ces tubes est pourvu d'une ampoule à l'une de ses extrémités. Deux ampoules, celles des tubes antérieur et externe, sont attachées au bout antérieur du sinus médian; l'ampoule du tube postérieur est fixée à l'extrémité postérieure du même sinus. Les tubes antérieur et postérieur se réunissent par leurs extrémités non renflées pour former un tuyau membraneux commun, lequel descend s'ouvrir dans le milieu du sinus médian. L'extrémité non renflée du canal externe vient s'aboucher

dans la partie postérieure et interne du sinus médian, un peu au devant de l'ampoule postérieure. Chaque ampoule reçoit un filet nerveux qui s'y termine aussitôt, sans se ramifier ou s'étendre plus loin.

Le *sinus median* est une poche membraneuse, aplatie, ayant trois angles mousses, dont l'antérieur est plus allongé. Cette poche sert de rendez-vous aux tubes semi-circulaires, qui s'y ouvrent par leurs six extrémités; inférieurement elle donne attache au *sac*, avec lequel elle communique également. L'extrémité ou l'angle postérieur du sinus médian donne attache à l'ampoule postérieure; l'angle supérieur reçoit les deux bouts non renflés des tubes membraneux semi-circulaires antérieur et postérieur; l'angle antérieur, qui est très-allongé et légèrement renflé vers le bout, donne attache aux deux ampoules antérieures : c'est dans le bout renflé de cet angle, et au-dessous de l'insertion des deux ampoules, que se trouve un fort petit *lapillus* ou *otolithe*, et c'est au même endroit que vient s'épanouir un petit faisceau du nerf auditif, le seul faisceau nerveux que reçoive le sinus médian. Le *sac* ou *saccule* n'est guère plus ample que le sinus médian; il s'attache à ce dernier par les deux cinquièmes seulement de son étendue; il est, ainsi que lui, allongé d'arrière en avant, plus rétréci à ses deux extrémités qu'au milieu; en arrière il est muni d'un petit appendice, que nous avons nommé le *cysticule*, dont la cavité communique avec la sienne. C'est sans doute un appendice du même genre que Scarpa et Comparetti ont indiqué et représenté sur l'oreille du *brochet* (*esox lucius*), et que le premier considère comme un rudiment de limaçon. Cependant l'appendice du vestibule du brochet dépend du sinus médian, ne contient pas d'otolithe, et ne reçoit pas de filet nerveux.

La cavité du *sac* ainsi que celle de l'appendice ou *cysticule* contiennent chacune un *lapillus*, mais l'otolithe du cysticule est beaucoup plus petit que celui du *sac*. Le *sac* reçoit un joli faisceau de filaments nerveux vis-à-vis l'endroit où se trouve le grand *lapillus;* le cysticule reçoit également un faisceau nerveux. L'otolithe

du sinus médian est le plus petit; celui du cysticule est le moyen pour la grandeur; celui du sac est beaucoup plus grand que les deux premiers. (Voy. pl. VI, fig. 3, *h, s, t.*)

D'après ce qu'on vient de voir, les filets du nerf auditif se distribuent 1° aux ampoules des tubes membraneux semi-circulaires; 2° aux parties du labyrinthe qui contiennent des concrétions pierreuses. Le faisceau qui constitue l'ensemble du nerf auditif tire son origine de la partie latérale de la moelle allongée. Les parois du labyrinthe sont minces, transparentes, un peu élastiques; elles contiennent une humeur albumineuse, limpide, dans laquelle nagent les différents *otolithes.*

Nous avons déjà donné l'histoire de l'oreille de la baudroie comme un des principaux types de la disposition de l'appareil auditif de beaucoup de poissons. En effet, nous trouvons que dans cette espèce toutes les parties sont très-bien exprimées, et qu'à l'exception des communications en arrière avec la vessie aérienne, comme dans les cyprins, les clupes, les cobites, les sparès, etc., et les communications en haut avec l'extérieur, comme dans les raies, les chimères, etc., l'oreille de la baudroie offre dans son ensemble un développement complet des parties qui constituent le labyrinthe membraneux des poissons.

Nous joignons à cette description de l'organe auditif de la baudroie une figure représentant l'oreille membraneuse de grandeur naturelle, et vue dans ses rapports avec la cavité osseuse du labyrinthe; mais par une autre figure nous avons fait représenter, considérablement grossies, toutes les parties constitutives du labyrinthe membraneux, et à chacune de ces parties nous avons donné un nom. De la sorte nous avons pris la baudroie comme type, et, en imposant des noms à chaque disposition de ce petit appareil, nous avons cherché à introduire une plus grande rigueur dans notre nomenclature anatomique [1].

[1] Voyez pour cette figure notre mémoire intitulé : *Recherches anatomiques et physiologiques sur l'organe de l'ouïe et sur l'audition dans l'homme et les animaux vertébrés,* 2e édition, Paris, 1836. (Planche 1re, fig. 2.)

Deux parties distinctes se font surtout remarquer dans l'oreille de la baudroie : l'une en avant, c'est l'*utricule;* l'autre en arrière, c'est le *cysticule.* Nous verrons que dans beaucoup d'autres poissons il n'existe que l'une ou l'autre de ces deux petites poches sur lesquelles, excepté pour l'*esox lucius,* les anatomistes ne se sont presque jamais arrêtés. (Voy. pl. VI, fig. 3.)

CHAPITRE IX.

ORGANE AUDITIF DU SAUMON (*Salmo salar,* L.).

Le saumon forme le type d'une grande famille parmi les poissons malacoptérygiens; nous avons dû en étudier l'organe auditif, afin de connaître jusque dans leurs détails les différentes variations que ce sens présente dans les divers groupes de cette famille du règne animal.

L'oreille du saumon appartient au même type que celle du plus grand nombre des poissons osseux, c'est-à-dire qu'il y a trois *otolithes* ou concrétions pierreuses; que la cavité dans laquelle l'organe est contenu communique avec celle du crâne, et que le sac est séparé du sinus médian par une espèce d'étranglement.

Au reste, la disposition des trois ampoules et des trois tubes semi-circulaires n'offre rien de particulier; elle est la même que celle que l'on a décrite dans la plupart des poissons jusqu'à ce jour, et un regard jeté sur la planche en donnera une idée parfaite. Une chose bonne à noter, c'est qu'ici chacun des trois tubes semi-circulaires est enchaîné, tandis que dans plusieurs autres poissons le tube antérieur ne l'est pas. (Voy. pl. VIII, fig. 2, 2 *a*, 2 *b*.)

Le sac est renfermé dans une cavité particulière creusée dans la base du crâne, disposition déjà signalée pour ce poisson et pour la carpe par MM. G. Cuvier et C. Duméril; il se trouve donc au-dessous du niveau du cerveau, et c'est pour cette raison que les filets nerveux qui s'y rendent sont obligés de descendre directement en sortant de la moelle allongée. La cavité du crâne est

remplie d'un liquide albumineux qui baigne l'encéphale et en même temps l'organe de l'ouïe; ce liquide doit être considéré comme l'analogue de l'humeur de Cotugno chez les animaux supérieurs, car c'est par lui également que les ondes sonores doivent être transmises à l'appareil délicat de l'audition.

Nous ne voyons aucune autre particularité digne de remarque qui doive nous arrêter, et sur laquelle nous puissions appeler l'attention du lecteur. C'est parce que l'oreille des *saumons* n'a pas jusqu'ici été décrite et représentée dans son ensemble, que nous en avons donné la figure et une courte description. Il n'y a de bien marqué dans cette oreille que la séparation distincte du sinus médian avec le sac, et que la position déclive de cette dernière partie. (Voy. pl. VII, fig. 2, 2*b*, *c*, *d*.)

CHAPITRE X.

ORGANE AUDITIF DU TURBOT (*Pleuronectes maximus*, L.).

Les pleuronectes sont des poissons dont la conformation est trop singulière pour que nous ne nous soyons pas empressés d'en étudier l'oreille. Cependant rien de bien particulier nous a frappé, et l'organe auditif d'un côté ressemble absolument à celui de l'autre côté, quoique ces deux organes soient placés l'un au-dessus de l'autre. En effet, puisque les pleuronectes nagent sur le côté, et que les oreilles sont d'ailleurs dans leur rapport ordinaire avec l'encéphale, il s'ensuit tout naturellement qu'une des oreilles doit être en dessus et l'autre en dessous. Chez le turbot l'oreille droite est inférieure et l'encéphale est situé entre les deux oreilles, comme cela existe toujours.

Dans le turbot l'organe auditif est séparé de la cavité du crâne par une expansion fibreuse, qui s'attache à cet organe et contribue ainsi à lui donner une position plus fixe. Une autre circonstance qui contribue à fixer l'oreille dans sa position, c'est que chaque sac est contenu dans une cavité profonde qui ne lui permet pas de s'y mouvoir.

Le *sacculus* ou *sac*, visible en *d* (fig. 1re, pl. VII), est une poche oblongue, remplie d'un liquide gélatiniforme, dans lequel on voit nager deux concrétions pierreuses, que nous avons fait figurer en *b* et *c* (fig. 1re, *a*, pl. VII). L'analyse chimique que M. E. Barruel fils a faite de ces concrétions lithoïdes ou *otolithes*, a fourni les résultats suivants : sur 100 parties il a trouvé :

Matière animale. . . .	22, 60
Carbonate de chaux.	74, 51
Perte.	2, 89
	100, 00

Le chimiste dont nous venons de parler n'y a pu découvrir aucune trace de phosphate de chaux, ni de carbonate de magnésie.

Le *saccule* ou *sac* ne tient au reste de l'oreille que par une sorte de pédicule assez étroit. Au moyen de ce pédicule, il communique avec le *Sinus médian* qu'on voit en *e* (fig. 1re, pl. VII). Le sinus médian se prolonge en trois sens différents; 1° en haut, pour se diviser dans les deux tubes semi-circulaires *i* et *k*, 2° en avant, pour fournir une attache aux deux ampoules *f* et *g*; cette extrémité antérieure est un peu renflée et contient dans son intérieur le petit *otolithe* ou *lapillus*, qu'on voit figurer en *a* (fig. 1re, *a*); 3° en arrière pour donner attache à l'ampoule *h* et pour se continuer dans le canal demi-circulaire *l m*.

Les *trois tubes demi-circulaires* se distinguent en ce qu'ils sont un peu grêles pour l'espace qu'ils circonscrivent. Du reste, ils sont munis chacun d'une ampoule *f*, *g*, *h*, et se distinguent en antérieur (*i*), en postérieur (*k*) et en externe (*l*, *m*).

Le nerf auditif *n* part du côté de la moelle allongée par un seul faisceau, dont tous les filaments sont destinés à l'organe auditif, à l'exception du filet *o*, qui sort du crâne par un petit orifice particulier. Parmi les filets auditifs trois sont destinés aux trois ampoules. Un pinceau de filets s'épanouit dans l'extrémité antérieure

du *sinus médian*, un autre pinceau plus grand se répand dans le *sac* vis-à-vis de la grande concrétion pierreuse; enfin, un dernier filet gagne la partie postérieure du *sac* pour s'épanouir vis-à-vis la petite concrétion qui se trouve dans cet endroit.

Jusqu'à M. de Blainville il n'y avait, à notre connaissance, que Geoffroy qui eût parlé avec quelque détail de l'oreille des pleuronectes, et encore cet auteur ne donne-t-il qu'une description confuse, sans figures, du labyrinthe de la limande (*pleuronectes limanda*, L.), dans laquelle on pourrait démontrer plusieurs erreurs, sans parler des prétendues ouvertures pour le passage des nerfs, et qu'il considère comme représentant des conduits auditifs. Je ne ferai pas un semblable reproche à M. de Blainville qui, en peu de mots, a signalé les principales dispositions du labyrinthe du turbot. Ce qu'il dit du vestibule osseux est exact; cette cavité est petite, et le *sac* se trouve logé hors de ce vestibule dans une excavation des os du crâne, étrangère à l'oreille proprement dite. On voit encore ici une séparation très-marquée par un étranglement ou par un pédicule entre le *sinus médian* et le *sac* lui-même.

CHAPITRE XI.

ORGANE AUDITIF DE L'ANGUILLE (*Muræna anguilla*, L.).

Le squelette osseux de la tête de l'anguille est extrêmement petit en proportion de la tête fraîche. La figure que nous donnons a été faite d'après la plus grosse anguille qu'il nous a été possible d'obtenir; cette figure est de grandeur naturelle. (Voy. pl. VII, fig. 3.)

L'oreille de ce poisson ne présente rien de particulier; elle est seulement remarquable par sa petitesse; on éprouve beaucoup de difficulté pour la disséquer, parce que les parois du labyrinthe sont très-délicates et transparentes (ce qui fait qu'on les aperçoit diffi-

cilement), et parce qu'elle est entourée d'un tissu gras trop tendre pour pouvoir être enlevé avec la pince.

Elle est située sur les côtés de la cavité cérébrale, dont elle n'est séparée que par une expansion membraneuse assez fine.

Le *Vestibule membraneux* (*e*) est contenu dans une petite excavation creusée dans la base du crâne. Il contient dans son intérieur un *lapillus* ou *otolithe* solide, de deux lignes de long sur une de large. Par sa partie supérieure il se continue avec l'appareil des tubes demi-circulaires.

Cet appareil se compose d'un *sinus médian* ou *utriculeux* (*h*) et de trois *tubes semi-circulaires* (*f, g, i,* fig. 3, pl. VII).

En se détachant du vestibule membraneux, le sinus médian se prolonge en trois sens, savoir : 1° en avant, pour donner attache aux deux ampoules antérieures; 2° en arrière, pour donner attache à l'ampoule postérieure et pour recevoir l'extrémité non ampoulée du tube externe; 3° en haut, pour recevoir l'extrémité non ampoulée des tubes antérieur et postérieur.

Les trois tubes demi-circulaires sont représentés, l'antérieur en *f*, le postérieur en *d* et l'externe en *i*.

Le *nerf* provient, comme toujours, de la moelle allongée; il se divise aussitôt en *auditif antérieur* et en *auditif postérieur*.

Le premier donne un filet à chacune des ampoules antérieures et d'autres filets grêles au *sac*. Le nerf auditif postérieur donne un filet à l'ampoule postérieure et également des radicules au *sac*.

Nous n'avons pas observé sur l'anguille un rapport ou une communication quelconque de l'organe auditif avec un appareil plus externe ou avec le dehors.

Toutes les parties de l'oreille de l'anguille sont formées d'après le même type que celui de la plupart des poissons osseux; nous ne voyons rien ici qui puisse rapprocher cette oreille de celle des reptiles, comme le veut Geoffroy. Dans les reptiles ophidiens il y a un rudiment de limaçon, tandis que rien de semblable ne se présente ici. Nous ne parlerons pas de l'analogie que cet auteur cherche à trouver entre les trois petits *otolithes* de l'oreille de l'anguille et

les osselets du tympan; cette erreur est celle de l'époque à laquelle ce médecin appartient, et il ne fait que répéter ce qu'on avait dit avant lui, et ce qu'on a dit encore longtemps après lui. Aujourd'hui où le système des analogies trouve plus que jamais des défenseurs, on a jugé cette analogie ce qu'elle vaut. Quoi qu'en dise Geoffroy [1], l'oreille de l'anguille est une oreille de poisson.

Comparetti n'a rien ajouté à la description donnée par Geoffroy, et l'un et l'autre cherchent, mais en vain, à trouver des ouvertures de communication entre l'intérieur du labyrinthe de l'anguille et l'extérieur. La figure que nous a laissée le premier de ces auteurs sur l'oreille du *Muræna anguilla* est plus intelligible que beaucoup d'autres figures de l'ouvrage de ce même anatomiste; mais la description qu'il fait de l'organe est entachée du défaut qui règne dans tout son livre, confusion et obscurité [2].

CHAPITRE XII.

ORGANE AUDITIF DU LOUP (*Perca labrax*, L.; *Sciæna diacantha*, Bl.).

(Voy. pl. XVI, fig. 1, 2, 3.)

L'organe auditif du bar ou loup offre de l'intérêt par sa grandeur, par un appendice qu'il porte à la partie postérieure du sac, enfin par des moyens d'union ou de communication entre les deux labyrinthes. Il est formé sur le même type que celui de la majeure partie des poissons osseux. Situé dans l'épaisseur des parois du crâne, entre la cinquième et la huitième paire de nerfs, il communique par deux points avec celui du côté opposé. Cette communication, qui est purement d'adhérence, s'observe d'un côté au *sac* et de l'autre aux canaux demi-circulaires. En le décrivant, nous parlerons suc-

[1] *Dissertation sur l'organe de l'ouïe de l'homme, des reptiles et des poissons;* Amsterdam, 1778.

[2] Andreæ Comparetti, etc., *Observationes anatomicæ de aure interna comparata;* Patavii, 1789. Observat. 66, pag. 248, pl. III, fig. XIII.

cessivement du *sac*, des canaux demi-circulaires et des nerfs qui se rendent à ces parties.

I. Le *saccule* ou *sac*[1] est situé dans une grande cellule qui se trouve au-dessus de la cavité du crâne; il a presque deux pouces de longueur et un pouce de hauteur. Sa forme est ovalaire, légèrement comprimée latéralement; à son extrémité postérieure il est muni d'un appendice (*cysticule*)[2], et à son bord supérieur il est uni à l'appareil des canaux demi-circulaires par l'intermédiaire du *sinus médian*. Ses parois sont formées d'une lame cartilagineuse mince, transparente, élastique, et qui ne s'affaisse point lorsqu'on fait écouler le liquide qu'elle renferme; par la moitié postérieure de sa face interne, le *sac* adhère intimement à celui du côté opposé; de sorte qu'on ne peut les séparer l'un de l'autre qu'à l'aide du scalpel. De tout le pourtour des *sacs* il se détache une membrane qui tapisse la cavité dans laquelle ces organes sont logés, et qui les tient fixés à leur place. L'intérieur de chaque *sac* est rempli d'un liquide gélatineux, dans lequel nage un très-grand *otolithe* (fig. 2., pl. XVI). Cet *otolithe* a plus d'un pouce de longueur sur sept à huit lignes de largeur; il est aplati, légèrement bosselé à ses deux surfaces, dont l'externe est un peu concave et l'interne un peu convexe. Ses bords sont assez unis et ne présentent point de saillies en forme d'épines.

A la partie postérieure de la cavité du *sac* est un petit orifice qui mène dans la cavité de l'*appendice;* celui-ci, également aplati, a les parois formées du même tissu que le *sac;* il contient une humeur gélatineuse dans laquelle nage un second *lapillus* ou *otolithe* (fig. 3, *a*, pl. XVI), qui est mince, aplati, très-fragile et garni de saillies en forme d'épines.

II. L'appareil du *sinus médian* et des *tubes demi-circulaires* est superposé au sac et se compose des trois tubes et de ce *sinus médian*.

[1] Fig. 1re, *ff*. Pl. XVI.
[2] Fig. 1re, *g*. Pl. XVI.

Des trois tubes demi-circulaires l'un est antérieur (pl. XVI, fig. 1re, *h*), l'autre postérieur (*i*) et le troisième externe (*k*, *k*); chacun est muni d'une ampoule à l'une de ses extrémités. Les ampoules du tube antérieur et du tube externe se trouvent en avant; celle du tube postérieur se trouve en arrière. Les conduits osseux destinés à les loger sont beaucoup plus larges que ne l'exige leur épaisseur, et par ces conduits ils sont enchaînés au crâne, dont on ne peut les isoler qu'en détruisant toute la substance osseuse qui est interposée.

Le *sinus médian* ou *utriculeux* est formé d'une portion horizontale; c'est en *m* (fig. 1, pl. XVI) que ces deux portions se réunissent. La portion verticale est unie en *l* (fig. 1, pl. XVI) à celle du corps opposé; cette union est simplement d'adhérence. La portion horizontale se continue postérieurement avec l'ampoule postérieure, et reçoit l'extrémité non renflée du tube externe; antérieurement elle se continue avec les deux ampoules antérieures, sous lesquelles se trouve un troisième *lapillus*, le plus petit, qui n'a qu'une ligne et demie de longueur et une demi-ligne de largeur (voy. fig. 1re, *m*, et fig. 3, *b*, pl. XVI).

Le tissu des parois des tubes demi-circulaires est de même nature que celui du *sac*, seulement plus mince. Celui du sinus médian est susceptible de s'affaisser, mais non celui des tubes eux-mêmes.

III. Il y a deux *nerfs auditifs*, un antérieur et un postérieur; tous deux partent des côtés de la moelle allongée. Le *nerf auditif antérieur* se partage aussitôt en deux faisceaux, dont le supérieur (*n*, fig. 1re, pl. XVI) donne deux filets ampullaires aux ampoules antérieures, un filet qui s'épanouit autour du *lapillus m'*, et un troisième cordon qui va à la partie antérieure du *sac*. Le faisceau inférieur *o* va sur le côté interne du *sac*.

Le *nerf auditif postérieur* donne un filet *q* à l'ampoule postérieure, et un filet *p*, qui va à l'appendice du *sac* ou *cysticule*.

En décrivant le labyrinthe membraneux de l'*esox lucius* nous avons dit que dans le *perca labrax* il existait un appendice analogue à celui de l'oreille du brochet: cet appendice est bien plus

remarquable dans le *bar* que dans le *brochet;* et il pourrait être plus naturellement comparé au limaçon des autres animaux vertébrés, car il ne correspond pas, comme celui du *brochet,* au trou occipital; il est situé au-dessous de cette ouverture dont il est séparé par une lame osseuse, ne tient au *sac* que par un pédicule, mais sa cavité communique librement avec celle du sac; il reçoit une branche du nerf qui lui est propre, et qui appartient au tronc nerveux qui se répand sur les autres parties du labyrinthe membraneux; enfin la cavité de cet appendice contient de l'*endolymphe* et un *otolithe*. Il possède donc presque tous les caractères qui appartiennent au limaçon des oiseaux et de quelques reptiles; mais sa situation à la partie postérieure du labyrinthe ne permet pas d'admettre cette analogie, et nous alléguons contre elle les raisons que nous avons déjà fournies contre l'appendice du labyrinthe de l'*esox lucius*. Si avant nous l'oreille du *perca labrax* eût été décrite, nous ne doutons pas qu'on eût cherché à établir cette analogie entre cet appendice et une cochlée. Nous laissons à nos lecteurs de juger la valeur de nos arguments [1].

CHAPITRE XIII.

ORGANE AUDITIF DU TRIGLE OU GRONDIN (*Trigla gurnardus*, Bl.). (Pl. VIII, fig. 1.)

Comme l'organisation externe des trigles offre quelques particularités qui font que ce groupe de poissons est facile à reconnaître, nous avons cru que l'organe auditif déviait peut-être un peu du type commun quant à sa conformation. Cependant nous n'y avons rien reconnu qui puisse mériter de fixer particulièrement l'attention de l'anatomiste; une seule disposition doit être mentionnée, c'est celle des tubes demi-circulaires antérieur et

[1] Voyez ce que nous avons dit de l'appendice postérieur de l'oreille du brochet, chapitre XIX du présent mémoire.

postérieur. En effet, ces deux canaux ne sont point placés sur un seul point vertical, mais sur deux plans obliques qui se rencontrent presque à angle droit dans le *sinus médian;* à partir de ce *sinus* chacun des deux plans est incliné en dehors.

Le *vestibule membraneux* est formé de deux poches, dont l'une antérieure, *sacculus,* plus grande (*e*), constitue le vestibule proprement dit, et l'autre postérieure (*f*) n'est qu'une espèce d'appendice. Les cavités de ces deux poches communiquent ensemble. La grande poche renferme un *otolithe* solide, qui la remplit en majeure partie; la petite poche ne contient que quelques petites concrétions fragiles. Ces deux poches vestibulaires sont situées dans une cavité de la base du crâne, au-dessous du niveau de la masse encéphalique. (Pl. VIII, fig. 1.)

La *grande poche* se continue supérieurement avec l'appareil des tubes demi-circulaires, appareil formé par le *sinus médian* et les tubes proprement dits. Le *sinus médian,* immédiatement après avoir quitté le vestibule ou *saccule*, se prolonge en avant et en arrière. Antérieurement, il donne attache aux ampoules des tubes demi-circulaires antérieur et externe; postérieurement, il donne attache à l'ampoule du tube postérieur, et reçoit l'extrémité non ampoulée du tube externe. En outre, le *sinus médian* envoie un prolongement (*g*) en haut, *tube commun* pour recevoir les extrémités non renflées des tubes antérieur et externe

Les trois *tubes membraneux demi-circulaires* sont figurés en *h* (tube antérieur), en *i* (tube externe), et en *k* (tube postérieur).

Le *nerf acoustique,* qui se détache de la partie latérale de la moelle allongée, se divise aussitôt en une branche antérieure et une postérieure.

La branche antérieure (*l*) fournit d'abord la portion dure de la septième paire, puis des filets aux deux ampoules antérieures, à l'extrémité antérieure du *sinus médian,* et à la grande poche vestibulaire. (Pl. VIII, fig. 1.)

La branche postérieure *f* fournit un filet à l'ampoule postérieure *m* (pl. VIII, fig. 1), et un autre à la petite poche vestibulaire.

CHAPITRE XIV.

ORGANE AUDITIF DE LA GRANDE ROUSSETTE (*Squalus canicula*, L.). (Voy. pl. VIII, fig. 2.)

Cette oreille ne présente rien de très-remarquable; elle ressemble à celle des autres squales dont nous avons déjà donné la description et les figures. Point de communication libre avec l'extérieur, si ce n'est la fenêtre fermée par une expansion fibreuse et couverte par la peau. Elle est séparée entièrement de la cavité crânienne par une cloison cartilagineuse. Le *sac*, presque confondu avec le *sinus médian*, renferme une matière blanche, amylacée; il y en a également un petit noyau dans le *sinus médian*.

L'oreille en général est de grandeur moyenne. Les parois des tubes semi-circulaires nous ont paru un peu moins grandes, relativement aux canaux membraneux, que dans les raies. Le nerf acoustique se divise de même que chez ces derniers poissons; à son origine il marche à côté du nerf optique, en sorte qu'on le dirait confondu avec ce dernier.

Cette disposition si simple de l'oreille de la grande roussette et de quelques autres squales, semble établir une différence marquée entre les squales et les raies, et cependant on les place assez près les uns des autres dans nos tableaux zoologiques. Le canal ascendant de l'oreille des raies, des pastenagues, des torpilles, des chimères, établit, d'après cette seule pièce de l'oreille, une différence qui amènera certainement à la découverte de quelques autres, qui finiront par établir une séparation bien plus marquée qu'on ne l'a fait jusqu'ici entre tous ces chondroptérigiens[1].

[1] Depuis l'époque déjà éloignée où nous écrivions cette description de l'organe auditif de la grande roussette, nous avons examiné l'oreille d'un grand nombre de squales sur les-

Enfin une différence, appartenant aussi à la structure de l'organe auditif, se fait remarquer dans le mode de communication ou d'isolement de la cavité du crâne et de la cavité du labyrinthe. Nous nous bornons ici à rappeler ces caractères, sur lesquels nous nous sommes déjà arrêtés ailleurs.

CHAPITRE XV.

ORGANE AUDITIF DU *PTÉROÏS*. (*Pteroïs volitans*. — *Scorpæna volitans?*) (Voy. pl. VIII, fig. 3.)

Nous ne pourrons pas donner du ptéroïs une description aussi détaillée et aussi exacte que nous l'aurions désiré d'un poisson si intéressant. Les nerfs et quelques autres parties molles étaient trop ramollis et trop altérés pour permettre une dissection minutieuse, cependant nous nous sommes efforcés de représenter avec exactitude les formes générales[1].

L'oreille est de grandeur moyenne, sans communication à l'extérieur; mais derrière le sac se trouve une cavité (pl. VIII, fig. 3, *i*),

quels nous avons découvert et constamment reconnu l'existence d'ouvertures de communication entre le sinus médian et l'extérieur. M. Buchanan (*a*) a fait une observation semblable, et l'on voit ces ouvertures repr*s*éentées sur une planche appartenant à la description du muséum du collége des chirurgiens de Londres (*b*). Nous n'avons pas voulu modifier notre première rédaction, nous réservant de donner plus tard l'histoire de l'organe auditif des squales.

(*a*) M. Buchanan nomme le canal qui conduit à ce méat *the auditory tube*, et il le considère comme correspondant au *sinus auditorius externus* de Wéber. — Voyez : *meatus auditorius externus of the* SQUALUS CANUS. (Philosophical illustrations of *the organ* of hearing, p. 106. London, 1828.)

(*b*) *Descriptive and illustrated catalogue of the physiological series and comparative anatomy contained in the museum of the royal college of surgeons in London.* Vol. III. = p. 1. p. 189. Pl. 33. C'est sur le *monk-fish*, *squalina angelus*, Dum., que l'examen de ce *meatus auditorius externus* a été fait.

[1] Ce poisson nous a été donné par M. Lamare Picquot, qui l'avait rapporté de son voyage aux Indes orientales.

dans laquelle on aperçoit l'orifice d'un canal qui donnait probablement passage à un conduit membraneux pour faire communiquer le labyrinthe membraneux avec la vessie natatoire; mais c'est ce que nous ne pouvons affirmer, parce que les parties molles de ce canal étaient trop altérées pour permettre d'en apprécier rigoureusement la disposition.

Le *sinus médian* est petit. Nous avons trouvé un *lapillus* que nous avons fait représenter, lequel est extrêmement mince et creusé en forme de cuiller; sa face concave regarde en dehors.

Au point de jonction des deux tubes membraneux antérieur et postérieur, on remarque un petit ligament qui s'attache aux parois du crâne et qui soutient le canal commun.

En différents endroits les parois du crâne sont si minces qu'on voit le jour à travers. (Voy. pl. VIII, fig. 3).

CHAPITRE XVI.

ORGANE AUDITIF DES RAIES. (Voy. les pl. IX, X, XI, XII.)

L'oreille des raies se distingue de suite, par un caractère très-frappant, de celle de tous les poissons osseux : c'est que cet organe ne communique aucunement avec la cavité du crâne, dont il est séparé par une paroi épaisse et cartilagineuse. Dans les poissons osseux, au contraire, la cavité crânienne ne fait qu'un avec la cavité du labyrinthe, et le liquide qui entoure le cerveau est le même que celui qui baigne le labyrinthe membraneux. Ce caractère rapproche donc les raies des animaux supérieurs, quoique, dans la plupart des systèmes ichthyologiques actuels, on les ait placées à la fin. Linné, qui a montré du génie jusque dans ses erreurs, avait placé les raies parmi les reptiles, et en effet les poissons cartilagineux forment le passage des batraciens aux poissons osseux. Or, puisque la cavité auditive est séparée du crâne dans les raies, il s'ensuit que ces animaux ont une humeur de

Cotugno proprement dite, tandis que dans les oissons osseux le liquide en question et le liquide encéphalique sont confondus.

Si quelques doutes pouvaient s'élever sur l'existence de deux liquides bien distincts dans l'oreille (la périlymphe et l'endolymphe), nous citerions le labyrinthe des raies pour démontrer incontestablement la présence de ces deux humeurs. L'organe de l'ouïe dans les raies offre plusieurs particularités bien dignes de remarque : 1° son isolement; 2° sa séparation de la cavité crânienne; 3° l'existence de canaux demi-circulaires cartilagineux, qu'on peut isoler du reste de la substance cartilagineuse, comme l'on sépare les canaux semi-circulaires osseux au milieu de la substance celluleuse des os du crâne dans les mammifères et surtout dans les oiseaux; 4° l'existence d'un espace très-grand entre la paroi interne de ces canaux semi-circulaires cartilagineux et les tubes membraneux; 5° un liquide distinct de celui que contient le labyrinthe membraneux, et de celui qui baigne l'encéphale : ce liquide, que nous avons nommé la *périlymphe*, est contenu entre les parois cartilagineuses et le labyrinthe membraneux; 6° un canal conique, s'élevant de la partie supérieure du vestibule membraneux et particulièrement du *sinus médian*, va s'ouvrir au dehors sans qu'il soit fermé par aucune membrane en forme de diaphragme, ou par aucune valvule : nous avons reconnu l'existence de ce canal dans les raies, les chimères et les squales; il paraît être étranger aux chondroptérigiens à branchies libres; 7° une fente ovalaire fermée par une membrane et recouverte par la peau : sous ce dernier rapport, l'oreille des raies ressemble encore à celle des squales, etc.

L'oreille des raies est située sur les côtés de la cavité du crâne, en arrière des yeux, entre la cinquième et la huitième paire de nerfs, dans une cavité propre qui, comme nous l'avons déjà dit, n'a aucune communication libre avec l'intérieur du crâne. Cette cavité auditive a deux sortes de communications avec l'extérieur : 1° elle présente ce que, dans l'anatomie de l'oreille, on appelle une *fenêtre;* 2° une communication se voit entre la cavité

du labyrinthe membraneux et l'extérieur. La première, fermée par une membrane, est en rapport, par sa face interne, avec la cavité du labyrinthe cartilagineux, contenant la *périlymphe*. La seconde, plus remarquable encore et plus insolite, établit une voie libre entre le *sinus médian* et le milieu dans lequel vit l'animal. Abstraction faite de l'ouverture fermée par une membrane, nous pourrions nous servir d'une comparaison qui donnerait une idée approximative de ce que nous voulons exprimer; la cavité auditive est comme la cavité des plèvres, et la cavité du labyrinthe membraneux, comme celle des poumons; la cavité des plèvres, qui contient, ne communique pas avec le dehors, mais la cavité du poumon, qui est contenue, communique avec l'extérieur. Nous parlerons plus bas de la communication qu'a le labyrinthe membraneux avec le dehors, et de la fenêtre fermée par une toile membraneuse.

Pour décrire d'une manière méthodique l'organe auditif, nous y distinguerons plusieurs appareils, savoir : 1° celui du *sinus médian* et du *sac*, peu distincts l'un de l'autre; 2° celui des *tubes semi-circulaires;* 3° celui du *tube ascendant.* (Voy. pl. X, fig. 2.)

I. Le *sac* à pierre constitue une poche membraneuse assez vaste, pourvue de deux *appendices,* dont l'un antérieur est l'*utricule,* et l'autre, postérieur, constitue le *cysticule.* Le sac et les deux appendices renferment chacun un amas de poudre calcaire (voyez pl. X, fig. 1re, *l, l, m, n*). Le sac a sa plus grande étendue d'arrière en avant; il est comprimé latéralement, de sorte qu'il est beaucoup plus long qu'il n'est large. Plusieurs brides fibro-celluleuses le fixent aux parois de la cavité auditive; ses parois sont transparentes et facilement déchirables, ainsi que celles de tout le labyrinthe membraneux; en avant, il communique avec l'appendice antérieur, ou *utricule m,* qui est rond, un peu comprimé, et qui donne attache aux deux ampoules antérieures *o* et *p*. En arrière, il communique avec le petit appendice *n* ou *cysticule,* qui ressemble à un petit tubercule arrondi; ainsi la cavité des deux

appendices communique avec celle du *sinus médian* ou cavité principale. Celle-ci, enfin, se prolonge supérieurement en un canal étroit (*u*, figure 1re, pl. X), qui s'ouvre au dehors de la partie supérieure de la tête : c'est le *tube* ou *canal ascendant;* mais, avant de s'ouvrir, ce canal éprouve, sous la peau de la tête, un élargissement (*f*, pl. IX; pl. X, fig. 2), et fait un tour de spirale déjà indiqué par Geoffroy, décrit par Monro et représenté fort bien par E. Weber. L'orifice extérieur est très-petit (*d, e*, pl. IX), et est rapproché de la ligne médiane de la région occipitale. Ce canal, qui fait communiquer le *sac* avec le dehors, a été pris pour l'analogue d'une *fenêtre*, ou pour le *conduit auditif externe*, par lequel passeraient les vibrations sonores. Nous l'avions d'abord considéré comme l'*aqueduc du vestibule*.

Le *sinus médian* et le *sac auditif*, ainsi que leurs *appendices*, sont remplis d'une humeur gélatineuse, claire comme du cristal (*endolymphe*), au fond de laquelle se trouvent les amas de poudre calcaire. Nous avons tâché de donner une idée de la forme et du volume de ces amas, dans la pl. X, par la figure 3. Le plus grand amas (*b*) est contenu au fond du sac; le plus petit (*c*) se trouve dans le petit appendice (*n*); le moyen pour le volume se trouve dans l'appendice (*m*). M. Barruel, qui a bien voulu se charger d'une analyse de ces masses de poudre calcaire, y a trouvé sur cent parties :

Matière animale analogue au *mucus*....	25, 00
Carbonate de chaux.....	75, 00
	100, 00

Il n'a pu y découvrir ni phosphate de chaux, ni carbonate de magnésie : cette matière est blanche, pulvérulente, douce au toucher. Des faisceaux de nerfs viennent se terminer à chacun des endroits où se trouvent les amas de poudre calcaire.

II. Dans l'*appareil des tubes semi-circulaires*, nous observons les trois canaux disposés à peu près de la même manière que

dans les poissons osseux, mais distincts néanmoins par plusieurs particularités.

Le *tube antérieur* (*o, s, s,* fig. 1re, pl. X) a son ampoule (*o*) immédiatement attachée à l'appendice (*m*); il est enchaîné par une substance cartilagineuse; il se contourne sur la partie antérieure du sac, en s'appliquant contre le tube ascendant (*u*), et vient se terminer vers l'appendice (*m*), dans lequel il s'ouvre : on voit par conséquent que le tube semi-circulaire antérieur fait presque un cercle entier; disposition qui n'avait pas échappé à la sagacité de P. Camper.

Le *tube externe* (*p, t, t,* pl. Ire, fig. 10) a son ampoule pédiculée : le pédicule s'implante également dans l'appendice (*m*); le canal lui-même contourne ensuite une colonne cartilagineuse qui l'enchaîne, revient se jeter sur le bord supérieur du *sinus médian*, et se termine en s'ouvrant dans ce dernier, près du commencement du tube ascendant (*u*); ce tube fait donc aussi, comme on voit, plus d'un demi-cercle.

Enfin, le *tube postérieur* est le plus remarquable de tous, en ce qu'il forme un cercle complet (*q, r, r, r,* fig. 1re, pl. X); l'ampoule *q*, située vers l'extrémité postérieure et inférieure de la cavité auditive, se continue dans le tube (*r, r, r*), lequel passe derrière une petite colonne de matière cartilagineuse qui l'enchaîne. Arrivé vers le haut de la cavité auditive, il se replie à côté du tube ascendant (*u*), et redescend, sous forme d'un tuyau aplati, au devant du *sinus médian*, pour regagner l'ampoule. Ici le cercle est complet et l'ampoule n'est qu'une dilatation placée sur un des points de la circonférence de ce cercle. Souvent toute communication est interdite entre le sac et la portion du tube qui descend au devant de ce sac, d'où il suit que le canal postérieur formerait alors un appareil isolé.

Les figures 1 et 2, pl. X, rendent avec une grande vérité toute cette disposition si compliquée et si curieuse de l'oreille de la raie.

Le *nerf auditif* n'est ici qu'un faisceau du nerf de la cinquième

paire (*i*, fig. 1re, pl. X). Le faisceau auditif se distribue de la manière suivante :

1° Chacune des trois ampoules reçoit un filet particulier; ces trois filets sont figurés en x, z et χ.

2° Chacun des endroits où est déposé de la poudre calcaire reçoit des nerfs, savoir : le faisceau y pour l'appendice antérieur du sac ou l'*utricule*, le faisceau τ pour le sac lui-même, et le faisceau ψ pour l'appendice postérieur du sac ou *cysticule*.

3° Un filet tout particulier à la raie (φ) gagne la partie supérieure du *sac* et s'y épanouit : cette disposition est remarquable en ce que nous n'avons rencontré rien de semblable dans aucune autre espèce de poisson.

4° Enfin, le filet ω, qui perce la paroi du crâne pour se distribuer au dehors avec les nerfs de la cinquième paire : ce filet, assez constant dans les poissons, pour ses rapports, nous semble représenter la portion dure de la septième paire, chez l'homme et les autres mammifères.

Ici se bornaient nos recherches sur l'organe auditif des raies, lorsque nous présentâmes à l'académie des sciences un premier mémoire sur l'oreille des poissons; mais, ayant eu, peu de temps après cette lecture à l'académie, l'occasion de disséquer un poisson (la chimère antarctique, *chimæra callorynchus*) que les ichtyologistes rangent, dans leurs classifications, immédiatement après les raies, nos observations sur l'organe de l'ouïe sont venues confirmer la justesse de cette détermination zoologique, en nous montrant la plus grande ressemblance entre l'oreille de ces deux genres de chondroptérigiens. Dans cette circonstance, nous crûmes devoir examiner de nouveau, dans toutes ses parties, la structure du labyrinthe de plusieurs espèces de raies et de squales, et nous consultâmes en même temps les écrits des zootomistes qui nous ont précédé. Ce n'est pas sans étonnement que nous avons vu que, sur ce point comme sur tant d'autres d'une science positive,

on n'était pas d'accord, et dès lors nous avons repris notre travail pour dissiper les incertitudes; nous croyons devoir placer ici l'indication des principaux résultats de nos dernières dissections de l'organe auditif des raies et des chimères; plus tard, nous décrirons d'une manière complète l'oreille de plusieurs squales.

C'est principalement sur les ouvertures de communication médiate ou immédiate avec l'extérieur qu'il y a le plus d'opposition parmi les anatomistes.

La description de l'oreille de la raie, donnée par Geoffroy [1], n'a point assez de précision et de clarté pour croire qu'il ait connu le *canal ascendant* communiquant à l'extérieur; cependant, d'après ce qu'il dit des ouvertures placées à la paroi supérieure, on doit présumer qu'il a seulement indiqué les ouvertures vestibulaires [2].

Il n'en est pas de Monro comme de Geoffroy; ses indications sont précises et ses figures exactes [3]. Le *canal* ou *tube ascendant*, partant du *sinus médian* et s'ouvrant au dehors, après avoir traversé la peau, est clairement décrit et représenté : il indique jusqu'à son renflement et son inflexion sous-cutanée, et nous ne comprenons pas comment des hommes d'un mérite aussi élevé que P. Camper, Vicq-d'Azyr et Scarpa, etc., ne se sont pas rendus à l'évidence.

[1] *Dissertations sur l'organe de l'ouïe de l'homme, des reptiles et des poissons, etc.* Amsterdam, 1778.

[2] « Outre ces trois canaux et les deux ouvertures qui pénètrent jusqu'au cerveau, on « remarque encore dans le labyrinthe de la raie deux autres trous : l'un postérieur est plus « grand, l'autre antérieur est plus petit; tous deux sont formés par des ligaments et recou- « verts par la peau de l'animal. »

[3] *The Structure and Physiology of fishes explained and compared with these of man ond other animals;* Edinburgh, 1785.

« In the back part of the occiput, near the joining of the head with the spine, two « holes, not larger than to admit the head of small pin, are found at the distance of an inch « each other in a large fish. Each of these leads into a capacious winding canal or concha, « whichdescribes nearly a complete circle. The two concha are separated from each other by « thin partition. Each auditorius externus is continued. The meatus is lodged in the hollow « lost betwen two thick cartilages; and as there is no membrana tympani, it opens into a « large sac, which contains a white or opake matter, with a quantity of clear watery looking, « but viscid matter, etc. » (Page 48.)

P. Camper dit affirmativement que l'organe de l'ouïe de la raie n'a aucune communication avec l'air atmosphérique qui est renfermé dans sa caisse, qui est la cloison[1]; il blâme Geoffroy d'attribuer une ouverture extérieure à l'oreille[2].

Jean Hunter fait remonter ses propres recherches, sur la structure de l'organe de l'ouïe des poissons, avant l'année 1760; il revendique en sa faveur l'honneur d'avoir découvert le canal de communication entre le vestibule membraneux et le dehors, dans le genre raie, et affirme avoir vu cette disposition avant que Geoffroy en eût parlé. La phrase par laquelle il indique l'organisation de l'oreille de la raie ne laisse pas dans l'esprit l'incertitude et l'obscurité que nous avons reprochées au travail de Geoffroy. Cependant l'ouvrage de J. Hunter[3], dédié à Joseph Bank, n'a été publié qu'en 1786, et postérieurement à celui de Monro.

Vicq-d'Azyr[4] n'a donné qu'un aperçu rapide sur l'anatomie des poissons : dans deux endroits différents de ses ouvrages, il parle de l'organe de l'ouïe de ces animaux[5]; il cite Geoffroy, dont il connaissait le mémoire sur l'organe de l'audition de la raie, et déclare avoir inutilement cherché une ouverture extérieure dans l'oreille de ce poisson : à cet égard, il adopte l'opinion de

[1] *Mémoire sur l'organe de l'ouïe des poissons*, par Petrus Camper.
Mémoires de mathématique et de physique présentés à l'académie royale des sciences par divers savants; tome VI, 1774.

[2] Page 194.

[3] « In some fishes the external communication, or meatus, enters at the union of the two « perpendicular canals; which is the case with all the ray kind, the external orifice being « small, and placed on the upper flat surface of the head; but it is not every genus or « species of fishes that have the external opening. » *An account of the organ of Hearing in fishes.* — *Observations on certain parts of the animal œconomy;* 2e édition; Londres, 1792, p. 84.

[4] *Mémoires sur les poissons*; 1er mémoire, page 165, tome V; édition de Moreau de la Sarthe.

[5] *Mémoire de la structure sur l'organe de l'ouïe des Oiseaux, comparée avec celle de l'organe de l'ouïe dans l'Homme, les Quadrupèdes, les Reptiles et les Poissons*, œuvres de Vicq-d'Azyr, tome IV, page 338. — *Mémoire sur les Poissons*, tome V, page 179.

P. Camper, et donne l'analyse du mémoire de l'illustre savant hollandais dans une note jointe à son propre travail.

Comparetti[1] a reconnu, à n'en pas douter, les ouvertures fermées par une membrane fibreuse, qui sont situées sur le crâne, vers la région occipitale, et qu'on nomme communément *fenêtre ovale;* il a vu ces ouvertures sur la roussette, l'ange et d'autres squales, ainsi que sur les raies; mais il ne paraît pas avoir reconnu le canal établissant une ligne de communication entre le *sinus médian* et l'extérieur[2]; cependant une phrase semblerait indiquer qu'il a connu ce canal, s'il ne l'attribuait pas au passage d'un cordon nerveux, dans le *squalus squatina.* Il indique clairement l'existence de la fenêtre ovale dans le *squalus catulus* et dans le *squalus catulina,* où nous l'avons aussi observée et décrite[3]. Les figures données par Comparetti sont très-imparfaites, et ne donnent aucun indice de l'existence du tube ascendant[4].

L'ouvrage de Scarpa parut dans la même année que celui de Comparetti, et, si le professeur de Pavie s'exprime d'une manière plus claire et plus précise que Comparetti, il n'a pas été plus heureux que lui pour découvrir la vérité : on ne sait ce qui doit étonner le plus dans ce célèbre anatomiste, ou de l'erreur qu'il a commise, lui dont tous les travaux démontrent la plus rare sagacité, ou de la manière dont il traite Monro, sur ce qu'il dit de l'existence, dans les raies, d'un conduit établissant une communication entre le labyrinthe et l'extérieur[5]. Scarpa, contre l'opinion

[1] *Andreæ Comparetti observ. anatomicæ, de aure interna comparata.* Patavii, 1789.

[2] « Cute cranii posteriore recisa, in parte media et superiore capitis rajæ, et squali « occurrit substantia mollis, mucosa, contenta in fovea, qua retecta se præbent *duo fora-* « *minula majora,* quæ *molli membrana occlusa sunt et duo alia minora* magis externa, et « anteriora, etc. » (Observ. LXV, page 226.)

[3] « Minus profonda et magis ampla est fovea superior, quæ impletur humore mucoso, « sub cute cranii latente in catulina et catulo, ubi, muco detracto, hinc illinc apparet « *foramen ovale,* membranula firma occlusum; qua discissa aditus paratur ad foveam ante- « riorem canalis posterioris. » (Page 231.)

[4] Tabul. III, fig. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

[5] « Quamvis Geoffroeius olim monuerit *raiam,* cum pluribus de causis, tum ob organi « auditus structuram, cum reptilibus animalibus convenire; et Joh. Hunterus *ostii* cujusdam

de Geoffroy, de Jean Hunter et de Monro, refuse à l'oreille des poissons cartilagineux toute communication avec l'extérieur. Il admet seulement l'existence d'une ouverture sous-cutanée, fermée par un couvercle membraneux, et il la nomme *fenêtre ovale.*

Le canal ouvert au dehors, et dont l'autre extrémité communique avec le labyrinthe membraneux, quoique bien décrit par Monro, n'est pas admis par Scarpa, qui accuse de folie l'anatomiste écossais [1], et pense qu'on a pris des conduits muqueux pour des conduits auditifs, car autrement, suivant lui, il faudrait admettre que l'air et l'eau peuvent pénétrer dans la cavité de l'oreille jusqu'au siége immédiat de l'audition, sur la pulpe nerveuse, ce qui est aussi absurde que contraire à la vérité [2].

Si Scarpa nie formellement l'existence d'un canal ouvert à l'extérieur, il admet celle d'une *fenêtre ovale,* et il la décrit avec précision [3]; cependant nous trouvons peu de clarté dans la division qu'il fait du vestibule en trois sacs [4].

Il faut que Pohl [5] n'ait guère disséqué que des sturioniens et

« auditus *externi* in cartilagineis piscibus mentionem fecerit; et Monrous *externum* hoc au-
« ditus *ostium* descripserit fusius atque delineaverit, veniam nihilominus nos impetraturos
« fore speramus, si pronunciare veritas cogit Geoffrocium sententiam suam, non sat firmis
« argumentis ex anatome desumptis comprobasse; Hunterum autem, atque Monroum
« vehementer super hac re sibi *HALLUCINATOS* fuisse. Etenim nullum prorsus adest *ostium*
« auditus *extus adapertum* in *cartilagineis piscibus*, ejusque loco, sub aspero horum
« animantium tegumento, *fenestra ovalis* reperiunda est *membranaceo operculo*, a nemine
« huc usque memorato, obducta quæ *fenestra* in cartilagineis piscibus communicationis
« rationem inter sonantia corpora, et immediatam auditus sedem constituit longe ab ea
« diversam, quam, qui in horum animalium sectione minime versati sunt, ex Hunteri et
« Monroi descriptione mente concipere aliquando possent. » (Præfatio, pag. 1 et 2.)

[1] *Monrous* in opere cui titulus *Physiology of fishes,* sect. III, § IV, tom. VII, fig. 1 et 2, docet in *raja* prope juncturam capitis cum spina adesse foramina duo exigua, quæ ad aures ducunt. Qua in re vehementer sibi *hallucinatus est,* ostia nimirum ductuum mucosorum, ut manifestum est, pro auris meatubus accipiens. Etenim omnino nullum est in cartilagineis piscibus ostium auditus extus adapertum, membranaque *fenestræ ovalis* sub communi tegumento recondita jacet, et cooperta. (*Anat. disquis. : De auditu et olfactu,* pag. 9.)

[2] Page 9, note *d.*

[3] § V; — § VI, page 9.

[4] § VIII.

[5] *Expositio generalis anatomica organi auditus per classes animalium,* etc. auct. Christ. Eduardo Pohl; Vindobonæ, 1818.

des poissons osseux, pour dire d'une manière générale que, dans les poissons, les cavités de l'oreille et de l'encéphale communiquent librement entre elles, et forment, en quelque sorte, un réservoir commun [1].

Il indique l'existence des deux ouvertures fermées par une membrane qui, dans les chondroptérigiens, représentent la *fenêtre ovale*, mais il ne nomme aucun poisson en particulier, et il se tait sur le *canal ascendant* dont nous étudions maintenant la disposition dans les raies [2].

En indiquant les deux ouvertures que le *cobitis fossilis* présente sur la région occipitale, il les considère comme analogues à la *fenêtre ovale* [3]; mais depuis lui Weber a démontré qu'elles donnent passage au *sinus impar*, par lequel le labyrinthe et la vessie aérienne communiquent ensemble.

Dans quelques chondroptérigiens, le labyrinthe, suivant Carus [4], n'est pas libre, mais renfermé dans l'épaisseur des parois des os du crâne, et le labyrinthe cartilagineux est beaucoup plus vaste que le labyrinthe membraneux. Il existe encore chez ces poissons, outre les trois amas de matière amylacée, les trois canaux et les poches du vestibule, un moyen de communication entre l'intérieur de l'oreille et le milieu, qui transmet les sons; c'est un canal en cul-de-sac, sortant de la paroi interne du labyrinthe, se portant en haut et en dedans vers la face postérieure et supérieure du crâne, où son extrémité est fermée par une membrane. Cette membrane,

1 « Communicatio tamen libera inter ea persistit, cum interna cavi pars aperta, nullo « pariete cartilaginoso a cranio separatur. » (P. 7 — § IV.)

« In omnibus piscibus cavum auditus cum eo encephali libere communicat, sed in osseis « stricto in sensu unam eandemque cavitatem constituit. » (§ III, page 5.)

2 « Chondropterygii præter jam notatas differentias secundum ill. Scarpa adhuc alias « memoratu dignas ostendunt. Ad occiput nempe sub integumentis communibus duo « apparent foramina, membrana tensa obturata, quæ directe cum vestibulo communicant, « et quæ in branchiostegis desunt. » (Pag. 8.)

« Miratus sum, has aperturas in *cobiti fossili*, pisce osseo, invenire, penitus cum iis « convenientes, dum omnia alia cum apparatu osseorum concordant, ita ut hac ratione « transitum reperire credas ab osseis ad cartilagineos. » (Pag. 8.)

4 *Lehrbuch der zootomie, etc. Von Carl. Gust. Carus;* Leipsig, 1818. Pag. 225, § 361.

qu'on peut comparer à celle de la *fenêtre ovale* dans l'oreille humaine, se trouve encore revêtue, en dehors, par la peau. Cette disposition se rencontre surtout dans la raie et le requin, mais elle ne paraît pas exister dans le pétromyzon.

Ce seul passage du livre de l'un des plus habiles et des plus savants anatomistes de l'Allemagne, prouve que les idées qu'il avait sur l'oreille des poissons cartilagineux étaient tout à fait inexactes. M. Carus n'indique dans cette description que la *fenêtre ovale*, et il ne fait aucune mention du canal dont l'orifice supérieur s'ouvre au dehors [1].

En 1815, lorsque nous commençâmes nos recherches sur la structure de l'oreille dans les animaux vertébrés, nous étudiâmes cet organe dans les poissons, nous constatâmes l'existence du *canal ascendant* chez la raie; mais, connaissant les travaux de Geoffroy et de Monro, nous insistâmes peu sur l'histoire de cette disposition; plus tard, reprenant nos travaux, nous étudiâmes de nouveau ce conduit, nous le fîmes dessiner. Dans le mémoire accompagné de figures, que nous lûmes à cette époque à l'académie des sciences, ce canal était représenté et décrit. Plus tard nous connûmes l'ouvrage de M. E.-H. Weber [2]; nous vîmes que les recherches de cet habile anatomiste s'accordaient avec les nôtres; qu'il avait soigneusement observé l'oreille des chondroptérigiens, et particulièrement celle des raies. C'est surtout sur la raie bouclée (*raia clavata*), la torpille (*raia torpedo*), la raie aigle (*raia aquila*), la pastenague (*raia myraletus*), que ses recherches ont porté. Exactitude et précision dans la description,

[1] Lorsque nous composions ce mémoire, M. le professeur Carus n'avait encore publié que la 1re édition de son ouvrage; mais, dans la 2e édition, ce célèbre anatomiste fait connaître les découvertes de M. Otto, sur le *lepidoloprnus trachyrhincus*, «uber die gehororgane des *lepidoloprus trachyrhincus* und *cœlorrhyncus*, etc. Voyez *Zeitschrift fur physiologie, von F. Tiedemann und Treviranus*, tom. II. p. 86. Darmstadt 1826.» Et celles de Ch. E. H. Weber sur les raies et particulièrement sur la *raia aquila*. Tom. I. p. 450, § 435. *Traité élémentaire d'anatomie comparée, traduit de l'allemand, par A. J. L. Jourdan.* Paris, 1835.

[2] *De aure et auditu hominis et animalium, pars 1a. De aure animalium aquatilium. Auctore Ern. Henr. Webero;* Lipsiæ, 1820.

clarté dans les figures, tout est réuni chez ce savant zootomiste. Non-seulement M. E.-H. Weber décrit dans les raies le *canal ascendant*, qu'il nomme *sinus auditorius*, mais encore il indique le muscle annexé à ce canal et l'existence de la *fenêtre ovale* dans les raies et dans les squales. Nous n'aurions pas poursuivi nos investigations sur ce point du sujet qui nous occupe depuis longtemps, si nous eussions connu plus tôt l'ouvrage de M. E.-H. Weber; cependant nos propres recherches ne seront peut-être pas inutiles, puisque aujourd'hui encore plusieurs anatomistes semblent douter de l'existence de ce conduit, ou ne font aucune mention de cette voie de communication entre le labyrinthe membraneux et l'extérieur; notre travail, indiquant l'existence du *canal ascendant* dans un plus grand nombre de chondroptérigiens, appellera plus vivement l'attention des naturalistes sur ce point; ils vérifieront nos observations, et toute incertitude sera désormais détruite.

M. de Blainville[1] ne donne pas d'indications suffisantes sur la structure de l'oreille des chondroptérigiens; il dit que le vestibule membraneux, rempli d'un fluide aqueux, communique, *jusqu'à un certain point*, avec l'extérieur, au moyen d'un orifice ovalaire percé à la partie supérieure et postérieure du crâne. La peau qui passe dessus cette espèce d'orifice vestibulaire ou de fenêtre ovale n'a cependant éprouvé aucune modification[2]. Ces paroles ne peuvent se rapporter qu'à la *fenêtre ovale* qu'on rencontre sur les squales et les raies, mais elles ne paraissent pas désigner le *canal ascendant*, que nous savons exister dans ces poissons et dans les chimères. En décrivant l'oreille des squales, il dit : « qu'elle *tend* à communiquer avec l'extérieur par un orifice ovale, situé à peu de distance de la ligne médiane de l'occiput. Cet orifice n'est pas fermé par une membrane particulière, mais la peau qui passe dessus adhère fortement dans toute sa sur-

[1] *De l'organisation des animaux*, ou *Principes d'anatomie comparée*, etc., tom. I^er^; Paris, 1822.

[2] Pag. 554 et 555.

face, et ne diffère nullement de ce qu'elle est dans le reste du corps. »

Le savant que nous venons de citer n'a voulu sans doute parler dans ce passage que de la *fenêtre vestibulaire*, et non du *canal ascendant*. Il a commis une inexactitude, en affirmant que cette fenêtre ovale n'est pas fermée par une membrane particulière; enfin il indique, comme propre au *squale milandre*, outre l'ouverture vestibulaire, un canal en tout semblable au *canal ascendant, sinus auditorius externus* de M. E.-H. Weber, existant dans les raies. Ce canal du milandre ne paraît aux yeux de M. de Blainville qu'une disposition comparable au système lacunaire[1].

Quant à l'oreille des raies, M. de Blainville se borne à dire, pour le canal qui nous occupe, qu'on trouve également dans ces poissons l'orifice occipital communiquant avec la cavité du labyrinthe et recouvert par la peau; il ne dit pas si le canal se prolonge sous l'enveloppe cutanée du crâne, s'il existe là, en outre, une fenêtre ovale fermée par une membrane; si la peau est percée pour servir d'orifice externe au conduit; enfin, si ce conduit est pourvu d'un muscle. Dans l'histoire de l'oreille de la chimère, il n'est rien dit de l'existence du canal ascendant[2].

L'ouvrage de M. Desmoulins[3] contient, quant aux figures et à la description de l'organe auditif des squales et des raies, une multitude d'erreurs ou d'inexactitudes : ainsi, les canaux demi-circulaires verticaux, d'un côté, communiquent sur le milieu de la nuque, avec les canaux de l'autre côté, et les ampoules mi-

[1] Aucun doute ne peut plus être émis sur l'existence du canal ascendant et sur sa libre ouverture au dehors dans les squales comme dans les raies, où ces orifices sont multiples chez quelques espèces; d'après les nombreuses dissections que nous avons faites dans ces derniers temps, nous pensons qu'on ne doit plus contester que plusieurs squales ne présentent des pertuis au sommet de la tête. M. Buchanan les a décrits avec soin dans le *squalus canus*. La figure qu'il a tracée établit une grande ressemblance dans la disposition de cet organe entre les raies et les squales. C'est donc à tort que Scarpa, Bell, Macartney, etc., ont refusé ces canaux, avec des orifices au dehors, aux squales et aux raies.

[2] Pages 562 et 563.

[3] *Anatomie des systèmes nerveux des animaux vertébrés*, etc., par F. Magendie, A. Desmoulins; Paris, 1825.

toyennes communiquent aussi ensemble par une sorte d'arcade transverse, continuation du canal membraneux.

Sans doute cet anatomiste aura pris des conduits mucifères pour un canal de communication entre les tubes semi-circulaires des deux oreilles, et c'est la fenêtre ovale qu'il veut désigner en disant *que les parois cartilagineuses des canaux ont tout à fait disparu au pourtour de cette antichambre commune des deux appareils, qui n'est séparée de l'eau où se meut l'animal que par une peau amincie*[1]. Qu'il y a peu de rigueur et de précision dans cette manière de s'exprimer!

Dans les leçons de M. G. Cuvier sur l'anatomie comparée, publiées par C. Duméril[2], il n'est rien dit des ouvertures de l'organe auditif dans les poissons chondroptérigiens, et plus spécialement de celles de l'oreille des squales et des raies; mais, dans son histoire naturelle des poissons, M. Cuvier a signalé les faits principaux de la disposition de l'appareil auditif des raies[3]. Il dit « que le labyrinthe membraneux adhère par une espèce de ligament à un endroit de la face supérieure du crâne, percé d'une petite ouverture, et fermé par une membrane sur laquelle est une petite cavité membraneuse recouverte par la peau : c'est là toute la communication de ce labyrinthe avec l'extérieur. » Ces paroles pourraient faire croire que M. Cuvier n'a voulu parler que de la fenêtre ovale; mais une note bibliographique, ajoutée à cette description rapide de l'oreille en général, prouve que cet illustre professeur avait une connaissance exacte de la disposition des parties, en disant que Scarpa a nié mal à propos la communication avec le dehors, découverte par Monro dans la raie[4].

De toutes ces recherches historiques, il résulte: 1° que les ouvertures de l'oreille des poissons cartilagineux sont connues depuis

[1] Livre III, page 410, 2e partie.

[2] *Leçons d'anatomie comparée*, par G. Cuvier, etc., recueillies et publiées par C. Duméril, tome II; Paris, an VIII.

[3] *Histoire naturelle des Poissons*, par M. le baron G. Cuvier et par M. Valenciennes, tome I, page 464.

[4] Page 461, note.

longtemps; 2° que leur existence est encore contestée; 3° que de nos jours les anatomistes ne sont pas d'accord sur la disposition de ces ouvertures [1], et qu'ils confondent le plus souvent la *fenêtre ovalaire,* qui est commune à presque tous les chondroptérigiens, avec le *canal ascendant* (*sinus auditorius internus et externus et meatus auditorius de Weber*) ouvert au dehors, et primitivement indiqué par Geoffroy, décrit par Monro, Jean Hunter, MM. Weber, [2] Huschke, [3] Buchanan [4], etc., dans les raies, les squales, etc., et dont nous cherchons ici à mettre l'existence et la disposition définitivement hors de contestation.

Nous ne prétendons point à la gloire d'une découverte, mais nous cherchons à dissiper des incertitudes, à faire cesser toute contestation sur un point d'anatomie, contestation qui devrait s'élever dans cette science bien moins que dans beaucoup d'autres sciences, car ce qui repose sur des faits est d'un positif qui ne permet pas les opinions contraires; et, s'il survient des dissidences, le plus court chemin de les faire cesser est de recourir à l'examen des parties, d'où résultera la solution définitive de la question. C'est cependant ce qui n'a pas été suivi, tant la marche de l'esprit humain est parfois peu philosophique: voilà ce qui prouve qu'un nouvel examen des choses que l'on croit le mieux connues et régulièrement enregistrées, devient souvent très-utile, en démontrant que nos prétendues connaissances ne sont parfois qu'une série de présomptions, d'inexactitudes ou d'erreurs. C'est ce que nous avons cherché à prouver par ce court exposé historique. Maintenant nous

1 M. Weber les a décrites en 1820; M. D. de Blainville en a contesté l'existence en 1822, et confondu la fenêtre ovalaire avec le canal ascendant; enfin la description donnée par M. G. Cuvier en 1828 n'est ni assez claire, ni assez explicite.

2 «Gaudeo equidem observationibus meis de *sinu auditorio externo* cum vestibulo membranaceo communicante, in pluribus raiarum ordinibus repetitis, injectionibus argenti vivi comprobatis, præclari Monroï, primi inventoris honorem contra Camperum potissimum et Scarpam defendi. Hujus enim merita de piscium cartilaginorum aure, ita Camperi et Scarpæ gloria obscurata sunt, ut ex anatomicarum memoria plane fere exciderint.» Libr.: cit., p. 95.

3 *Beiträge zur physiologie und naturgeschichte, etc. Weimar, 1824.*

4 *Physiological illustrations of the organ of hearing, etc.* London 1828, p. 107 — *Meatus auditorius externus* of the *squalus canus.*

terminons ces débats par la description et la représentation des parties (voyez les planches et les descriptions particulières). Des anatomistes, critiques judicieux, pourraient encore rendre de grands services par l'examen rigoureux de ce qui a été fait, et par une étude attentive et une description plus circonstanciée et plus exacte des parties qu'on croyait déjà suffisamment connues.

CHAPITRE XVII.

ORGANE AUDITIF DE LA RAIE BOUCLÉE (*Raia clavata*, L.).

APPAREIL QUI ÉTABLIT UNE COMMUNICATION ENTRE LA CAVITÉ DU VESTIBULE MEMBRANEUX ET L'EXTÉRIEUR. (Voy. pl. X, fig. 2; pl. XI, fig. 2 et 3; pl. XII, fig. 1, 2, 3, 4).

1° *Tube* ou *canal ascendant* (*sinus auditorius* et *meatus auditorius* de Weber). Sous ce nom, nous désignons le conduit qui fait communiquer l'intérieur du sac avec le dehors : ce conduit commence près le tiers supérieur de la poche commune formant le vestibule membraneux (le *sacculus* et le *sinus médian*, qui sont réunis en une seule cavité); de là, il se porte droit en haut, le long de la face externe du *tube commun* (tubes membraneux antérieur et postérieur) auquel il adhère, puis il traverse la paroi crânienne supérieure, et devient sous-cutané (voy. pl. XII, fig. 3, *u, t, s, s*); alors il se renfle considérablement, change de direction et devient horizontal; ses parois, de blanches et transparentes qu'elles sont, prennent une teinte noirâtre : ce tube se porte d'abord en dedans, puis en arrière et en dehors, et forme ainsi un cercle presque complet autour d'un petit muscle dont nous allons parler; il s'engage ensuite dans l'épaisseur de la peau qu'il traverse obliquement dans l'étendue de deux lignes, diminue de diamètre, et s'ouvre à l'extérieur par un orifice très-fin (*Meatus auditorius externus* de Weber. (Voy. pl. XII, fig. 3; pl. XII, fig. 4, *r;* pl. XI, fig. 2, *p*, fig. 3, *i.*)

Le *tube ascendant* contient un liquide chargé d'une matière blanche, comme amylacée, que nous nommons *otoconie;* et, lors-

qu'on ne trouve pas l'orifice extérieur, on n'a qu'à presser la peau de la région environnante et l'on voit sortir de cette matière blanche, ce qui fait découvrir très-facilement l'ouverture et le canal. Dans l'intérieur de la cavité du labyrinthe, le *tube ascendant* devient excessivement mince, c'est pour quoi il est difficile de s'assurer de la manière dont il s'ouvre dans le sac; cependant nous croyons pouvoir affirmer qu'il s'y abouche librement.

2° Vers l'*orifice extérieur,* dans l'espace d'environ deux lignes, le *tube ascendant* se rétrécit également, mais pas d'une manière aussi notable : ses parois sont en cet endroit plus résistantes (*fibro-cartilagineuses*); serait-ce parce qu'elles sont formées par la peau? Dans le reste de leur étendue, ces parois sont minces, composées d'un tissu cellulaire assez résistant, et tapissées à leur intérieur d'une membrane d'apparence muqueuse, très-fine. Entre la peau et la paroi cartilagineuse et supérieure du crâne, la face supérieure du *tube ascendant,* dans sa partie horizontale, est intimement liée à la peau; sa face inférieure correspond à une excavation longue d'environ deux pouces et large de neuf lignes. Cette cavité est divisée en deux par un trousseau ligamenteux, mais en avant les deux côtés peuvent communiquer ensemble (voy. pl. XII, fig. 2, *g*), tandis que, postérieurement, ils sont séparés par le ligament (même fig., *f, f*) : cette dépression biloculaire contient, de chaque côté du tube ascendant, un muscle particulier à la *fenêtre ovale* (voy. même fig., *i, i*), et de plus les deux loges sont remplies par une substance gélatineuse, transparente, retenue en position par une espèce de membrane hyaloïde, qui se détache assez facilement des parois solides de cette excavation; alors on voit que la cavité elle-même est tapissée par une membrane d'apparence séreuse.

3° Le *muscle du tube ascendant* naît sur une petite éminence au devant et un peu en dehors de la fenêtre ovale (pl. XII, fig. 2, *o, o*), de là il se porte horizontalement en dedans et un peu en avant pour s'insérer aux parois mêmes du tube (pl. XII, fig. 2, *p, p*). Comme ce dernier forme une espèce de cercle dont le muscle occupe le centre, il s'ensuit que celui-ci s'insère à toute la partie évasée du

tube ascendant. Le muscle est maintenu dans ses rapports et ses mouvements par un faisceau fibreux qui lui envoie une expansion pour lui servir de gaîne. D'après sa direction, ce muscle doit avoir pour usage de comprimer le *tube ascendant*, et en même temps de tendre la peau qui recouvre l'espace concave, pour la rendre plus propre à transmettre, à la fenêtre ovale, les ondes sonores du liquide au milieu duquel l'animal est plongé. (Voy. pl. X, fig. 2; pl. XI, fig. 2, *o;* fig. 3, *g;* pl. XII, fig. 1, *g, g;* fig. 2, *o, n, p;* fig. 3, *r;* fig. 4, *p.*)

4° La *fenêtre ovale* correspondant à l'espace concave dont nous parlons, en arrière et en dedans du *muscle* (voy. pl. X, fig. 2; pl. XI, fig. 2, *g;* fig. 3, *f;* pl. XII, fig. 1, *f, f;* fig. 2, *i, i;* fig. 3, *q*), est fermée par une membrane fibreuse, transparente, assez résistante, en rapport, par sa face interne, avec le vestibule ou l'espace situé entre les tubes membraneux semi-circulaires et les parois des canaux cartilagineux, lequel espace est rempli par la *périlymphe.*

Toutes ces parties (*tube ascendant* avec *son muscle* et la *fenêtre ovale*) ne présentent point de différences notables dans la raie bouclée, la raie blanche (*raia batis*) et la raie noire, la torpille, etc., si ce n'est que, dans la raie blanche, le cercle formé par la partie horizontale du tube ascendant est complet, tandis que dans les deux autres espèces, il ne forme que les $\frac{4}{5}$ d'un cercle. La *fenêtre ovale* paraît aussi un peu plus petite dans la raie bouclée que dans les deux autres espèces.

Le volume du muscle est proportionnellement un peu plus considérable dans la raie blanche.

Le *tube ascendant* n'a qu'une seule ouverture à l'extérieur chez ces trois espèces, tandis que sur plusieurs autres espèces, par exemple, la raie aigle (*raia aquila*), il en présente plusieurs. Dans la torpille, (*raia torpedo*) il paraît aussi n'avoir qu'un orifice externe.

Nous avons examiné ces dispositions sur un très-grand nombre de variétés de raies qu'on apporte toute l'année dans nos marchés et sur plusieurs pastenagues; nous les avons récemment examinées sur les côtes de la Méditerranée, et particulièrement à Venise, avec M. Becquerel, sur plusieurs variétés de torpille (*raia tor-*

pedo), et nous n'avons pas trouvé d'assez grandes différences pour les signaler. Sur ces torpilles l'organe auditif et surtout le tube ascendant et son orifice au dehors sont d'une proportion inférieure à celle de ces mêmes parties dans les autres raies.

CHAPITRE XVIII.

ORGANE AUDITIF DE LA CHIMÈRE ANTARCTIQUE (*Chimæra callorynchus*, L.). (Voy. pl. XII, fig. 5, 6, 7, 8.)

L'oreille de ce chondroptérigien a plus d'une ressemblance avec celle des raies. Sa situation est la même, ainsi que son volume, mais elle n'est pas complétement séparée du crâne, comme dans les raies, et déjà on voit une disposition de ce genre dans les chondroptérigiens à branchies libres, et particulièrement les esturgeons, où cette communication, entre la cavité crânienne et le labyrinthe cartilagineux, n'est fermée que fort imparfaitement par une expansion ligamenteuse.

Dans les squales, les anges, les raies, etc., une cloison cartilagineuse interdit toute communication entre la cavité cérébrale, celle de l'oreille et les liquides; celle du crâne et celle du labyrinthe sont distinctes et séparées.

Dans les esturgeons, il n'y a pas de cloison cartilagineuse, mais il existe le ligament dont nous venons de parler; enfin, dans le genre chimère, une ouverture, moins grande que dans les sturioniens, se voit entre le labyrinthe et le crâne, et elle est en partie fermée par une cloison fibro-cartilagineuse assez forte, s'étendant obliquement d'arrière en avant et de haut en bas, et recouvrant, en grande partie dans cette direction, le canal membraneux postérieur et le sac.

L'oreille de la chimère est grande, relativement à la taille de l'individu, et elle paraît dans des proportions plus fortes que celles du labyrinthe des raies.

Canaux et *tubes demi-circulaires.* Les trois tubes semi-circulaires membraneux sont séparés des parois cartilagineuses par un

espace plus grand que dans beaucoup de poissons osseux et que dans les mammifères, mais moins considérable que dans les raies. Tout le labyrinthe cartilagineux, c'est-à-dire les canaux et le vestibule peuvent être isolés facilement de la gangue cartilagineuse dans laquelle ils sont plongés, à peu près comme dans les oiseaux on isole le labyrinthe osseux de la substance diploïque; c'est encore un point d'analogie entre les raies et les chimères (voy. pl. XII, fig. 5, 6, et 7). Le liquide contenu dans ces canaux cartilagineux paraît être le même que celui par lequel est baigné l'encéphale, et ici les chimères se distinguent des squales et des raies.

Des trois tubes membraneux, l'antérieur et le postérieur se ressemblent pour leur étendue, leurs formes; l'un et l'autre offrent une ampoule en se terminant séparément, l'un en avant, l'autre en arrière, sur le *sinus médian.* Ils s'adossent ensemble par leur extrémité non renflée, et forment le *tube commun vertical,* qui est en connexion avec un troisième tube s'élevant de la partie moyenne et supérieure du *sinus médian,* comme dans les raies. Le tube demi-circulaire externe est renflé à son extrémité antérieure qui aboutit au sinus médian, près de l'ampoule du tube demi-circulaire antérieur, et par son autre bout il s'insère à la partie supérieure de ce même *sinus médian,* entre le tube commun et l'ampoule du tube postérieur. (Voy. pl. XII, fig. 5, 6, 7, et la description des planches.)

Sinus médian. Il est large; son plus grand diamètre est d'arrière en avant; en bas, il se rétrécit dans son point de contact avec le *sac.* Il reçoit, en haut, par ses deux extrémités, les ampoules des tubes verticaux et du tube horizontal ou externe. Sa partie moyenne et supérieure reçoit le tube commun et l'extrémité postérieure du tube externe; on voit s'élever de cette partie moyenne et supérieure dans le point correspondant à la terminaison du tube commun, un quatrième tube parallèle au tube commun, et adossé à son côté interne.

Canal ou *tube ascendant.* Ce tube s'élève de la partie moyenne et supérieure du *sinus médian,* adossé, dans sa moitié inférieure et par son côté externe, au canal commun qui le reçoit dans une

légère dépression; la seconde moitié de sa hauteur est contenue dans l'épaisseur des parois cartilagineuses de la voûte du crâne; enfin, il devient sous-cutané, traverse la peau, et s'ouvre à l'extérieur très-près de la ligne médiane, à peu de distance de celui du côté opposé. Isolé du *tube commun* et des deux tubes membraneux verticaux, et situé au-dessus du sinus médian, le *tube ascendant* peut être comparé à un matras dont la panse serait déprimée sur les côtés interne et externe, et un peu allongée en avant et en arrière. La moitié inférieure, c'est-à-dire la partie qui s'étend du *sinus médian* aux parois cartilagineuses, est d'un calibre égal dans tous ses points, et sa structure, quoique membraneuse, paraît avoir un peu plus de consistance que celle des tubes demi-circulaires membraneux. La portion supérieure de ce canal, surtout dans le point correspondant aux parois cartilagineuses du crâne, est légèrement dilatée et fusiforme, et dans cette partie dilatée les parois du canal sont colorées par un léger *pigmentum* noirâtre, tandis que partout ailleurs elles sont parfaitement blanches. La substance de ce tube membraneux se rapproche un peu de la densité fibro-cartilagineuse. Devenu sous-cutané, il ne décrit aucune courbure, et n'offre aucun renflement. Nous avons cherché s'il existait dans ce point quelques faisceaux charnus embrassant le canal, comme nous en avons trouvé dans les raies, mais nous n'avons pu en reconnaître; cependant nous n'oserions affirmer qu'il n'en existe point, parce que l'analogie nous engage à croire à la présence de ces trousseaux charnus. Le poisson soumis à nos investigations anatomiques, avait été longtemps conservé dans de mauvais alcool, et l'on sait que dans ces circonstances, il est difficile de distinguer des fibres musculaires d'avec le tissu cellulaire, ou de petits faisceaux ligamenteux.

L'orifice extérieur nous a paru plus distinct et plus grand que dans les raies. Du mercure introduit par cet orifice extérieur, à l'aide d'un tube capillaire approprié, a parcouru facilement tout le cours du canal et distendu le *sinus médian*, le *sac* et les *tubes demi-circulaires membraneux*.

Ouverts sur l'autre oreille, ce *tube* ainsi que le *sinus médian* ont montré qu'ils contenaient une matière blanche, comme *amylacée* (*otoconie*), et une liqueur lactescente; cette inspection ne nous a laissé apercevoir aucune valvule.

Sac ou *saccule*. Au-dessous du *sinus médian*, est situé le *sac;* il est moins grand que le sinus médian, arrondi, et communique avec ce dernier par un canal très-court; il contient aussi de cette matière amylacée, que nous avons nommée *otoconie*, et une liqueur blanche. Ce *sac* ne remplit pas entièrement la partie du vestibule cartilagineux à laquelle il correspond, et l'espace qui les sépare est occupé par la *périlymphe* ou humeur de *Cotugno*, qui est ici la même que celle par laquelle l'encéphale est baigné. (Voy. pl. XII, fig. 8, *h*.)

Nous n'avons pas aperçu à la paroi supérieure du crâne, près de l'orifice du *tube ascendant*, d'ouverture fermée par une membrane, et qu'on pût comparer à celle qui existe dans les raies, les squales, etc., qu'on a nommée *fenêtre vestibulaire*. Il se pourrait, néanmoins, que le conduit cartilagineux, longeant le canal ascendant qui communique avec l'extérieur, tînt lieu de fenêtre du vestibule. Ce conduit cartilagineux est, en haut, beaucoup plus large qu'il ne faut pour loger le tube membraneux, et sa portion sous-cutanée embrasse le canal de très-près; mais, entre son ouverture et les parois cartilagineuses, on voit un petit espace circulaire où il n'existe qu'une lame cartilagineuse très-mince et comme membraneuse.

Le *nerf acoustique* envoie son faisceau principal au sinus médian et au sac, et les ampoules antérieure et postérieure reçoivent chacune un filet nerveux. (Voy. pl. XII, fig. 5, *i;* fig. 8, *i*.)

L'oreille d'un grand nombre de poissons présente donc avec l'extérieur des communications plus ou moins directes, médiates ou immédiates. Tantôt ces ouvertures, placées au sommet du crâne, sont fermées par des membranes, comme Heusinger les a décrites d'après le *lepidoleprus;* tantôt elles correspondent à la base du crâne et sont closes par des feuillets membraneux, ainsi que G. Cuvier

en a indiqué la disposition dans les mormyres, les miripristis; tantôt, enfin, ces ouvertures correspondent à la partie postérieure de la tête, par deux canaux qui bientôt se réunissent en un seul pour établir une communication avec la vessie aérienne, ainsi que E.-H. Weber d'abord, et nous ensuite, l'avons démontré dans les cyprins, les cobites, les spares, les clupes, etc; enfin, une dernière voie de communication avec le dehors est celle que nous venons de décrire dans les raies et les chimères, que Monro avait déjà signalée dans les premiers de ces poissons, mais dont P. Camper, Scarpa et plusieurs autres anatomistes nièrent l'existence. Aujourd'hui, d'après les travaux de E.-H. Weber, et d'après nos propres recherches, consignées dans cet opuscule et dans plusieurs autres mémoires, que nous avons lus à l'académie des sciences et que nous publierons plus tard, on ne peut plus élever de doute sur ce point.

Enfin, une disposition semblable se voit dans l'oreille des chimères, et ici nous sommes le premier et même le seul qui ayons parlé de ce mode de structure chez ce poisson.

Dans les sciences, il ne suffit pas toujours de signaler un ou plusieurs faits nouveaux et curieux, il faut encore les lier avec les connaissances qu'on possède déjà, et chercher à indiquer les usages des parties dont, pour la première fois, l'existence est proclamée. Ici, on peut souvent perdre le guide qui, dans les sciences expérimentales, doit sans cesse nous conduire, l'observation. Alors on la remplace par des jugements *à priori,* par des présomptions ou des théories plus ou moins ingénieuses, mais dont on ne peut affirmer la justesse. C'est à quoi nous sommes réduits pour expliquer les fonctions des canaux et des ouvertures de l'oreille dont nous venons de faire l'énumération.

En nous bornant au *canal* ou *tube ascendant,* que nous avons

décrit et fait représenter dans les raies et les chimères, nous dirons que dans les premiers de ces poissons on a cherché à comparer ces ouvertures :

1° A la *fenêtre ovale* ou *vestibulaire;* mais cette comparaison ne peut plus être admise, puisque ce pertuis, fermé par une membrane, existe à côté du canal ascendant. Scarpa le compare à la *fenêtre ovale*, et E.-H. Weber en fait une *fenêtre ronde.*

2° Avec la *fenêtre ronde* ou *cochléenne;* cette opinion est inadmissible, car la fenêtre ronde appartient au limaçon, et dans les poissons il n'existe pas de cochlée véritable. Nous insisterons sur cette circonstance dans le mémoire qui vient après celui-ci (*de l'oreille du brochet:* voyez aussi ce que nous avons dit de l'oreille de l'alose, chap. III).

3° Comparerons-nous ces conduits aux *aqueducs?* Nous l'avions pensé d'abord, mais l'examen des aqueducs dans les mammifères nous a fait reconnaître que ces canaux ne sont que des moyens de transmission des vaisseaux. (Voyez nos *Recherches anatomiques et physiologiques sur l'organe de l'ouïe et sur l'audition dans l'homme et les animaux vertébrés,* Paris, 1836.)

D'ailleurs, dans les classes animales où ces aqueducs sont le plus développés, ils ne communiquent pas avec le labyrinthe membraneux, ils s'ouvrent en dehors de ce labyrinthe sur la cavité qui contient la *périlymphe,* tandis que dans les raies, les squales et les chimères, ces canaux ascendants s'ouvrent dans la cavité du *sinus médian* et du *sac,* et par eux l'on peut faire sortir la matière calcaire du *sac* et l'*endolymphe.*

4° Serait-ce plutôt une cavité tympanique? Les poissons en sont privés : le premier nous avons signalé l'existence d'un petit osselet comparable au marteau, ou mieux encore, à l'étrier dans un grand esturgeon; mais sur plusieurs poissons de la même espèce, que nous avons disséqués depuis ce premier examen, nous n'avons plus rencontré cette même disposition : un ligament très-court, mais fort, remplaçait le petit noyau osseux. La cavité du tympan est placée entre le conduit auditif et le labyrinthe; elle est fermée

par un diaphragme membraneux de l'un et de l'autre côté; toujours ce labyrinthe membraneux est fermé. Dans aucune espèce animale pourvue de tympan, on ne parvient du dehors jusque dans la cavité du labyrinthe membraneux, sans avoir à traverser des cloisons membraneuses; et ici il n'en existe point. Si l'on fait de l'ouverture sous-cutanée, fermée par une membrane et située près du canal ascendant, une fenêtre ovale, on ne peut plus considérer ce canal ascendant comme une cavité tympanique.

5° Ce que nous disons de la cavité du tympan, nous le répétons pour le conduit auditif externe, si l'on comparait sérieusement le canal ascendant avec ce conduit auditif.

6° Ce *canal ascendant* est donc une anomalie, une disposition qui se trouve en dehors de toutes les autres dispositions, enfin un état exceptionnel? On pourrait le croire si, dans la recherche des faits, on ne se laissait pas diriger et conduire par un esprit philosophique, véritable flambeau dans l'étude des sciences. Nos investigations anatomiques générales nous ont toujours démontré qu'il existe une grande unité de plan dans la nature, et que, si des dispositions singulières semblent parfois se refuser à se laisser classer et rapprocher d'autres dispositions bien connues et appréciées dans leurs fonctions, c'est qu'il est des points intermédiaires qui nous sont inconnus, ou bien nous ne remontons pas jusqu'au type primitif de l'organe dans certaines classes animales ou au type primitif de l'organisation fœtale. Cette voie est celle que nous allons suivre, et peut-être lui trouverons-nous un aboutissant vers le point où nous voulons arriver.

M. Huschke[1], admettant l'existence d'un appareil auditif dans les insectes, considère comme tel les *trachées*. Déjà Comparetti avait accordé des organes de l'ouïe aux insectes, et il les plaçait derrière les yeux. Il considérait un stigmate comme un conduit auditif externe; mais, les observations de Comparetti ayant été faites sur des insectes desséchés depuis longtemps, les physio-

[1] *Beiträge zur Physiologie und Naturgeschichte*, etc.; Weimar, 1824.

logistes n'avaient eu que peu de confiance dans les données de cet auteur, dont les descriptions et les figures ne présentent ni clarté ni précision; cependant, ainsi que le fait observer très-judicieusement M. Huschke, le lieu qu'il assigne à ces organes ressemble beaucoup à celui qu'ils occupent dans les crustacés et dans les animaux vertébrés. Ce dernier physiologiste croit qu'on peut considérer comme appartenant à un appareil de l'audition, ou de la respiration, un stigmate placé dans le *locusta verrucivora*, vers l'insertion des ailes, ainsi que la trachée qui conduit dans un cul-de-sac. Il prétend que les canaux du labyrinthe représentent les trachées des insectes.

Dans les poissons, les trachées des insectes sont remplacées par la ligne latérale, et cette analogie a déjà été indiquée par MM. Spix et Oken. De même que cette rangée de trachées parcourt dans les insectes les deux couches musculaires du dos et de l'abdomen, de même on observe sur les poissons des poches et des tuyaux semblables entre les deux grandes couches des muscles inter-costaux.

M. de Blainville a pensé qu'on pourrait considérer dans les insectes certaines trachées comme des rudiments d'oreille. Une petite ouverture en forme de stigmate, à la face postérieure de la tête, dans les *cigales*[1], conduit dans un sac qu'il est disposé à considérer comme le *principe* d'un organe auditif.

Chez beaucoup de poissons, cette ligne latérale est formée d'une serie de petites poches secrétant du *mucus*, et le nez, l'œil et l'oreille sont précisément sur le trajet de cette ligne latérale, d'où M. Huschke conclut, peut-être un peu vite, que ces trois organes sensoriaux ne sont que des poches mucipares, développées et organisées chacune selon la fonction qu'elle est appelée à remplir.

Sur cette ligne latérale doit donc s'ouvrir l'oreille, et cette forme rudimentaire, qui se voit dans l'insecte, la nature en a laissé un souvenir sensible dans les raies. Déjà Monro[2] avait signalé deux

[1] Page 566.

[2] *The structure and physiology of fishes*, etc.; Edinburgh, 1785.

petites ouvertures par lesquelles le labyrinthe s'ouvre au dehors. La justesse de cette assertion, mise en doute et même niée par Scarpa et par M. de Blainville[1], a été reproduite et démontrée par E.-H. Weber[2] et Huschke[3], ainsi que par nous, et l'histoire de cette disposition forme le principal sujet de ce mémoire.

Ainsi, d'après ce système des analogues, présenté par M. Huschke, mais que nous ne suivrons pas dans les développements qu'il lui donne et dans toutes les conséquences qu'il en tire, l'oreille ne serait qu'une modification du petit *sac*, de la *trachée* et du *stigmate* de l'insecte ou qu'un des *cryptes* de la ligne latérale du poisson; et le canal ascendant des raies et des chimères, d'après ce même système, serait la permanence d'un état antérieur avec accroissement du canal et de l'orifice à l'extérieur d'un des cryptes de cette ligne latérale du poisson; les *otolithes*, comme les *otoconies* (*lapilli* de l'oreille), résulteraient de la secrétion plus grande de la matière calcaire que l'on trouve dans les follicules de cette ligne latérale, et que l'on rencontre bien plus abondante encore vers les trous de conjugaison du rachis de beaucoup de reptiles, et particulièrement de *reptiles batraciens*.

Nous nous arrêtons ici, et nous laissons à d'autres de prononcer sur la valeur de toutes ces opinions.

Notre but principal était de signaler des faits et de mettre fin à des incertitudes; nous croyons l'avoir atteint par ce travail, que nous nous proposions de rendre plus complet par l'examen de beaucoup de poissons que nous avons fait venir de la Méditerranée; mais les circonstances nous commandaient de faire connaître les résultats que nous avons déjà obtenus, et qui nous paraissent suffisants pour décider la question depuis longtemps en litige.

[1] *Principes d'anatomie comparée*, tom. I, pag. 562.
[2] *De aure et auditu hominis et animalium aquatilium*, etc.; Lipsiæ, 1820.
[3] *Beiträge zur Physiologie und Naturgeschichte*, etc. in-4°, Weimar, 1824.

CHAPITRE XIX.

ORGANE AUDITIF DU BROCHET (*Esox lucius*).

L'oreille du brochet, déjà étudiée et décrite par plusieurs anatomistes [1], est construite d'après le type de celle de tous les poissons osseux; cependant elle offre une petite particularité déjà indiquée : nous voulons parler de l'appendice qu'on a considéré comme un rudiment de limaçon. (Voy. pl. XIII, fig. 4, n.)

Plusieurs brochets de grande dimension ont servi à nos investigations, et nous ont fourni l'occasion d'étudier l'oreille dans ses moindres détails; la figure que nous en donnons se distingue par une exactitude rigoureuse. (Voy. pl. XIII, fig. 4 et 5)

L'oreille du brochet est située à droite et à gauche du cerveau, entre la cinquième et la huitième paire de nerfs; elle occupe des cavités latérales qui ne sont nullement distinctes de la cavité crânienne renfermant l'encéphale; aussi le liquide qui remplit le crâne communique-t-il librement avec l'organe auditif, de sorte que tout le liquide céphalo-rachidien peut être considéré comme remplissant les fonctions de l'humeur de Cotugno (périlymphe).

Des trois tubes demi-circulaires deux sont enchaînés, c'est-à-dire qu'ils passent autour de colonnes osseuses qui les tiennent fixés dans leur situation; le troisième, qui est le canal demi-circulaire antérieur, est libre ou n'embrasse aucune colonne osseuse. Il résulte de la disposition qui vient d'être remarquée, qu'il n'y a de conduits osseux que pour les tubes demi-circulaires postérieur et externe, et qu'il n'y en a point pour l'antérieur.

Chacun des trois tubes semi-circulaires offre une ampoule à l'une de ses extrémités (*e*, *f*, *g*, fig. 4, pl. XIII). Chaque ampoule

[1] Par Casserio, Geoffroy, P. Camper, Vicq-d'Azyr, Scarpa, Comparetti, Huschke, etc.

reçoit un filet nerveux ; deux ampoules sont antérieures (*e* et *f*), et la troisième est postérieure (*g*). Cependant l'oreille du brochet offre une petite particularité : c'est qu'il semble que le tube externe est aussi pourvu d'une ampoule à son extrémité postérieure; mais ce n'est qu'un petit renflement (*h*) que le canal subit au moment de s'aboucher dans le *sinus médian;* au reste, ce renflement se distingue parfaitement de toutes les ampoules en ce qu'il ne reçoit pas de filet nerveux, caractère générique et constant des ampoules des tubes semi-circulaires.

Le *sinus médian* (*i*) n'a guère que deux prolongements, l'un en haut et l'autre en avant. Le prolongement postérieur est presque nul, et donne attache à l'ampoule postérieure *g*, ainsi qu'à l'appendice *n*. Le prolongement supérieur se divise pour former deux tubes *k* et *l*, et se fixe au crâne par un épanouissement fibreux, qui part de l'endroit même de la bifurcation. Le prolongement antérieur est le plus considérable; il se renfle un peu vers l'extrémité *m*, et donne attache supérieurement aux ampoules *e* et *f*. Ce renflement reçoit un petit faisceau de filets nerveux, et contient un petit *lapillus* ou *otolithe* qu'on aperçoit à travers les parois membraneuses : le *lapillus* dont il s'agit est représenté isolément en *c*, fig. 5, pl. XIII.

Inférieurement le *Sinus médian* communique avec le *sac o;* celui-ci, d'une forme ovale contient, dans son intérieur deux *otolithes*, dont l'un postérieur, plus petit, et l'autre antérieur, plus grand; tous les deux sont représentés en *a* et *b*, fig. 5, pl. XIII. Ils nagent dans un liquide albumineux et sont recouverts, à l'une de leurs faces, d'une membrane très-molle, dans laquelle semble aboutir les filaments nerveux propres au *sac*. La cavité du *sac* communique avec celle du sinus médian.

L'origine du *nerf auditif* n'est presque pas distincte de celle du nerf de la cinquième paire; elle a lieu sur le côté de la moelle allongée. Le nerf auditif constitue un court faisceau qui se ramifie tout de suite pour fournir des filets aux ampoules et aux parties de l'oreille dans lesquelles sont contenus les

otolithes. Il y a trois simples filets pour les ampoules et deux pinceaux de filets, dont l'un va à l'extrémité antérieure du sinus médian pour s'épanouir près du petit *otolithe* contenu dans cette partie; l'autre pinceau s'épanouit sur le sac vers la membrane molle qui revêt la face interne des deux *lapilli* renfermés dans cette poche.

Entre le *sac* et l'ampoule postérieure, le sinus médian donne naissance à un *appendice membraneux* en forme de massue (*cysticule*), qui se porte en bas et en arrière vers le trou occipital (voyez *n*, fig. 4, pl. XIII). Cet appendice, dont les parois ont la même structure que celle du reste du labyrinthe membraneux, est creux, en forme de poche; il communique librement avec le sinus médian, ne contient que du liquide sans *lapillus*, et ne reçoit pas de filet nerveux. Ce singulier organe, qu'on considère comme propre au brochet, a été regardé par Scarpa comme un rudiment de limaçon. Nous ne pouvons pas partager l'opinion de ce savant anatomiste, et, pour appuyer notre sentiment, nous nous contenterons tout simplement de dire ce que c'est que le limaçon des animaux supérieurs. Le limaçon en effet est une cavité creusée dans la substance osseuse, laquelle est tantôt recourbée en spirale et divisée en deux loges par une cloison membraneuse et osseuse; tantôt elle est presque droite, non divisée par une cloison, mais contient un cartilage annulaire, comme dans les oiseaux et plusieurs reptiles sauriens, cartilage dont la fonction paraît être la même que celle de la lame ostéo-membraneuse qui divise l'intérieur du limaçon des mammifères en deux rampes. Le vestibule membraneux n'envoie aucun prolongement dans la cavité du limaçon, ainsi que nous l'avons fait voir dans la description de l'oreille humaine. Le limaçon ne contient rien autre chose que du liquide de Cotugno, ou *périlymphe*, et n'a aucune communication avec la cavité du labyrinthe membraneux formée du sac, du sinus médian et des canaux semi-circulaires. Il est donc tout à fait inexact de considérer une portion du vestibule membraneux comme formant un limaçon, puisque

ces deux parties n'ont rien de commun entre elles, l'une étant une simple cavité à parois solides, et l'autre un organe membraneux. La comparaison de Scarpa peut être assimilée, pour son exactitude, à celle que les anciens anatomistes ont faite entre les *lapilli* de l'oreille des poissons et les osselets du tympan des animaux supérieurs. Si quelque chose peut être considéré comme un rudiment de limaçon dans les poissons, c'est la cavité qu'on observe chez certains d'entre eux, dans les gades et particulièrement dans le *gadus morrhua*, au-dessous du *sac*, cavité qui s'étend en arrière dans la base du crâne et qui est pleine de liquide, et mieux encore ce qu'on observe sur l'alose. (Voy. chap. III.)

Un appendice analogue à celui du labyrinthe du brochet se voit dans l'oreille de plusieurs autres poissons et appartient également à l'une des poches membraneuses du vestibule. Ainsi, dans la baudroie, dans les grondins, etc., on aperçoit un petit appendice sphéroïdal s'ouvrant dans le vestibule; mais, au lieu de correspondre avec le *sinus médian*, il adhère au *sac*.

Cet appendice considéré comme un limaçon avait déjà été aperçu et signalé dans le brochet par Casserio [1], qui le fait communiquer par un double pédicule avec le sacculus et avec le sinus utriculeux; il dit qu'il contient un fluide aqueux [2]. Geoffroy ne parle point de cette petite arrière-cavité, que P. Camper [3] a représentée sur sa seconde planche, fig. 5 et 6. Il prend pour un ligament attaché à la bourse cet appendice, et il l'appelle *tensor bursæ*. Suivant lui, ce ligament gagne le trou occipital pour se fixer au côté du canal de l'épine [4].

[1] Julii Casserii Placentini, etc. *De vocis auditusque organis, etc.* Ferrariæ, 1600. — Idem. *Pentæstheseion hoc est de quinque sensibus liber, etc.* Venetiis, 1609.

[2] Tabula XII, fig. IV, LL, MM, pag. 216. — *Organi auditus lucii piscis declaratio.*

[3] *Mémoire sur l'organe de l'ouïe des poissons,* par Petrus Camper.—Dans les mémoires de mathématiques et de physique présentés à l'académie royale des sciences par divers savants, tom. VI, pag. 177. Paris, 1774.

[4] On serait étonné de voir ici M. G. Cuvier (*Histoire naturelle des poissons*, tom. I, pag. 460) considérer encore cet appendice comme un ligament, lorsqu'en parlant de Camper il dit: « qu'il nommait *tensor bursæ* un appendice ou plutôt un ligament plus « prononcé dans le brochet que dans beaucoup d'autres poissons, » si ce grand naturaliste, n'avait pas décrit ailleurs, comme nous le verrons, cet organe avec ses véritables caractères.

Cette description de P. Camper est très-inexacte, car la partie n'est point ligamenteuse et de plus elle est libre. Les figures du brochet que cet anatomiste célèbre nous a laissées sont peu claires, et donnent une fausse idée de la disposition de l'organe de l'ouïe dans ce poisson.

Cet appendice a été bien mieux représenté par Comparetti [1] et par M. Huschke [2]; l'on voit dans les figures qu'ils en ont faites qu'il est libre, pyriforme, placé en arrière, précisément à l'entrée du canal vertébral.

Scarpa désigne cet appendice sous le nom de *canalium semicircularium appendix*, et pourtant il le fait sortir par un pédicule étroit du *sinus utriculiforme* ou *sinus médian* (voyez pl. II, fig. 9, *i,i*). Il indique un filet nerveux provenant de la première paire spinale, s'insérant au fond de cet appendice. P. Camper avait aussi indiqué un filament dans ce même lieu, mais il le considérait plutôt comme un ligament que comme un nerf; enfin Scarpa dit qu'on pourrait considérer cet appendice comme le rudiment d'un quatrième canal demi-circulaire, et il donne pour raison que du mercure instillé dans ce petit *sac* passe dans le sinus médian et les tubes semi-circulaires [3]. Cette communication ne prouve rien, et l'existence d'un quatrième canal semi-circulaire serait la seule exception qu'on pourrait citer, car jusqu'ici on n'a jamais trouvé plus de trois canaux demi-circulaires.

[1] Vesicula pyriformis cum collo, ad saccum majorem superius firmiter affixo. (Voyez tab. III, fig. XIX et XX.)

Additur in hoc *vesica peculiaris ac pyriformis*, cujus corpus mobile insidet extremæ cáveæ acusticæ, imo latet in foveola ad *principium canalis spinæ*, et collum ascendens persequitur limbum sacci majoris superiorem, pag. 277. — Observ. LXVI, pag. 248.

Andreæ Comparetti *Observationes anatomicæ de aure interna comparata*. Patavii, 1789.

[2] M. Huschke, en décrivant la figure 1 de la planche Ire, dit : Appendice vésiculeux qui se porte vers le canal vertébral, s'attache par son autre extrémité au sac lapillaire et à l'ampoule du canal demi-circulaire externe, et se vide dans cette dernière. (Voyez *Beiträge zur Physiologie und Naturgeschichte*, etc., Weimar, 1824.)

[3] Dicere penè rudimentum quarti canalis semi-circularis, pag. 21, § IX. — *Anatomicæ disquisitiones de auditu et olfactu.*

Cet *appendice pyramidal* n'avait pas échappé à l'observation de Vicq-d'Azyr [1], qui ne partage pas l'opinion de P. Camper, mais qui considère cette partie comme une cavité subalterne continue avec la bourse élastique également creuse et transparente, et qui n'en diffère que parce qu'elle forme un petit cul-de-sac dont les parois sont plus épaisses.

La description que MM. G. Cuvier et C. Duméril donnent de cette cavité accessoire de l'oreille du brochet ressemble beaucoup à celle de P. Camper. Cet appendice creux tient, suivant ces deux célèbres anatomistes, à la partie postérieure du sinus par un canal très-mince, et se fixe par son autre extrémité au crâne, tout près du bord du trou occipital; c'est en quelque sorte une troisième division du sac : on ne l'a trouvé jusqu'ici que dans ce seul poisson [2]. Nous avons vu que sur ce dernier point ils sont dans l'erreur.

C'est probablement cet appendice que M. G. Cuvier veut désigner lorsqu'il dit dans son grand ouvrage d'ichthyologie [3], en parlant des appendices du sac des poissons cartilagineux, qu'on ne peut guère douter que cet organe ne représente la petite cavité, seul vestige du limaçon qui soit demeuré aux reptiles, etc. Cette conclusion doit probablement s'étendre au sac des poissons osseux, malgré sa position en arrière.

M. de Blainville [4] considère cet appendice comme exclusivement propre au brochet, et il indique son insertion sur l'ampoule du canal horizontal postérieur, mais il ne le compare à aucune des parties de l'oreille des mammifères.

Tout ce que nous venons de rapporter relativement à cet appendice démontre que les zootomistes ne sont nullement d'accord sur sa situation rigoureuse et sur son insertion au labyrinthe membraneux; car ils font terminer son pédicule au sac, au sinus mé-

[1] *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1779.

[2] *Leçons d'anatomie comparée*, tom. 2, pag. 457.

[3] *Histoire naturelle des poissons*, édition in-8°, Paris, 1828, tom. I, pag. 468.

[4] *De l'organisation des animaux, etc.* Paris, 1822, tom. I, pag. 555.

dian, à l'ampoule d'un canal semi-circulaire, à ce canal semi-circulaire lui-même, ou simultanément sur des points différents de ces parties.

Ses analogies sont encore bien moins déterminées, et les opinions à cet égard sont tout aussi variées.

Nous dirons, pour porter plus de rigueur dans l'histoire de cet organe,

1° Que cet appendice n'appartient pas exclusivement au brochet, car nous démontrons dans ce mémoire qu'il en existe d'analogues sur l'oreille du grondin, du bar, de la baudroie, etc., mais avec quelques différences;

2° Qu'il ne peut être assimilé à un limaçon :

A, parce que sa situation en arrière est contraire à cette analogie, et qu'il n'y a aucune exception à cet égard : toujours la cochlée correspond à la partie antérieure du labyrinthe;

B, parce qu'il est dépourvu de nerfs, et que partout ou nous voyons un rudiment de limaçon, nous trouvons un cordon nerveux volumineux, destiné à cette cochlée plus ou moins imparfaite : c'est ce que nous remarquons dans les oiseaux et les reptiles;

C, parce que cet appendice ne contient que du liquide sans aucun *lapillus* (*otolithe*), et nous invoquerons encore ici l'exemple des oiseaux et des reptiles, où l'extrémité inférieure de la cochlée rudimentaire renferme une matière pulvérulente (*otoconie*);

D, parce qu'il communique avec le labyrinthe membraneux, et que jamais, soit dans les mammifères, soit dans les oiseaux ou les reptiles, il n'y a de voie de communication entre le limaçon et le sac, le sinus médian, ou les tubes demi-membraneux Une des rampes du limaçon est ouverte dans le vestibule osseux, et le liquide qu'il contient est de la *périlymphe* et non de l'*endolymphe*.

E. Enfin nous ne pouvons admettre l'existence d'un limaçon qu'avec la coïncidence d'un appareil vocal, et nous savons que les poissons en sont complétement dépourvus. Si quelques-uns de ces

animaux produisent un bruit ou un son particulier, comme par exemple la trigle guerneau, la trigle grondin, plusieurs cottes, comme le cotte grognant, des zées, des cobites, des balistes, etc, c'est par un mécanisme tout autre que celui d'un larynx [1]. Tous les reptiles dont l'oreille possède un simple rudiment de cochlée ont un appareil de phonation, et ils font parfois entendre un bruit assourdissant : c'est ce que disent plusieurs voyageurs naturalistes en parlant des crocodiles de l'ancien continent, et des caïmans qui habitent les immenses fleuves de l'Amérique; leur voix varie même, et elle diffère surtout à l'époque de leurs amours ou lorsqu'ils se livrent entre eux des combats. Quelle peut donc être l'analogie de cet appendice, et à quel organe pouvons-nous le comparer?

Dans beaucoup de reptiles pourvus d'un appareil vocal, il n'y a cependant pas de voix; mais c'est que ces animaux sont à une période de leur développement où l'organe de la respiration ressemble à celui des poissons, et ce n'est que plus tard qu'ils auront des poumons. Ainsi les larves des batraciens et certains reptiles, tels que le protée, l'axoloth, la sirène lacertine, etc., qui ne sont peut-être que des larves, sont dans le cas que nous venons d'indiquer. Ici l'organe de l'ouïe offre encore une disposition toute particulière : les branchies en panache appartenant à ces animaux sont situées dans la trompe gutturale et le tympan, et sortent par une ouverture que M. Huschke croit être le trou auditif externe. On a dit depuis longtemps que l'existence de la voix proprement dite est subordonnée à celle du larynx, et que celui-ci est lié à l'existence des poumons. Nous ajouterons, en thèse générale, que la pré-

[1] « Ce n'est qu'un frôlement que les cottes, les balistes, les cobites, les trigles, les « zées, etc., font naître. Ce n'est que lorsque saisis de crainte, ou agités par quelque autre « affection vive, ils se contractent avec force, resserrent subitement leurs cavités intérieures, « chassent avec violence les différents gaz renfermés dans ces cavités, que ces vapeurs, sor- « tant avec vitesse et s'échappant principalement par les ouvertures branchiales, en froissent « les opercules élastiques; et, par le frottement toujours peu soutenu, font naître des sons « dont le degré d'élévation est inappréciable, et qui par conséquent n'étant pas une voix, et « ne formant qu'un véritable bruit, sont même au-dessous du sifflement des reptiles. » Lacépède, *Discours sur la nature des poissons.*

sence d'un limaçon suppose toujours celle du larynx et des poumons.

Nous pensons que cet appendice postérieur de l'oreille du brochet doit être considéré comme un vestige de la communication bien connue aujourd'hui entre le labyrinthe membraneux des poissons et la vessie aérienne. La dissection de cet appendice, sa situation vers l'occipital, nous portent à établir cette analogie, que nous appuierons en disant que les *ésoces* sont précisément placés entre deux familles (les clupes et les cyprins) où nos dissections nous ont fait connaître cette communication [1], déjà signalée par M. E.-H. Weber; et, depuis lui des dispositions analogues ont été indiquées dans les mormyres qui sont, d'après le système zoologique de G. Cuvier, placés très-près des *ésoces*.

Nous aurions voulu pouvoir poursuivre cette analogie dans les bichirs, les lépisostrés, les vastres, les érythrins, les élopes, etc.; mais ces poissons sont étrangers aux mers qui baignent nos côtes, et nous n'avons pas eu jusqu'ici l'occasion de pouvoir vérifier cette disposition anatomique.

En considérant l'arrangement des deux branches résultant de la bifurcation du canal membraneux, que M. E.-H. Weber appelle *Sinus impar*, on voit que chacune d'elles ressemble à l'appendice dont nous parlons, et qu'elle s'insère précisément entre la terminaison des canaux demi-circulaires et la partie postérieure du *sinus médian;* c'est ce qu'on peut vérifier sur les cyprins, les loches, le *silurus glanis*, etc.

[1] Voyez notre premier mémoire présenté à l'académie des sciences, et sur lequel MM. G. Cuvier et C. Duméril ont fait un rapport.

CHAPITRE XX.

ORGANE AUDITIF DES CYPRINS.

Déjà M. E.-H. Weber[1] a prouvé par ses belles recherches que l'oreille de la *carpe* (*cyprinus carpio*) est une des plus curieuses parmi celles des poissons, en ce qu'il y a un appareil accessoire dans lequel on peut reconnaître tous les éléments d'une cavité tympanique. Cet appareil accessoire existe, comme on sait, en dehors du crâne et en arrière de l'occiput; il présente trois pièces osseuses (osselets) soudées entre elles, et dont la dernière adhère à la vessie natatoire, qui fait ici fonction de membrane du tympan[2]. Cette chaîne d'osselets est paire et renfermée dans un sac fibreux, qui vient s'ouvrir en communiquant avec le trou *e* (pl. XIII, fig. 1, 2), de manière que l'intérieur du crâne n'est pas séparé de la cavité du sac qui contient les osselets. Or, toute la capacité du crâne est remplie par l'encéphale et par un liquide oléagineux, lequel sac se continue, accompagné par le liquide, à travers le trou *e*, jusque dans le sac fibreux; d'où il résulte que l'organe de l'ouïe et la chaîne des osselets sont baignés par le même liquide, et que les vibrations perçues par l'une de ces parties doivent l'être en même temps par l'autre.

L'organe de l'ouïe est composé d'un sac à pierres (*g*, fig. 2, pl. XIII), d'un sinus utriculiforme (*h*), et de trois tubes semi-circulaires (*m*, *n*, *p*).

Le sac à pierres ou *saccule* est contenu dans une cavité particulière, laquelle est creusée dans la base du crâne *g*. Les *saccules* des

[1] *De aure et auditu hominis et animalium; pars 1ª.—De aure animalium aquatilium, etc.*, tab. III et IV., Ern. Henr. Weber. Lipsiæ, 1820.

[2] Cette chaîne osseuse a aussi été représentée par Bojanus. Voyez *Anatome Testudinis Europeæ*. Wilnæ, 1819, et, quoique ce dernier ouvrage soit d'une date antérieure à celui de M. E.-H. Weber, cependant la découverte de cette chaîne des osselets dans les poissons, appartient incontestablement à M. E.-H. Weber. Voyez, le parergon, p. 171, la fig. 191 (1, 2, 3, 4), de l'ouvrage de Bojanus.

deux côtés sont tellement rapprochés l'un de l'autre qu'ils se touchent presque, et qu'il n'y a qu'une lame cartilagineuse très-mince qui les sépare. Chaque *saccule* contient deux pierres ou *lapilli* (*otolithes*) : l'une de ces pierres est la plus grande, c'est la postérieure, et elle est représentée isolément dans la fig. 3, *a;* l'autre pierre est antérieure, elle est figurée en *b,* fig. 3. Ces deux pierres sont séparées par une cloison, laquelle divise le *Saccule* en deux loges inégales; elles nagent chacune dans un liquide clair, subgélatineux (*endolymphe*). Le *saccule* reçoit deux filets nerveux, dont chacun va s'épanouir vers une des pierres.

Par sa partie supérieure et antérieure le *saccule* communique avec le sinus médian (*h,* fig. 2, pl. XIII). Celui-ci se distingue par la brièveté de sa portion horizontale et par l'absence de tout prolongement postérieur. Il contient un *otolithe* qu'on a figuré isolément en *c,* fig. 3, pl. XIII; et près de cette petite concrétion il reçoit l'épanouissement d'un filet du nerf acoustique. A son extrémité antérieure il donne attache aux deux ampoules *i* et *k* (fig. 2, pl. XIII); postérieurement il reçoit l'insertion de l'extrémité non ampoulée du tube semi-circulaire postérieur, et donne attache à l'ampoule *l.* En haut il se prolonge vers *o,* pour recevoir les extrémités non ampoulées des tubes demi-circulaires (*m* et *n,* fig. 2, pl. XIII).

Chacune des trois ampoules *i, k, l,* reçoit un filet nerveux. Il n'y a que les tubes semi-circulaire externes et postérieur qui soient enchaînés, l'antérieur ne l'est point.

Dans la *carpe* la branche maxillaire inférieure du nerf trijumeau semble être double, parce que le nerf maxillaire supérieur fournit des filets à la partie inférieure comme à la partie supérieure du museau. Le véritable nerf maxillaire inférieur sort du crâne par un orifice séparé, un peu plus en arrière que le nerf maxillaire supérieur, et pénètre bientôt dans un canal osseux, qui parcourt les pièces de l'opercule et de la machoire inférieure, en se comportant par conséquent comme le nerf dentaire inférieur des animaux supérieurs. Ce nerf maxillaire fournit, à l'endroit où il sort du crâne, un filet de cinq à six lignes de long, qui se dirige obli-

quement en bas, en avant et en dehors, derrière le muscle correspondant au ptérygoïdien, et se réunit à angle très-aigu à la partie gutturale du nerf glosso-pharyngien, pour se continuer avec celui-ci. Dans la *carpe* il est facile de distinguer le nerf glosso-pharyngien du nerf vague, dont il semble faire partie au premier abord; le glosso-pharyngien est le rameau le plus antérieur, qui a ceci de particulier qu'il sort du crâne par un trou distinct, quoique ensuite il vienne se placer à côté du nerf vague; il se divise en deux branches, dont l'une va à la première arcade branchiale, et dont l'autre, plus forte, se divise de nouveau en plusieurs rameaux qui se distribuent au gosier, et dont on peut poursuivre quelques-uns jusqu'au tubercule rudimentaire de la langue.

Nous retrouvons donc ici le nerf maxillaire inférieur et le glosso-pharyngien bien caractérisés; nous retrouvons encore un filet nerveux qui, du premier de ces nerfs, passe au second, tout comme cela a lieu pour l'anastomose de Jacobson dans les animaux supérieurs : conséquemment nous sommes autorisés à considérer ce filet comme l'analogue de l'anastomose en question.

Nous bornons ici nos descriptions sur l'organe de l'audition dans les cyprins, parce que toutes nos recherches ne font que confirmer ce qu'a dit M. E.-H. Weber. Lorsque nous avons commencé notre travail, M. E.-H. Weber n'avait pas encore publié le sien; mais les recherches de ce savant sont si exactes et si bien faites, qu'il ne laisse rien à dire sur ce point après lui. Plus tard nous donnerons une nouvelle série de petites monographies de l'organe de l'audition chez les poissons, dans laquelle nous ferons connaître des dispositions qui n'ont pas encore été signalées par les anatomistes; puis, de tous ces matériaux, nous ferons une histoire générale de l'appareil de l'ouïe dans cette classe de vertébrés. Nous procéderons de la même manière pour les reptiles.

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE Ire.

LAMPROIE (*Petromyzon marinus*, *Petrom. maximus*, Cuv.)

Fig. 1. Vue d'en haut, le crâne ouvert.

a, orifice de l'évent.

b, cavité nasale, dans laquelle mène l'évent.

c, orifice du prolongement de l'évent, au-dessous du crâne.

d, moelle épinière.

e, *calamus scriptorius*, non recouvert par le cervelet.

f, *f*, bulbe rachidien.

g, tubercules quadrijumeaux.

h, cerveau proprement dit.

i, *i*, lobes olfactifs, terminés antérieurement par les nerfs olfactifs.

k, *k*, nerfs optiques.

l, nerf auditif du côté gauche, se rendant dans le bulbe auditif qui est à découvert.

m, saillie cartilagineuse renfermant le bulbe auditif du côté droit; sur la face interne de cette saillie, on voit un petit orifice qui est le représentant de l'aqueduc du vestibule; au bas de ce petit pertuis on aperçoit la moitié d'un orifice plus grand, destiné à livrer passage au nerf auditif.

n, *n*, bords cartilagineux de la boîte crânienne.

o, *o*, premières branchies.

Fig. 2. Le cerveau et les organes auditifs, comme la fig. 1re, mais grossis.

a, *a*, lobes olfactifs avec les nerfs du même nom.

b, différentes saillies cérébrales.

c,c, tubercules quadrijumeaux.

d,d, bulbe rachidien.

e, *calamus scriptorius*.

f,f, nerfs auditifs.

g, bulbe auditif mis à découvert.

h, aqueduc du vestibule.

Fig. 3. La face interne de la saillie auditive.

a, orifice criblé, par lequel passent les filaments du nerf auditif.

b, aqueduc du vestibule (le tout grossi).

Fig. 4. La base du crâne, le cerveau étant enlevé; la saillie auditive gauche est ouverte, celle du côté droit est fermée (grandeur naturelle).

Fig. 5. La cavité qui dépend de l'évent; la base du crâne est enlevée pour faire voir cette cavité dans toute son étendue.

a,a, saillies auditives.

b,b, restes de l'excavation nasale.

c, partie de l'orifice au moyen duquel l'évent communique avec son arrière-cavité.

Fig. 6. Bulbe auditif grossi, au travers duquel on voit du gravier ou *otoconie* disposé en double demi-lune.

a, insertion du nerf auditif.

Fig. 7. Partie du bulbe auditif grossi, ouvert et vu en dedans; on aperçoit aussi le gravier ou *otoconie*.

a, nerf auditif.

Fig. 8. Encéphale sorti du crâne et vu par sa face inférieure; on y voit des points de substance pigmenteuse disséminés.

a,a, nerfs olfactifs.

b,b, nerfs optiques.

c, glande pituitaire.

d, d, nerfs oculo-moteurs.

e, e, nerfs vagues.

f, f, nerfs acoustiques.

ESTURGEON (*Acipenser sturio*, L.).

Fig. 9. Organe auditif du côté gauche, vu par son côté interne.

a, base du crâne (coupée par le milieu).

b, partie antérieure.

c, trou par lequel le nerf de la cinquième paire sort du crâne.

d, d, canal semi-circulaire antérieur.

e, e, canal semi-circulaire postérieur.

f, f, canal semi-circulaire externe.

g, *sinus utriculosus* de Weber ou *sinus médian*.

h, h, sac, au travers duquel on aperçoit le grand *otolithe*.

i, petite pièce osseuse (rudiment d'étrier) ayant sa grosse extrémité appliquée contre le sac et son pédicule adhérent à la base du crâne.

k, nerf auditif.

l, branche antérieure se rendant aux deux ampoules antérieures.

m, branche postérieure se rendant au sac et à l'ampoule postérieure.

n, nerf représentant la portion dure de la septième paire, sortant du crâne et n'ayant aucun rapport avec l'organe auditif, quoiqu'il soit appliqué contre le sac.

Fig. 10. Petit et grand *otolithes*, grandeur naturelle.

Fig. 11. Osselet représentant l'étrier; grandeur naturelle, *a*; grossi, *b*.

PLANCHE II.

ESTURGEON (*Acipenser sturio*, L.).

Cavité crânienne ouverte; encéphale vu d'en haut.

a, cerveau proprement dit, surmonté d'une espèce de crête membraneuse.

b, lobes représentant les tubercules quadrijumeaux.

c, cervelet, organe large et triangulaire.

d, moelle épinière.

e,e, nerfs olfactifs.

f,f, membranes olfactives.

g,g, narines.

h,h, nerfs optiques.

i,i, nerfs oculo-moteurs.

k,k, nerfs pathétiques.

l,l, nerfs de la cinquième paire, ou nerfs trijumeaux.

m,m, nerfs acoustiques.

n,n, nerf représentant ici la portion dure de la septième paire.

o,o, nerfs vagues ou pneumo-gastriques.

p,p, canaux demi-circulaires antérieurs.

q,q, canaux demi-circulaires postérieurs.

r,r, parties supérieures des bulbes auditifs.

PLANCHE III.

ORGANE AUDITIF DU GRAND ESTURGEON (*Acipenser huso*, L.), VU DU CÔTÉ GAUCHE.

Les lettres qui sont les mêmes sur les deux figures expriment les mêmes parties.

a,a,a, base du crâne coupée longitudinalement.

b,b,b, voûte du crâne coupée dans le même sens.

c, partie postérieure.

d, partie antérieure.

e,e,e, cavité crânienne.

f, trou par lequel passe le nerf vague.

g, trou par où passe une portion du nerf de la cinquième paire.

h, nerf représentant la portion dure de la septième paire.

i, nerf auditif.

k, l, m, n, o, p, q, expansion ligamenteuse destinée à fixer l'organe auditif qui se trouve derrière.

r, r, sacculus ou sac formant le vestibule membraneux.

ζ, ζ, sinus median ou *sinus utriculosus* de Weber, c'est le point de réunion des six extrémités *s, t, u, v, χ, φ*, des canaux demi-circulaires.

ψ, ampoule du canal antérieur, qui va se terminer en *v*.

χ, ampoule du canal externe, qui se termine en *t*.

φ, renflement ampulliforme, duquel partent les deux ampoules antérieures.

ω, ampoule du canal postérieur, qui se termine en *u*.

i'. rameau postérieur du nerf auditif, fournissant *δ* le filet qui va à l'ampoule postérieure, et plusieurs filets *ε, ε, ε, ε*, qui vont au *sacculus*.

i'', rameau antérieur du nerf auditif, fournissant des filets *a, a*, au renflement ampulliforme, un filet *χ* à l'ampoule du canal externe, et un filet *θ* à l'ampoule du canal antérieur.

La fig. 1 représente l'organe auditif recouvert de son ligament.

La fig. 2 représente le même organe à nu ou dépouillé de son ligament.

PLANCHE IV.

ALOSE (*Clupea alosa*, L.).

Fig. 1. Alose vue de côté, l'opercule droit relevé et les branchies emportées, à l'exception d'un petit reste.

a, mâchoire supérieure.

b, opercule droit, vu par la face interne et dépouillé de la membrane qui le tapissait.

c, opercule gauche recouvert encore de sa membrane.

d, muscle adducteur de l'opercule.

c, fenêtre vestibulaire.

f, faisceau du nerf vague.

g, vomer.

h, vessie natatoire.

i, point où cette vessie se bifurque, pour se continuer par deux petits canaux, dont l'un *k* est à droite, l'autre *l* est à gauche, et pour pénétrer dans la substance osseuse du crâne entre le nerf vague et la fenêtre vestibulaire.

m,*m*, reste des arcs branchiaux.

n, entrée de l'œsophage.

o, œsophage.

p, estomac.

q, commencement de l'intestin, qui est coupé.

r, rectum.

s, anus.

t, prolongement appendiciforme de l'œsophage, se terminant par un petit canal dans la vessie natatoire.

u, cœur.

v,*v*, substance du foie, qui est situé immédiatement au-dessous de la colonne vertébrale.

Fig. 2. La tête de l'alose vue en-dessous, les opercules écartés et les branchies enlevées.

a, museau.

b, colonne vertébrale.

c,*c*, les opercules vus par leur face interne.

d,*d*, rudiments des branchies fixés à l'opercule.

e, muscle adducteur de l'opercule, mis à découvert par l'enlèvement d'une portion de la membrane qui revêt la face interne de l'opercule, que cette même membrane recouvre aussi.

f, la fenêtre vestibulaire, trou plus ou moins arrondi, fermé par une membranule transparente, à laquelle aboutit au dedans le

vestibule membraneux. Immédiatement derrière cette fenêtre se trouve :

g, g, le faisceau des nerfs vagues.

h, le petit canal qui, de la vessie natatoire, s'étend jusqu'à l'organe auditif.

i, le vomer.

Fig. 3. Squelette de la tête de l'alose vue renversée.

a, colonne vertébrale.

b, vomer

c, c, petits canaux (*trompes cystiques*) qui mettent la vessie natatoire en rapport avec l'organe auditif. On voit le canal du côté droit s'engager dans la substance osseuse, tandis que celui du côté gauche, qui est disséqué et découvert dans toute sa longueur, permet d'apercevoir sa continuité avec le globe osseux.

d, endroit où la partie cartilagineuse de la *trompe cystique* se continue avec la partie osseuse.

e, globe osseux postérieur dans l'intérieur du cercle qui circonscrit le canal demi-circulaire externe.

f, f, globes osseux antérieurs.

g, g, orifices par lesquels passent les nerfs vagues.

h, h, fenêtres vestibulaires.

i, i, orifices par lesquels passent les nerfs de la 5^{e} paire.

Fig. 4. Organe auditif de l'*alose* vu d'en haut; la voûte du crâne et l'encéphale sont enlevés; la partie osseuse dans laquelle les canaux demi-circulaires sont engagés est également enlevée, de sorte que ceux-ci se tiennent librement.

a, colonne vertébrale.

b, fosse pituitaire.

c, orifice par lequel passent les nerf optiques.

d, d, orifices par lesquels passent les nerfs de la 5^{e} paire.

e, e, globes osseux antérieurs.

f, *f*, globes osseux postérieurs : tous les deux ouverts ; dans celui du côté gauche la membrane interne est enlevée, dans celui du côté droit cette membrane existe encore.

g, canal demi-circulaire externe : on voit qu'il touche le globe osseux postérieur.

h, canal demi-circulaire antérieur.

i, canal demi-circulaire postérieur.

k, organe accessoire, correspondant probablement au limaçon.

l, partie postérieure du sac ou *sacculus*, qui est enfoncé dans la base du crâne.

m, commissure auditive supérieure.

n, commissure auditive inférieure.

o, nerf auditif antérieur ; on le voit s'enfoncer dans le vestibule membraneux ; puis à travers ce vestibule on le voit se diviser en plusieurs filets, dont les deux antérieurs constituent un cercle nerveux autour de l'*otolithe* ou *lapillus* antérieur ; deux autres de ces filets nerveux vont aux deux ampoules antérieures, et un dernier filet se rend à l'organe représentant le limaçon.

p, nerf auditif postérieur, se rendant à l'ampoule postérieure et au *sacculus*.

Fig. 5. Crâne de l'alose ouvert : l'encéphale et les organes auditifs sont enlevés.

a, colonne vertébrale.

b, orifice par lequel passe le nerf optique.

c, *c*, orifices des nerfs de la 5e paire.

d, *d*, globes osseux antérieurs : on voit sur chacun d'eux un orifice étroit, allongé transversalement, lequel est la fenêtre antérieure.

e, globe osseux postérieur du côté droit. La partie osseuse de l'oreille de ce côté est disséquée jusqu'au niveau de ce globe.

f, conduit dans lequel est logé le canal demi-circulaire externe.

g, portion du conduit dans lequel est logé le canal demi-circulaire postérieur.

h, large conduit au fond duquel est logé le bulbe accessoire ou *limaçon*; ce conduit est ouvert.

i, *i*, fenêtre postérieure; celle du côté droit a été mise plus à découvert que celle du côté opposé, par l'enlèvement d'une lamelle osseuse de la base du crâne.

k, portion du canal demi-circulaire antérieur du côté droit.

l, portion du canal demi-circulaire postérieur du côté droit.

m, partie externe du conduit *h*.

n, partie interne du même conduit.

Fig. 6. tête d'alose vue de côté.

a, *a*, *a*, conduits excréteurs mucifères avec leurs ramifications sur l'opercule. Ces canaux se rendent dans un sac ou réservoir *b*.

c et *d*, sont deux autres points par lesquels des conduits semblables viennent se rendre dans le même réservoir. — Le sac *b* ou réservoir, occupe la partie externe du conduit *h* de la figure 5.

Fig. 7. Grand *otolithe* contenu dans le sac.

Fig. 7'. Le même *otolithe* grossi.

Fig. 8. Petits *otolithes* antérieur et postérieur de grandeur naturelle.

Fig. 8'. Les mêmes *otolithes* grossis.

PLANCHE V.

ORGANE AUDITIF DU MILANDRE (*Squalus galeus*, L.).

Fig. 1re. Les parties représentées sont vues d'en haut.

a, membrane olfactive.

b, *b*, nerfs olfactifs.

c, globe de l'œil.

d, d, nerfs optiques.

e, e, e, e, muscles de l'œil.

f, f, nerfs oculo-moteurs.

g, g, nerfs pathétiques.

h, h, nerfs de la cinquième paire.

i, i, nerfs auditifs.

k, k, bulbes auditifs.

l, l, l, canaux demi-circulaires.

m, m, m, nerfs de la septième paire.

n, n, nerfs vagues pneumo-gastriques.

o, o, canal de communication entre le vestibule et l'extérieur.

p, p, lobes olfactifs.

q, q, tubercules quadri-jumeaux.

r, cervelet.

s, s, éminences olivaires.

t, t, corps restiformes.

u, calamus scriptorius.

v, moelle rachidienne.

Fig. 2. Oreille droite vue du côté interne.

a, a, a, bulbe auditif.

b, canal demi-circulaire antérieur.

c, c, canal demi-circulaire postérieur.

d, d, canal demi-circulaire externe.

e, e, e, les trois ampoules.

f, canal de communication avec l'extérieur, se divisant en deux.

g, première sous-division de ce canal, établissant une communication avec l'intérieur du bulbe auditif. On a représenté une soie qui y est engagée.

h, deuxième sous-division du même canal, établissant une communication avec le canal demi-circulaire postérieur.

i, *i*, *i*, faisceaux des nerfs auditifs.

ORGANE AUDITIF DU MAQUEREAU (*Scomber scombrus*, L.).

Fig. 3. La tête coupée longitudinalement par le milieu ; le côté gauche de l'organe auditif est vu par sa face interne.

a, colonne vertébrale.

b, base du crâne.

c, orifice destiné au nerf de la cinquième paire.

d, orifice du nerf vague.

e, canal demi-circulaire antérieur.

f, ampoule du même canal.

g, ampoule du canal demi-circulaire externe.

h, canal demi-circulaire postérieur.

i, ampoule du même canal.

k, *sinus utriculosus* ou *sinus médian*.

l, sac ou *sacculus* logé dans un enfoncement de la base du crâne.

m, nerf auditif antérieur fournissant des filets au *sacculus* et aux deux ampoules antérieures.

n, nerf auditif postérieur fournissant des filets au *sacculus* et aux deux ampoules postérieures.

Fig. 4. Le grand et le petit *lapilli* (*otolithes*), grandeur naturelle.

Fig. 5. Les mêmes objets grossis.

PLANCHE VI.

ORGANE AUDITIF DU CONGRE (*Muræna conger*, L.).

Fig. 1. Oreille droite, vue par sa face interne.

A, extrémité antérieure.

B, commencement de la colonne vertébrale.

C, partie supérieure.

a, bulbe auditif ou vestibule membraneux; on voit l'*otolithe* à travers la membrane.

b, sinus médian, communiquant d'une part avec le vestibule membraneux, et de l'autre part avec les deux canaux demi-circulaires antérieur et postérieur.

c, ampoule du canal demi-circulaire externe *d, d.*

e, ampoule du canal demi-circulaire antérieur *f.*

g, ampoule du canal demi-circulaire postérieur *h.*

i, k, l, l, représentent les différents rameaux nerveux de l'organe auditif. Les rameaux *i* et *k* se distribuent aux ampoules; du rameau *k* se détache le filet *m*, qui va au dehors de la cavité crânienne, et qui correspond à la portion dure de la septième paire. Les rameaux *l, l* se distribuent au *sacculus*.

Fig. 2. L'encéphale du même poisson, vu par son côté gauche.

a, a, lobes olfactifs.

b, nerf olfactif.

c, c, éminences antérieures des tubercules quadri-jumeaux.

d, nerf optique croisant le nerf optique du côté opposé, représenté par *e*.

f, éminences postérieures des tubercules quadrijumeaux.

g, cervelet.

h, nerf de la quatrième paire.

i, nerf de la cinquième paire.

k, k, les deux origines des nerfs acoustiques.

l, moelle rachidienne.

Fig. 3. ORGANE AUDITIF DE LA BAUDROIE (*Lophius piscatorius*, L.). Cette figure représente la moitié gauche du crâne vue par la face interne.

a, extrémité postérieure.

b, extrémité antérieure.

c,c,c, base du crâne.

d,d,d, boucles du dessus de la tête.

e, trou par lequel sort le nerf optique.

f, nerf de la cinquième paire.

g, nerf glosso-pharyngien.

h, trou destiné à la sortie du nerf vague ou pneumogastrique.

i, sinus utriculeux on sinus médian.

k, sacculus ayant un appendice à sa partie postérieure; le *sacculus* et l'appendice renferment chacun un *lapillus* solide, visible à travers les parois membraneuses.

l, canal demi-circulaire postérieur.

m, canal demi-circulaire externe.

n, canal demi-circulaire antérieur.

o, lapillus contenu dans l'extrémité antérieure du sinus utriculeux, ou sinus médian, et visible à travers les parois de ce sinus.

p... v, ensemble du nerf auditif; les filets sont ici légèrement écartés pour qu'on puisse les distinguer mieux.

p, filet de l'ampoule du canal demi-circulaire antérieur.

q, petit faisceau nerveux aboutissant au *lapillus* du sinus utriculeux ou sinus médian.

r, filet de l'ampoule du canal demi-circulaire externe.

s, faisceau aboutissant au grand *otolithe.*

t, filet de l'appendice du *sacculus.*

u, filet sortant du crâne au dehors de l'organe auditif.

v, filet de l'ampoule postérieure.

Fig. 4. Les trois *lapilli* ou *otolithes* de grandeur naturelle.

a, lapillus contenu dans l'appendice du sac.

b, lapillus contenu dans le sac même.

c, lapillus contenu dans l'extrémité antérieure *o* du sinus médian.

PLANCHE VII.

ORGANE AUDITIF DU TURBOT (*Pleuronectes maximus*, L.).

Fig. 1. Cette figure représente la moitié droite de la tête, vue par la face interne et dépouillée des parties charnues.

a, extrémité antérieure.

b, base du crâne.

c, nerf de la cinquième paire.

d, *sac* logé dans un enfoncement particulier de la base du crâne, et contenant deux *otolithes* qu'on aperçoit à travers les parois membraneuses.

e, sinus utriculeux ou médian.

f, ampoule antérieure.

g, ampoule externe.

h, ampoule postérieure.

i, canal demi-circulaire antérieur.

k, canal demi-circulaire posterieur.

l, *m*, canal demi-circulaire externe.

n, tronc du nerf acoustique fournissant, 1° un filet à chacune des ampoules; un pinceau à l'extrémité antérieure et renflée du sinus médian; 3° un filet *o* qui sort du crâne; 4° un grand pinceau au *sacculus;* 5° un filet isolé à la partie postérieure du *sacculus*.

Fig. 1.*a*. Les trois *lapilli* ou *otolithes* de grandeur naturelle, contenus dans cette oreille.

a, *lapillus* contenu dans le bout antérieur du sinus médian ou utriculeux.

b et *c*, les deux *lapilli* qui sont contenus dans le *sac*.

Fig. 2. ORGANE AUDITIF DU SAUMON (*Salmo salar*, L.). Moitié gauche de la tête vue par la face interne.

a, canal rachidien.

b, nerf de la cinquième paire.

c, *sacculus*, à travers les parois duquel on aperçoit deux concrétions pierreuses (*otolithes.*)

d, sinus médian, donnant attache antérieurement aux deux ampoules *e*, *f*. Postérieurement à l'ampoule *g* et à l'extrémité non ampoulée du canal demi-circulaire externe (*h*). Au-dessous des ampoules *e* et *f*, on voit une troisième concrétion pierreuse ou *otolithe*. Le sinus médian se continue inférieurement avec le *sacculus*, et supérieurement il se prolonge vers *i* et *k*, les extrémités non ampoulées des canaux demi-circulaires antérieur et postérieur.

e,*k* canal demi-circulaire antérieur.

g,*i* canal demi-circulaire postérieur.

f,*h* canal demi-circulaire externe.

Chacun de ces trois canaux est enchaîné ou retenu dans un conduit ostéo-cartilagineux.

Fig. 2.*a*. Cette figure représente de grandeur naturelle les trois *lapilli* ou *otolithes*.

a, petit *otolithe* du *sacculus*.

b, grand *otolithe* de la même poche.

c, *otolithe* qui se trouve en dessous des deux ampoules *e* et *f*.

Fig. 2.*b*. Cette figure donne l'oreille isolée et grossie, avec les nerfs : elle est prise du même point de vue que dans la figure 2, et les lettres ont la même signification.

Fig. 2.*c*. Cette figure représente isolément les nerfs qu'on voit en place dans la figure précédente.

a, filet de l'ampoule du canal *e k*.

b, pinceau de filaments qui pénètrent dans l'extrémité antérieure du sinus médian, au-dessous du *lapillus* qui est à cet endroit.

c, filet de l'ampoule *f*.

d, pinceau nerveux du *sacculus*.

e, petit pinceau nerveux qui se rend à la partie postérieure du *sacculus*, près du petit *otolithe*.

f, filet de l'ampoule *g*.

Fig. 3. ORGANE AUDITIF DE L'ANGUILLE (*Muræna anguilla*, L.). Cette figure représente la moitié gauche du crâne, vue par sa partie interne.

a, le museau.

b, la partie postérieure du crâne.

c, voûte de la cavité crânienne.

d, base de la même cavité.

e, vestibule membraneux.

f, canal demi-circulaire antérieur.

g, canal demi-circulaire postérieur.

h, sinus médian ou utriculeux.

i, canal demi-circulaire externe.

PLANCHE VIII.

ORGANE AUDITIF DU GRONDIN (*Trigla gurnardus*, L.).

Fig. 1. Cette figure représente la moitié droite du crâne, vue par la face interne.

a, le museau.

b, le condyle de l'occipital.

c, la base de la cavité du crâne.

d, la voûte de la même cavité.

e, vestibule membraneux.

f, appendice du vestibule membraneux.

g, sinus utriculeux.

h, canal demi-circulaire antérieur.

i, canal demi-circulaire externe.

k, canal demi-circulaire postérieur.

l, nerf auditif antérieur.

m, nerf auditif postérieur.

Fig. 2. ORGANE AUDITIF DE LA GRANDE ROUSSETTE (*Squalus canicula*, L.). Oreille gauche vue par sa partie interne.

A, partie antérieure de la tête.

B, partie postérieure de la tête.

a, canal demi-circulaire antérieur.

b, canal demi-circulaire postérieur.

c, *c*, canal demi-circulaire externe.

d, sac ou *sacculus* de Weber.

E, sinus médian ou sinus utriculeux.

f, nerf acoustique qui envoie une branche à chaque ampoule, au *sacculus* et au sinus médian.

G, nerf optique.

Fig. 3. ORGANE AUDITIF DU PTÉROIS (*Pteroïs volitans*, Cuv. — *Scorpæna volitans*?). L'oreille gauche vue par sa face interne, sans qu'on ait rien enlevé.

A, partie antérieure de la tête (mâchoire inférieure).

B, partie postérieure de la tête.

C, canal demi-circulaire antérieur.

D, *D*, canal demi-circulaire postérieur.

E, ampoule du canal demi-circulaire externe.

F, canal commun.

g, sinus médian.

H, *sacculus*.

I, cavité au fond de laquelle se trouve un conduit qui logeait probablement un petit canal (*Sinus auditorius impar*, Weber)

qui fait communiquer l'oreille avec la vessie natatoire (toutes ces parties molles étaient très-altérées par l'alcool).

Fig. 3 *a*. *Lapillus* très-mince, creusé en forme de cuiller, dont la face convexe regarde en dedans.

Fig. 3 *b*.

a, le sac.

b, le sinus médian et le canal de communication avec le sac.

c, canal demi-circulaire antérieur.

d, canal demi-circulaire postérieur.

e, canal demi-circulaire externe.

f, tube commun.

g, ampoule du canal demi-circulaire postérieur.

h, ampoule du canal demi-circulaire antérieur.

i, ampoule du canal demi-circulaire externe.

k, vestiges d'un canal qu'on croit communiquer avec la vessie aérienne.

PLANCHE IX.

RAIE.

Vue d'en haut (moitié grandeur naturelle).

a, *a*, yeux.

b, *b*, ouies.

c, museau.

d, petit orifice s'ouvrant en haut de la tête, et constituant la communication du canal ascendant avec l'extérieur.

e, le même orifice du côté opposé, vu dans sa continuation avec le canal ascendant.

f, ce même canal ascendant se portant d'abord en dedans, puis en avant et en bas, renflé dans son milieu et se jetant au point *g* dans le sinus médian.

h, le canal ascendant.

i, canal demi-circulaire postérieur.

k, canal demi-circulaire externe.

l, canal demi-circulaire antérieur.

PLANCHE X.

ORGANE AUDITIF DE LA RAIE BOUCLÉE. (*Raia clavata*, L.).

Fig. 1. Moitié droite de la tête, vue par la face interne.

a, a, a, base du crâne, coupée.

b, b, dessus de la tête.

c, œil, dont on n'aperçoit que le rebord supérieur.

d, extrémité antérieure.

e, nerf olfactif.

f, nerf optique.

g, nerf pathétique.

h, nerf oculo-moteur.

i, nerfs de la cinquième paire, unis en un seul faisceau avec les nerfs acoustiques.

k, endroit correspondant au trou occipital.

l, l, sacculus.

m, appendice antérieur (*utricule*).

n, appendice postérieur du *sacculus* (*cysticule*).

o, ampoule du canal demi-circulaire antérieur.

p, ampoule du canal demi-circulaire externe.

q, ampoule du canal demi-circulaire postérieur.

r, r, canal demi-circulaire postérieur.

s, s, canal demi-circulaire antérieur.

t, t, canal demi-circulaire externe.

u, canal de communication du *sacculus* avec le dehors; ici ce

canal est coupé en *u;* dans la figure 2, il est représenté dans son entier.

v, endroit par où le *sacculus* adhère à la paroi du crâne.

x, nerf de l'ampoule *o*.

y, pinceau nerveux destiné à la portion *m* du *sacculus* (*utricule*).

z, nerf de l'ampoule *p;* τ, pinceau nerveux destiné au *sacculus*.

τ, pinceau nerveux destiné au *sacculus*.

φ, filet gagnant le dessus du *sacculus*.

χ, nerf de l'ampoule *q*.

ψ, nerf de la portion *n* du *sacculus* (*cysticule*).

ω, nerf sortant du crâne.

Fig. 2. Labyrinthe membraneux d'une raie, côté gauche, quadruple de la grandeur naturelle.

Cette figure, représentant les objets dans des proportions quatre fois plus grandes que dans l'état naturel, a été donnée pour faire bien distinctement connaître toutes les parties; pour montrer les différentes branches nerveuses et les noms qu'elles ont reçus de nous, enfin pour montrer la disposition, la structure et les annexes du *canal ascendant*, sur l'existence duquel il a pendant longtemps existé des doutes.

Nous renvoyons aussi au texte pour tout ce qui est relatif à l'histoire et à la description des parties qui sont représentées grossies sur cette planche X.

Le nom de chaque partie se trouve inscrit sur les divers points de cette figure.

Fig. 3. Cette figure représente les trois amas de poudre calcaire (*otoconies*) qu'on rencontre dans le *sacculus* et ses appendices. Ces amas sont mous, et les figures que nous donnons ici ne servent qu'à indiquer le volume approximatif de ces masses qui vues au microscope paraissent formées par de petits cristaux.

a, amas contenu dans la partie *m* de la figure précédente;

b, amas contenu dans le sacculus *l, l*.

c, amas contenu dans le petit appendice *n*.

La couleur jaune indique la cavité auditive, distincte de celle du crâne, et remplie par l'humeur de Cotugno.

La couleur rouge indique la cavité crânienne, qui, dans ce poisson, n'a aucune communication avec la cavité auditive.

PLANCHE XI.

ORGANE AUDITIF DE LA RAIE (*Raia batis*, L.).

Fig. 1.

a, *a*, membrane olfactive.

b, *b*, ganglions olfactifs.

c, cerveau.

d, *d*, tubercules bi-jumeaux.

e, cervelet.

f, *f*, corps olivaires.

g, *calamus scriptorius*.

h, *h*, globes oculaires.

i, *i*, nerfs optiques.

k, canal demi-circulaire externe.

l, canal demi-circulaire postérieur.

m, canal demi-circulaire antérieur.

n, nerf auditif du côté droit.

o, *o*, labyrinthe cartilagineux, d'où l'on a retiré les parties molles, ou labyrinthe membraneux.

Fig. 2. Oreille droite de la raie ronce (*raia batis*, L.), vue par sa face externe.

a, partie antérieure.

b, partie postérieure.

c, c, c, c, c, substance cartilagineuse au milieu de laquelle se trouve l'organe auditif.

d, ouverture donnant passage à un faisceau nerveux.

e, e, e, e, lambeau de peau.

f, f, sinus médian et sacculus.

g, fenêtre ovalaire ou vestibulaire.

h, i, k, canaux demi-circulaires.

l, m, ampoules de deux de ces canaux.

n, réunion de deux extrémités des canaux demi-circulaires où il n'y a pas d'ampoule.

o, muscle du canal ascendant.

p, canal ascendant sortant de la poche ou utricule médian et mis à nu dans presque toute son étendue, jusqu'à son orifice cutané, décrivant plusieurs inflexions, contracté en *o* et embrassé par le petit muscle constricteur.

Fig. 3. Labyrinthe cartilagineux isolé, de la raie ronce (*raia rubus*, L.), avec la partie sous-cutanée du tube ascendant et muscle propre à ce même canal.

Ce labyrinthe est vu par sa face externe.

a, a, lambeau de peau.

b, canal demi-circulaire antérieur.

c, canal demi-circulaire externe.

d, canal demi-circulaire postérieur.

e, e, parois du vestibule.

f, fenêtre ovalaire.

g, muscle du canal ascendant.

h, h, canal ascendant.

i, orifice extérieur de ce même canal.

PLANCHE XII.

ORGANE AUDITIF DE LA RAIE BATIS, RAIE BLANCHE? etc. (*Raia batis*, L.)

Fig. 1. Cavité *tympanique* de la raie blanche (*raia batis*), vue par sa partie antérieure.

a, partie antérieure.

b, partie postérieure.

c, *c*, les yeux.

d, *d*, lambeau de peau rejeté en arrière.

e, *e*, intérieur de la cavité, qui est tapissé par une membrane *séreuse*, remplie par une humeur gélatineuse contenue dans une membrane hyaloïde.

f, *f*, fenêtres ovales qui s'ouvrent dans la cavité labyrinthique, et qui sont bouchées par une membrane qu'on a enlevée du côté gauche. La fenêtre devient ici plus apparente par l'absence de la membrane qui la fermait.

g, *g*, muscle qui s'insère d'une part sur le crâne, en avant et en dehors de la fenêtre ovale, et d'autre part aux parois fibreuses du

h, *h*, tube ascendant lequel fait un cercle entier autour du muscle.

i, *i*, endroit par où le canal sort du crâne.

k, *k*, à ce niveau le canal ascendant s'ouvre au dehors par un orifice assez rétréci. A droite, on a indiqué par des flèches le trajet que parcourt le tube ascendant dans l'intérieur. Vers son orifice extérieur ce tube se rétrécit considérablement, et ses parois deviennent beaucoup plus épaisses, plus denses; est-ce parce qu'il traverse la peau, ou serait-ce un rudiment de conduit auditif?

Fig. 2. La même cavité, vue par sa face postérieure.

a, *b*, *c*, *c*, *d*, *d*, *e*, *e*, comme pour la figure 1.

f, f, coupe de la cloison fibreuse qui sépare postérieurement l'excavation sous-cutanée.

g, endroit par où les deux parties de cette cavité communiquent.

h, h, couches musculaires sur lesquelles s'étend encore la cavité.

i, i, fenêtres ovales; *k, k,* canaux ascendants sortant du crâne par *l, l,* et communiquant avec l'extérieur par *m, m.*

n, n, muscle s'insérant d'une part sur *o, o,* petite éminence située en-dehors et au-devant de la fenêtre ovale.

p, p, insertion du muscle sur les parois du tube ascendant.

Fig. 3. L'oreille gauche de la raie noire, vue par sa face interne.

a, lambeau de peau.

b, b, b, b, b, coupes des parois cartilagineuses du labyrinthe.

c, c, c, sacculus.

d, son appendice antérieur.

e, son appendice postérieur.

f, tube demi-circulaire antérieur.

g, ampoule antérieure.

h, tube demi-circulaire externe.

i, ampoule externe.

k, tube demi-circulaire postérieur.

l, ampoule postérieure.

m, nerf de la cinquième paire, qui marche quelque temps de concert avec le nerf acoustique.

n, nerf acoustique.

o, nerf de la huitième paire.

p, endroit par où le sacculus adhère aux parois du crâne.

q, fenêtre ovale.

r, muscle du tube ascendant.

s, s, tube ascendant qui, dans l'intérieur du labyrinthe, passe au devant de *t,* canal commun, et semble communiquer librement

par *u*, avec le sinus médian et le sacculus, qui constituent la cavité du vestibule.

v, orifice extérieur du tube ascendant : ce tube est représenté ouvert, et formant les trois quarts d'un cercle autour du muscle; à une ligne et demie de son orifice extérieur on voit qu'il se resserre considérablement; c'est là que ses parois deviennent comme fibro-cartilagineuses, ce qui fait que le tube ascendant reste toujours béant vers son orifice libre.

Fig. 4. Les mêmes parties de l'oreille de la raie bouclée (*raia clavata*, L.).

a, *l*, les mêmes parties que ci-dessus.

m, canal commun.

n, nerf acoustique.

o, fenêtre ovale.

p, muscle constricteur du tube ascendant.

q, tube ascendant, ouvert, décrivant un cercle presque entier autour du muscle; il se rétrécit aussi vers son extrémité libre, et ses parois deviennent fibro-cartilagineuses.

r, orifice extérieur du tube ascendant.

OREILLE DE LA CHIMÈRE ANTARCTIQUE (*Chimæra callorynchus*, L.).

Fig. 5. Cette figure représente le labyrinthe du côté gauche, isolé. Toutes les parties du labyrinthe membraneux qui sont ici à découvert, communiquent librement avec la cavité crânienne.

a, lambeau de peau du crâne.

b, espèce de ligament fibro-cartilagineux, qui est le rudiment de cette cloison cartilagineuse qui, dans d'autres chondroptérigiens, sépare entièrement la cavité du labyrinthe de celle du crâne.

c, conduit ou tube ascendant qui fait communiquer la cavité du labyrinthe avec l'extérieur, et qui se continue au-devant du *canal commun*, jusqu'au *sinus médian*.

d d, canal demi-circulaire antérieur.

e, canal demi-circulaire postérieur.

f, *f*, canal demi-circulaire externe.

g, canal commun.

h, sinus médian.

i, nerf acoustique.

Fig. 6. Cette figure représente les mêmes parties. Le labyrinthe cartilagineux a été ouvert pour faire voir le labyrinthe membraneux à nu; et l'espace qui le sépare de ses parois cartilagineuses est rempli par la périlymphe.

Fig. 7. Le labyrinthe cartilagineux, vu par sa face externe. On aperçoit ici la direction des canaux demi-circulaires et la forme du vestibule cartilagineux en dehors et vers son côté externe.

A A, partie qui correspond au *canal commun* et au canal ascendant qui fait communiquer l'oreille interne avec l'extérieur.

B, renflement qui correspond au vestibule et qui contient le *sacculus*, à la partie antérieure et externe duquel on aperçoit une petite gibbosité correspondant au *cysticule*.

C, *D*, *E*, canaux demi-circulaires, antérieur, postérieur et externe.

Fig. 8. L'oreille droite du même poisson (*Chimère antarctique*) non isolée.

A, partie antérieure de la tête.

B, partie postérieure de la tête.

C, *D*, *E*, *E*, canaux demi-circulaires antérieur, postérieur et externe.

F, canal ascendant qui mène à l'extérieur, et qui se continue en bas jusqu'en *g*, sinus médian et sacculus.

H, *sacculus*; *I*, nerf acoustique.

PLANCHE XIII.

ORGANE AUDITIF DE LA CARPE (*Cyprinus carpio*, L.).

Fig. 1.

a, *a*, vessie natatoire.

b, mâchoire supérieure.

c, pièce osseuse adhérente à la vessie natatoire, et représentant, selon Weber, le marteau des animaux supérieurs.

d, enclume selon le même auteur.

e, étrier selon le même auteur.

f, petit ligament au moyen duquel ces trois osselets sont réunis.

g, première apophyse transverse.

h, trou dont est percé l'occipital, et qui établit une communication entre l'appareil des osselets et les canaux demi-circulaires.

Fig. 2. Moitié gauche du crâne du même poisson, vue par sa face interne. La tête a été divisée sur la ligne médiane ; l'encéphale, les nerfs et toutes les parties molles ont été enlevées pour que l'oreille devînt plus apparente.

a, portion du trou occipital.

b, extrémité antérieure du crâne.

c, base du crâne.

d, voûte de la même cavité.

e, trou par le moyen duquel les osselets ont une communication médiate avec l'appareil auditif.

f, trou destiné au passage des nerfs de la cinquième paire.

g, *sacculus* contenant deux otolithes qui sont un peu visibles à travers les parois membraneuses.

h, sinus utriculeux ou sinus médian contenant également une pierre.

i, *k*, *l*, les trois ampoules, dont deux sont antérieures et une est postérieure.

m, tube demi-circulaire antérieur.

n, tube demi-circulaire postérieur. Ces deux tubes se réunissent en *o* et forment ainsi la partie ascendante du sinus utriculeux.

p, *p*, le tube demi-circulaire externe, dont on ne voit que le commencement et la fin.

Fig. 3. Les trois pierres ou *otolithes* de grandeur naturelle.

a, grande pierre du *sacculus*.

b, petite pierre (ou pierre antérieure) du *sacculus*.

c, pierre du sinus utriculeux.

ORGANE AUDITIF DU BROCHET (*Esox lucius* L.).

Fig. 4. La moitié gauche du crâne, vue par sa face interne.

a,*a*, base du crâne.

b, dessus de la tête.

c, moitié gauche du trou occipital.

d, l'œil vu par derrière.

e, ampoule du canal demi-circulaire antérieur.

f, ampoule du canal demi-circulaire externe.

g, ampoule du canal demi-circulaire postérieur.

h, extrémité postérieure et renflée du canal demi-circulaire externe.

i, sinus utriculeux ou médian, se divisant en *k* et *l*, qui sont les canaux demi-circulaires postérieur et antérieur, et se continuant antérieurement en *m*, petit renflement qui contient un *lapillus*.

n, appendice particulier qui se détache de la portion postérieure et inférieure du sinus utriculeux, et qui se dirige vers le trou occipital.

o, *sacculus* contenant les deux concrétions pierreuses *a* et *b* de la fig. 5.

p, nerf oculo-moteur; *q*, nerf pathétique; *r*, deux cordons formant ensemble le nerf de la cinquième paire.

s, filet de l'ampoule antérieure; *t*, petit faisceau nerveux s'épanouissant dans la portion *m*, qui contient un *lapillus*.

u, autre faisceau du nerf acoustique, fournissant, 1° un filet à l'ampoule *f*; 2° un pinceau de filets au *sacculus*, et 3° un filet très-long, qui gagne l'ampoule *g*.

v, filet étranger à l'organe auditif, qui contourne le *sacculus* pour percer la paroi du crâne et se distribuer au dehors.

Fig. 5. Représentant les trois *otolithes* de grandeur naturelle.

a, *otolithe* occupant la partie postérieure du *sacculus*.

b, grand *otolithe* qui occupe la majeure partie du *sacculus*.

c, grand *otolithe* contenu dans le bout antérieur du sinus médian, au-dessous de l'insertion des deux ampoules antérieures.

PLANCHE XIV.

ORGANE AUDITIF DU THON (*Scomber thynnus*, L.).

Fig. 1. Vu d'en haut.

a, membrane pituitaire.

b, *b*, nerfs olfactifs.

c, globe de l'œil.

d, *d*, *d*, *d*, muscles de l'œil.

e, nerf optique.

f, nerf oculo-moteur.

g, *g*, canal demi-circulaire antérieur.

h, *h*, canal demi-circulaire externe.

i, *i*, canal demi-circulaire postérieur.

k, *k*, nerfs de la cinquième paire.

l, *l*, nerfs acoustiques.

m, *m*, *m*, *m*, nerf vague.

n, lobe olfactif.

o, *o*, couches optiques.

p, cervelet.

q, *q*, corps restiformes.

r, *calamus scriptorius*.

s, moelle épinière.

Fig. 2. ORGANE AUDITIF DU THON (*Scomber thynnus*, L.). Cette figure représente la moitié gauche de la tête, vue par la face interne. On voit l'oreille en place, de grandeur naturelle, et située à la partie postérieure de la cavité crânienne. Cette cavité comprend tout ce qui est coloré; elle contient, outre l'encéphale un liquide huileux, qui remplit à l'égard de l'oreille la fonction de l'humeur de Cotugno.

a, canal rachidien.

b, extrémité antérieure de la tête.

c, sac ou *sacculus*.

d, appendice ou *sacculus*.

e, sinus utriculeux ou sinus médian.

f, *g*, *h*, les trois ampoules.

i, canal demi-circulaire antérieur.

k, canal demi-circulaire postérieur.

l, canal demi-circulaire externe.

m, passage pour le nerf de la cinquième paire.

n, appendice particulier du sinus médian.

o, *o*, *o*, *o*, *o*, espaces communiquant avec la cavité crânienne et contenant le liquide huileux qui, dans les mammifères, est dans la cavité labyrinthique, hors des tubes membraneux, du sinus médian et du *sacculus*, et qui occupe aussi les cavités du limaçon.

PLANCHE XV.

ORGANE AUDITIF DE L'ANGE (*Squalus squalina*, L.).

Les parties sont vues d'en haut.

a, *a*, lobes olfactifs.

b, cerveau.

c, cervelet

d, *calamus scriptorius*.

e, moelle épinière.

f, *f*, nerfs olfactifs.

g, *g*, nerfs optiques.

h, *h*, nerfs oculo-moteurs.

i, *i*, nerfs pathétiques.

k, *k*, nerfs de la cinquième paire.

l, *l*, nerfs auditifs.

m, épanouissement du nerf auditif droit sous *l'otoconie*.

m', épanouissement dans les ampoules.

n, *n*, nerfs analogues à la portion dure de la septième paire.

o, *o*, *o*, *o*, nerfs vagues.

p, *p*, corps fibro-cartilagineux attenant à la mâchoire supérieure.

q, œil du côté gauche, disséqué.

s, canal demi-circulaire antérieur.

t, canal demi-circulaire externe.

u, canal demi-circulaire postérieur.

v, *v*, ampoules des canaux demi-circulaires.

x, gravier ou *otoconie*.

y, *y*, ouïes.

z, *z*, branchies gauches.

PLANCHE XVI.

ORGANE AUDITIF DU *PERCA LABRAX* L., BAR OU LOUP.

Fig. 1. Moitié gauche du crâne, vue par la face interne, l'organe auditif étant mis à découvert (grandeur naturelle).

a, partie postérieure.

b, partie antérieure.

c, bâse du crâne.

d, portion du trou occipital.

e, trou par lequel sortait la cinquième paire de nerfs.

f, *f*, *sacculus* ou vestibule membraneux, contenant un énorme *otolithe*.

g, appendice postérieur du *sacculus* ou cysticule.

h, canal demi-circulaire antérieur avec son ampoule.

i, canal demi-circulaire postérieur avec son ampoule.

k, *k*, canal demi-circulaire externe avec son ampoule en avant.

l, endroit par lequel les deux canaux qui se rendent au sinus médian adhèrent entre eux.

m, point de réunion ou d'immersion du canal commun dans le sinus médian ou sinus utriculeux.

m', petit otolithe ou *lapillus*.

n, *o*, les deux faisceaux du nerf auditif antérieur.

p, *q*, les deux filets du nerf auditif postérieur.

Fig. 2. *Lapillus* ou otolithe du côté droit (grandeur naturelle).

a, face interne.

b, face externe.

Fig. 3.

a, *lapillus* ou *otolithe* contenu dans l'appendice du *sacculus*.

b, *otolithe* ou *lapillus* qui se trouve au-dessous des deux ampoules antérieures.

Fig. 4. Oreille gauche de la morue (*gadus morrhua*, L.).

a, portion antérieure du nerf auditif.

b, portion postérieure du nerf auditif.

c, *c*, *c*, cavité labyrinthique.

d, *d*, *d*, ampoules des canaux demi-circulaires.

e, *e*, *e*, ampoule aplatie.

f, *f*, canal demi-circulaire antérieur.

g, *g*, canal demi-circulaire postérieur.

h, h, canal demi-circulaire externe.

i, i, otolithe ou *lapillus* renfermé dans une espèce de poche.

k, fosse sous-labyrinthique.

Fig. 5. Otolithe vu par ses deux faces.

PLANCHE XVII.

ORGANE AUDITIF DE LA MORUE (*Gadus morrhua* L.).

Fig. *a, a,* ganglions olfactifs.

b, b, nerfs olfactifs.

c, c, nerfs optiques.

d, d, cerveau.

e, e, tubercules bi-jumeaux.

f, cervelet.

g, g, corps olivaires.

h, moelle épinière.

i, i, nerfs oculo-moteurs communs.

k, k, nerfs pathétiques.

l, l, nerfs de la cinquième paire.

m, m, nerfs représentant la portion dure de la septième paire.

n, n, portion antérieure du nerf auditif.

o, o, portion postérieure du même nerf.

p, p, p, nerfs vagues ou pneumo-gastriques.

q, q, filet d'anastomose entre le nerf vague et une branche de la cinquième paire.

r, canal demi-circulaire interne.

s, canal demi-circulaire externe.

t, canal demi-circulaire antérieur.

u, lapillus ou *otolithe.*

TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS LE CINQUIÈME VOLUME DES SAVANTS ÉTRANGERS.

Mémoire sur la théorie des nombres; par M. Guillaume Libri.... Page 1

Premier mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique; par M. Joseph Liouville..... 76

De l'utilité des machines, de leurs inconvénients, et des moyens d'y remédier, en assurant l'extension et les progrès de notre agriculture; par M. le baron de Morogues..... 152

Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température; par M. G. Lamé..... 174

Mémoire sur l'influence de certaines professions sur le développement de la phthisie pulmonaire, à l'occasion d'une industrie particulière à la commune de Meusnes, département de Loir-et-Cher; par M. Benoiston de Châteauneuf..... 220

Note sur la méthode des tangentes de Roberval; par M. J.-M.-C. Duhamel. 257

Mémoire sur la compression des liquides; par MM. Colladon et C. Sturm. 267

Nouvelles observations sur les principaux produits de l'opium; par M. Robiquet..... 348

Mémoire sur la restauration du périnée chez la femme, dans le cas de division ou de rupture complète de cette partie; par M. Roux..... 384

Second mémoire sur la propagation de la chaleur dans les polyèdres; par M. G. Lamé..... 418

Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de température dans les corps solides; par M. J.-M.-C. Duhamel. 440

Mémoire sur les combinaisons de l'acide chromique avec les chlorures métalliques; par M. Eugène Péligot..... 499

Extrait d'un mémoire sur le mécanisme de la respiration nasale chez les cétacés souffleurs, en ce qui touche particulièrement à la distribution dans l'appareil de l'évent des branches du nerf facial (portion dure de la septième paire des anciens anatomistes; nerf respiratoire de la face, Ch. Bell); par M. Bourjot Saint-Hilaire..... Page 507

Mémoire sur la probabilité des résultats moyens des observations; démonstration directe de la règle de Laplace; par M. Jules Bienaymé..... 513

Mémoire sur une question d'analyse aux différences partielles; par M. Joseph Liouville..... 559

Recherches anatomiques et physiologiques sur l'organe de l'ouïe des poissons; par M. Breschet..... 607

Fig. 1.

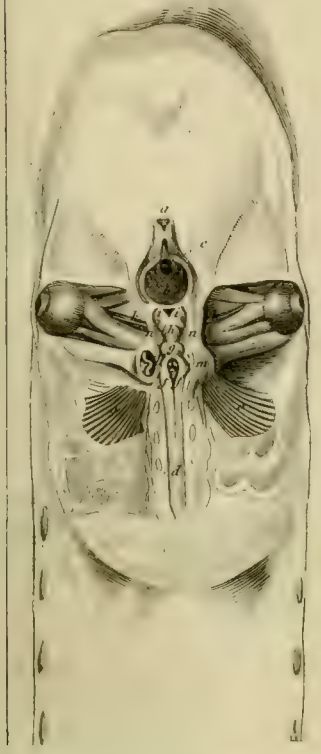
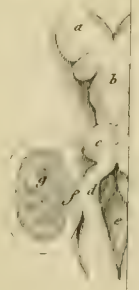


Fig 2.



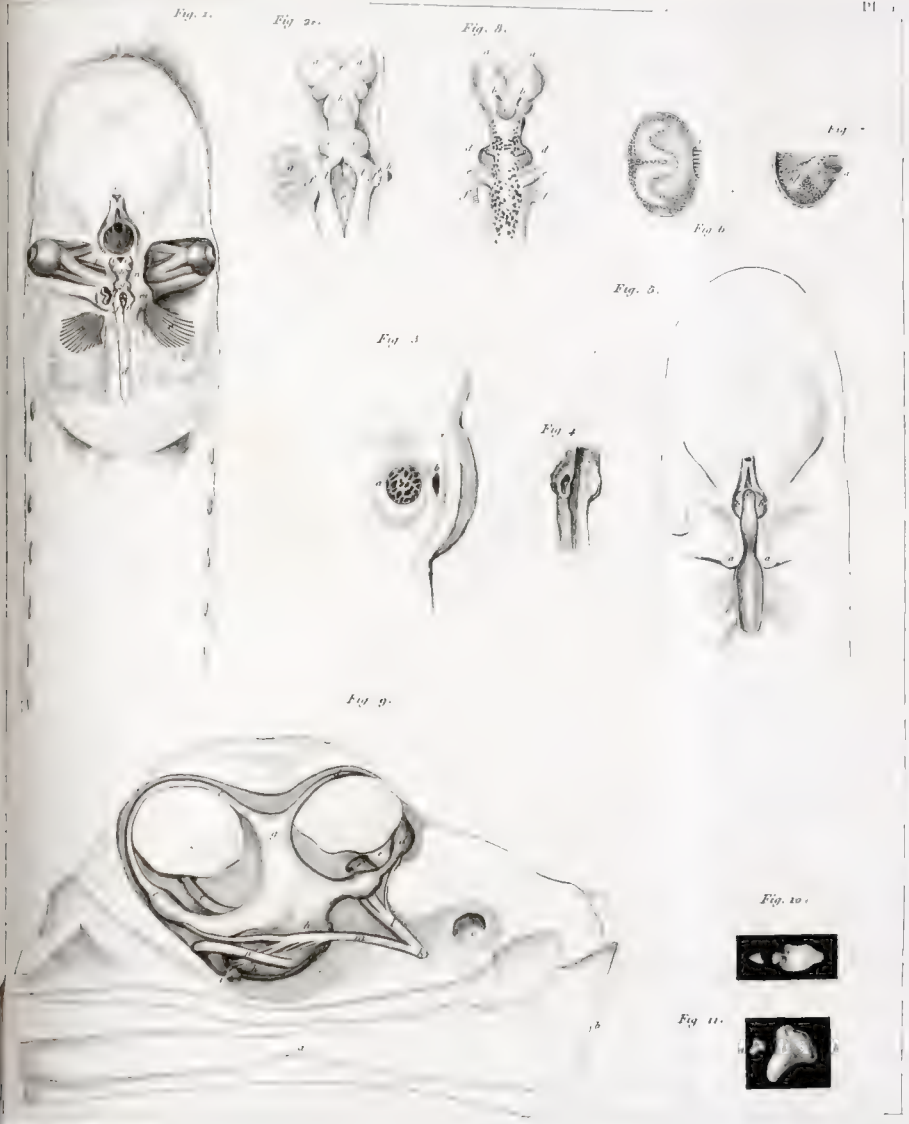
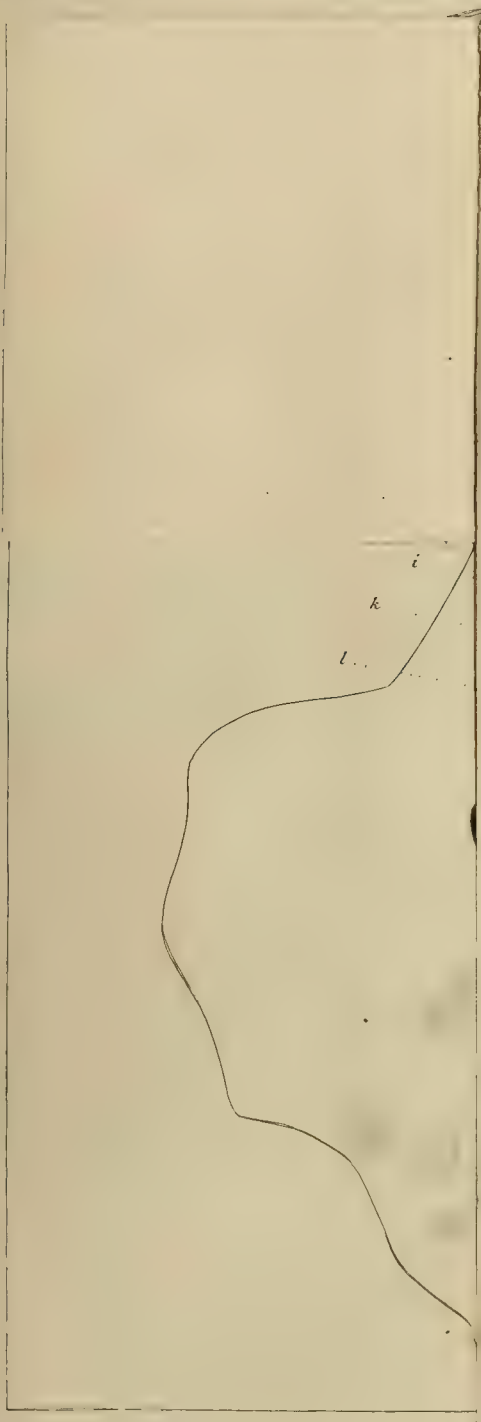
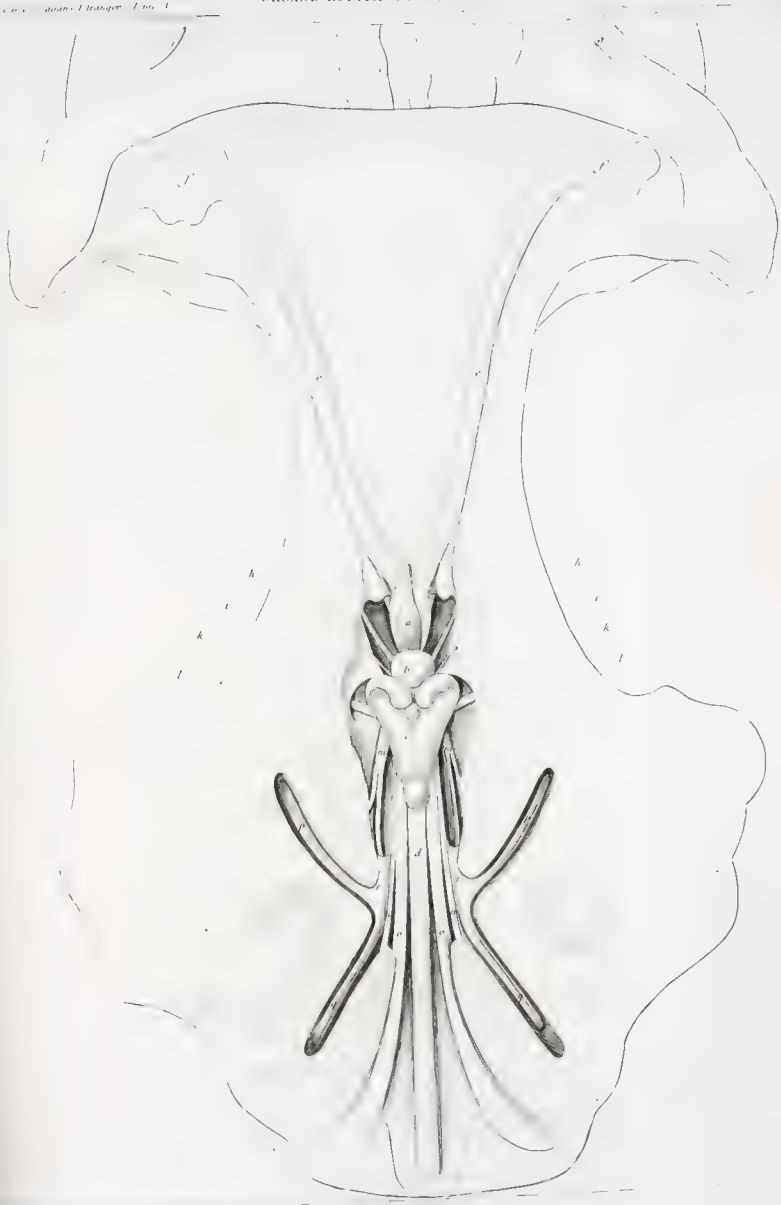
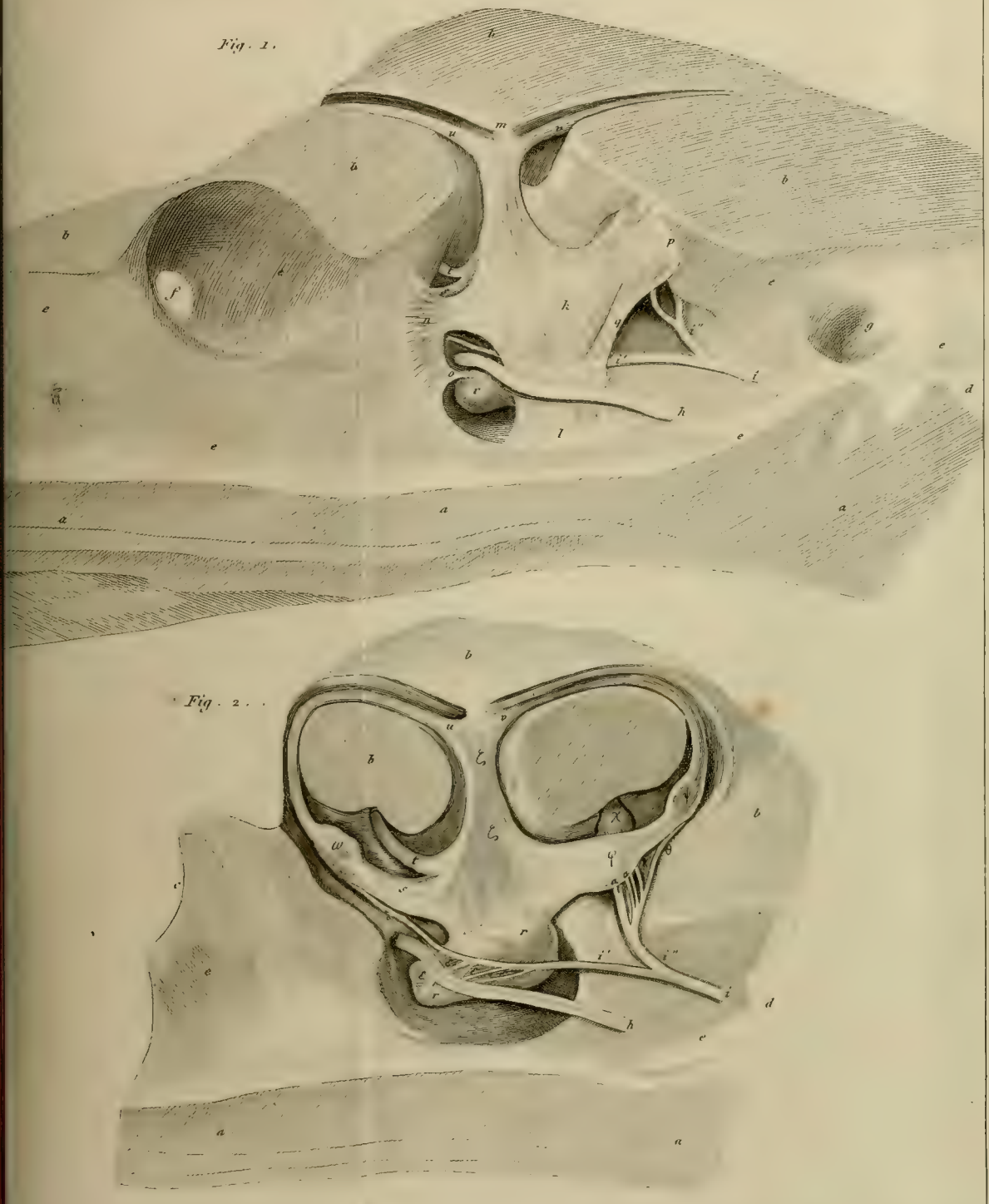


Fig. 1. **LAMPROIE.** Petromyzon maximus Cuv. *vue d'en haut le crâne ouvert.* Fig. 2. *le cerveau et les organes auditifs.* Fig. 3. *face interne de la saillie auditive.* Fig. 4. *base du crâne.* Fig. 5. *canal qui dépend de l'évent.* Fig. 6-7. *bulbe auditif grossi.* Fig. 8. *cerveau sorti du crâne.* Fig. 9. **ESTURGEON,** Acipenser Sturio. Fig. 10. *petit et grand lapillus.* Fig. 11. *osselet représentant l'étrier.*


i
k
l



ESTURGEON Acipenser Sturio L.



1. ORGANE AUDITIF DU GRAND ESTURGEON, Acipenser husoL. *vue du coté gauche* / Fig. 2. *même organe ... ou dépouillé de son ligament.*

BRITISH
MUSEUM
NATURAL HISTORY.

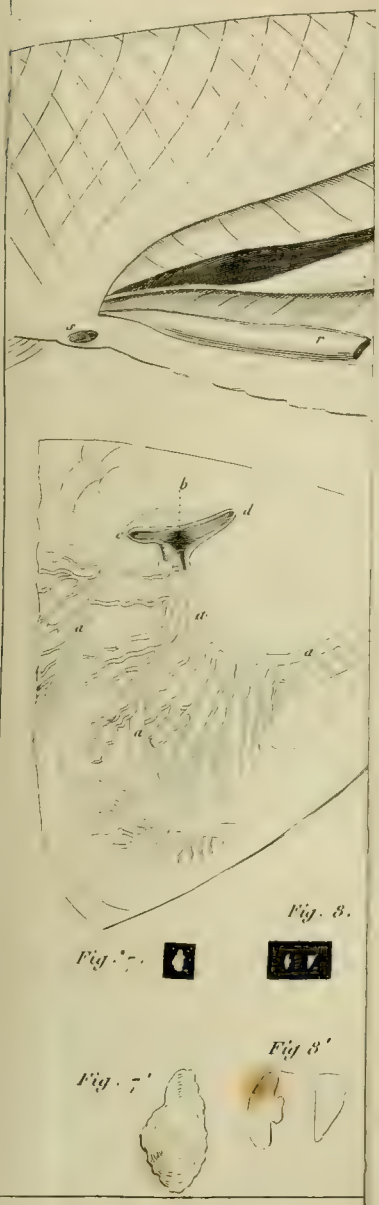


Fig. 1. **ALOSE.** Clupea Alos
enlevées, Fig. 6-7-7'-8-8'. *Canaux*

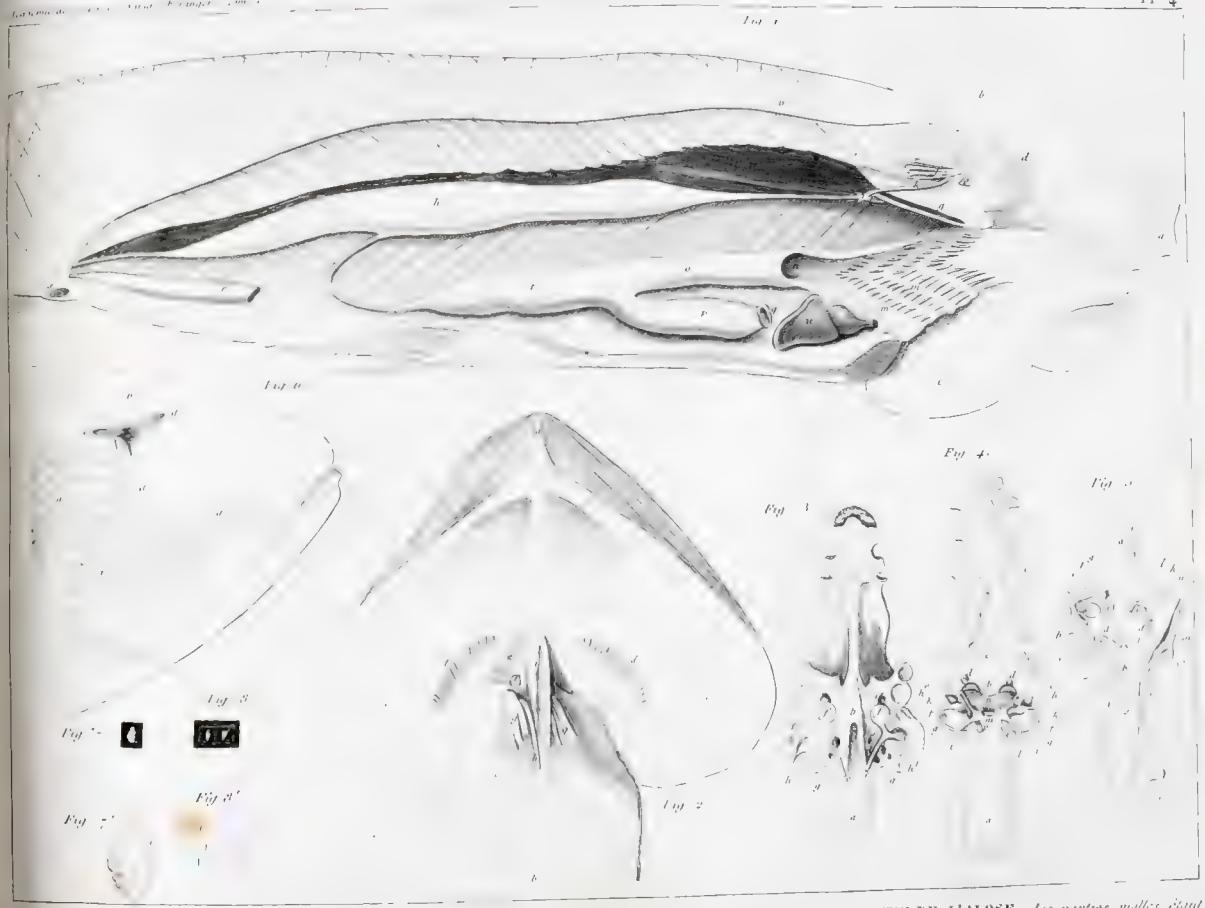


Fig. 1. **ALOSE.** Clupea Alosa. *vue de côté* Fig. 2. *la tête vue en dessous.* Fig. 3.4.5. **ORGANE AUDITIF DE L'ALOSE.** *les parties molles étant enlevées.* Fig. 6.—7.8.8'. *Canaux muqueux et osselets de la même poisson*

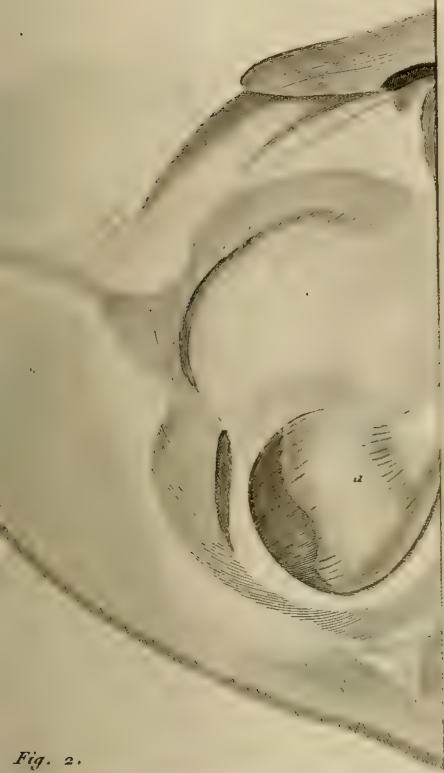


Fig. 2.

Fig. 1. MILANDRE. Squalus Galeus L. *vu*
tête coupée par le milieu / Fig. 4. *le grand et*

Académ. des sciences. Savans Etrangers. Tome I.

Fig. 1. MILANDRE. Squalus Galeus L. *vu d'en haut*. Fig. 2. *l'oreille droite, vue du coté interne*. Fig. 3. MAQUEREAU, Scomber Scombrus L. *la tête coupée par le milieu*. Fig. 4. *le grand et le petit lapillus*. Fig. 5. *les mêmes objets grossis*.

Fig. 1.

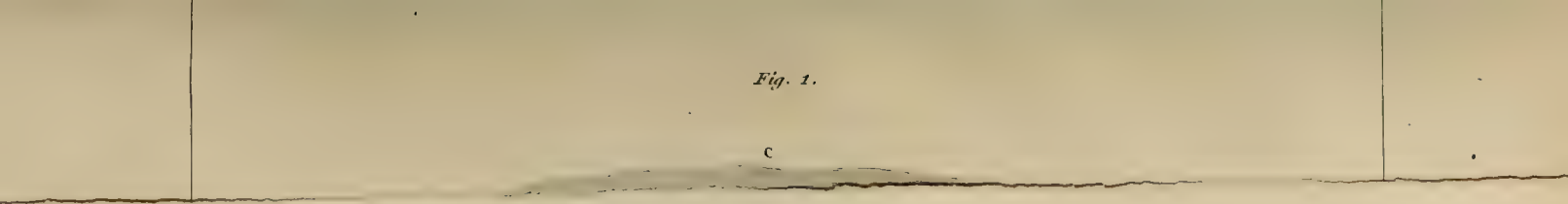


Fig. 1. **OREILLE DU CONGRE**. Muræna Conger L. Fig. 2. *Cerveau du même poisson vu par son côté gauche.* Fig. 3. **ORGANE AUDITIF DE LA BAUDROYE**, Lophius piscatorius L., *vu du côté gauche.* Fig. 4. *Les trois lapilli, grandeur naturelle.*

Fig. 1 a.

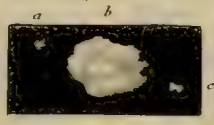


Fig. 1.

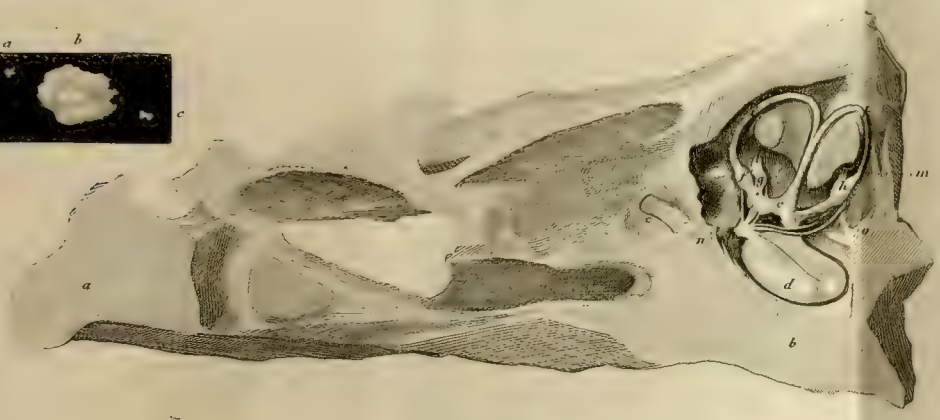


Fig. 2.

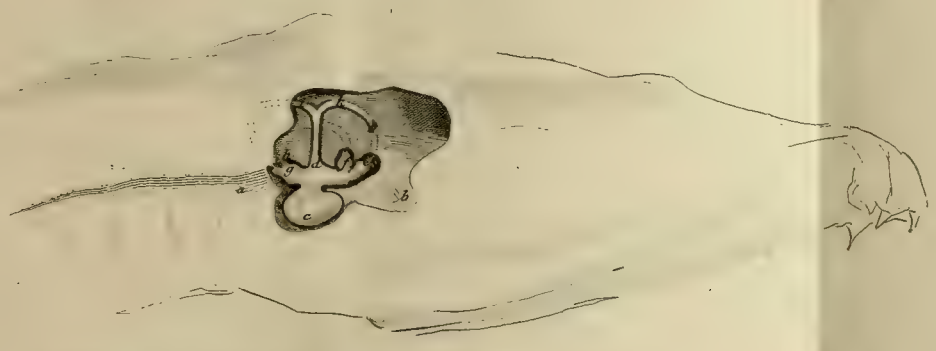


Fig. 2 b.

Fig. 2 a.

Fig. 2 c.

Fig. 3.

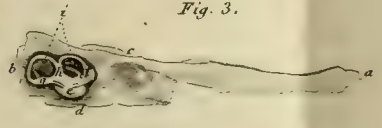


Fig. 1. OREILLE DU TURBOT, Pleuronectes maximus L. Fig. 1 *a, les trois lapilli*. Fig. 2. OREILLE DU SAUMON, Salmo salar L. Fig. 2 *a, les trois lapilli*. Fig. 2 *b, oreille isolée et grossie*. Fig 2 *c, les nerfs qu'on voit en place dans la figure précédente*. Fig. 3. ORGANE AUDITIF DE L'ANGUILLE Muræna anguilla L.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

Fig. 1.

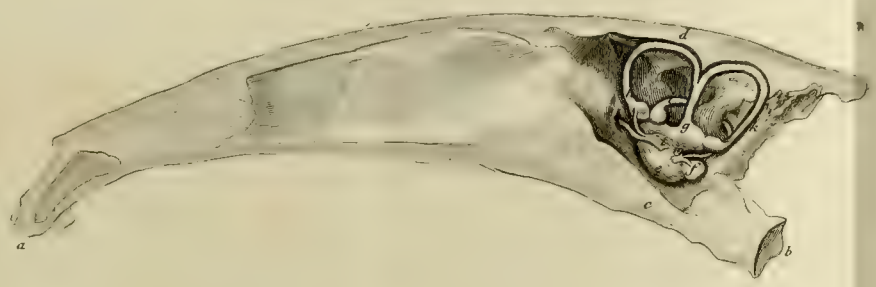


Fig. 2.

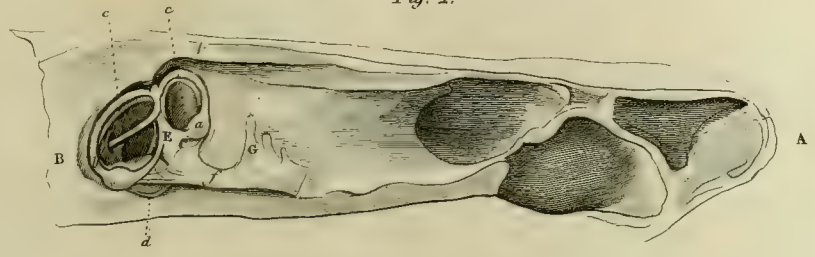


Fig. 3.

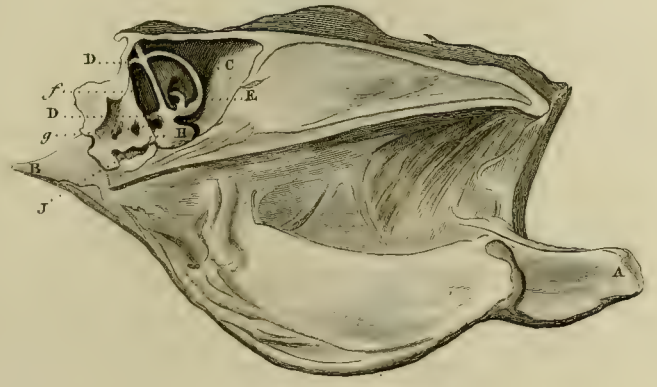


Fig. 3 a.

Fig. 3 b

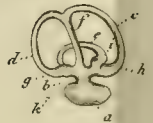
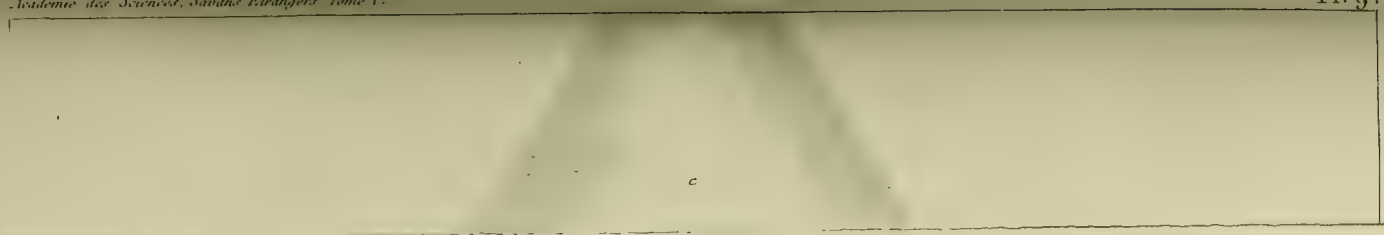


Fig. 1. ORGANE AUDITIF DU GRONDIN, Trigla gurnardus L. *moitié droite du crâne /.* Fig. 2. ORGANE AUDITIF DE LA GRANDE ROUSSETTE, Squalus Canicula L. *oreille gauche /.* Fig. 3. ORGANE AUDITIF DU PTEROÏS, Pteroïs volitans Cuv. Fig 3 *a. lapillus* Fig. 3 *b. le Labyrinthe membraneux hors du crâne .*

BRITISH
NATURAL HISTORY


c

RAIE, *vue d'en haut.*

Fig. 3.

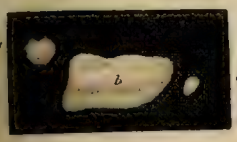


Fig. 1.

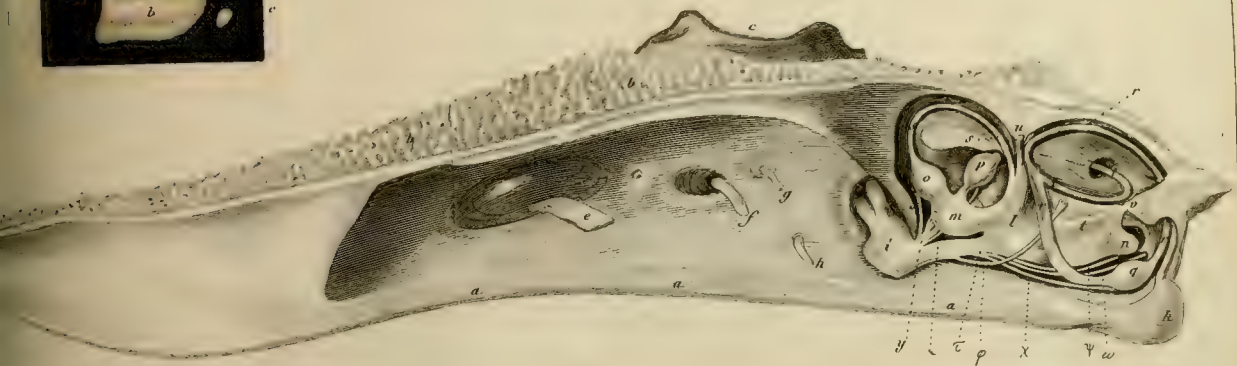
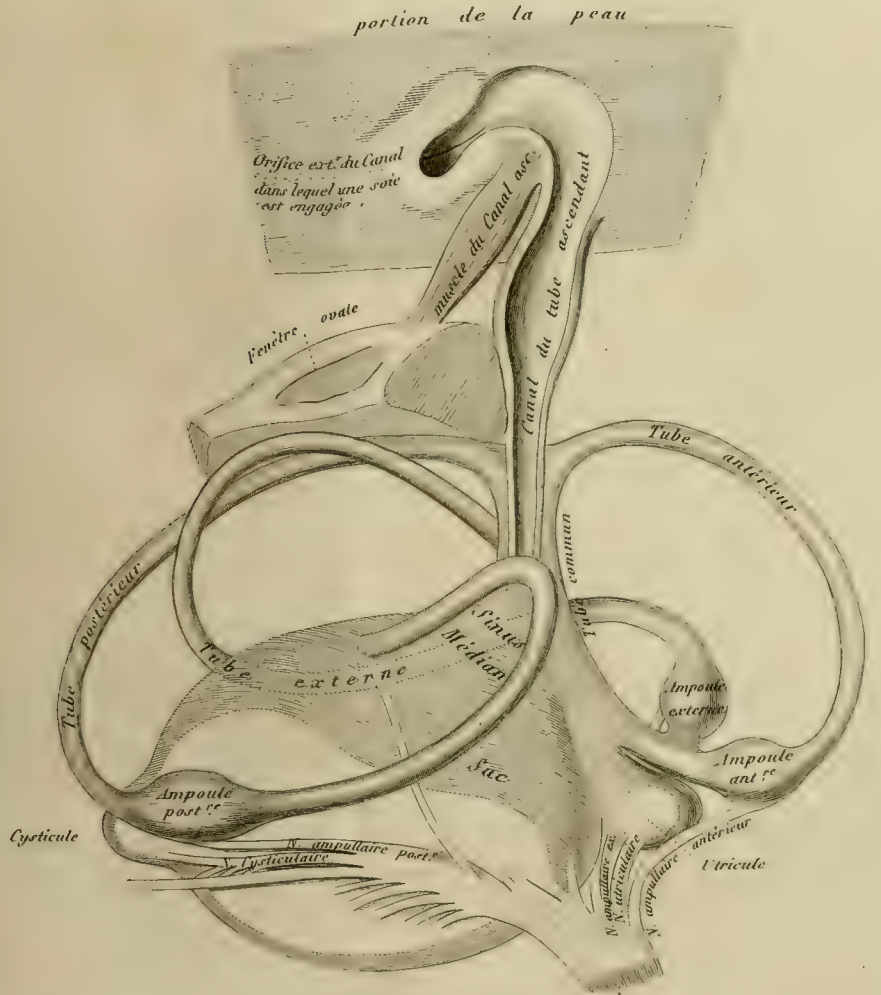


Fig. 2.



ORGANE AUDITIF DE LA RAIE. Raia clavata L. /moitié droite de la tête/. Fig. 2. LABYRINTHE MEMBRANEUX DE AIE. /Coté gauche, quadruple de la grandeur naturelle. Fig. 3. trois amas de poudre calcaire.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

Fig. 1.

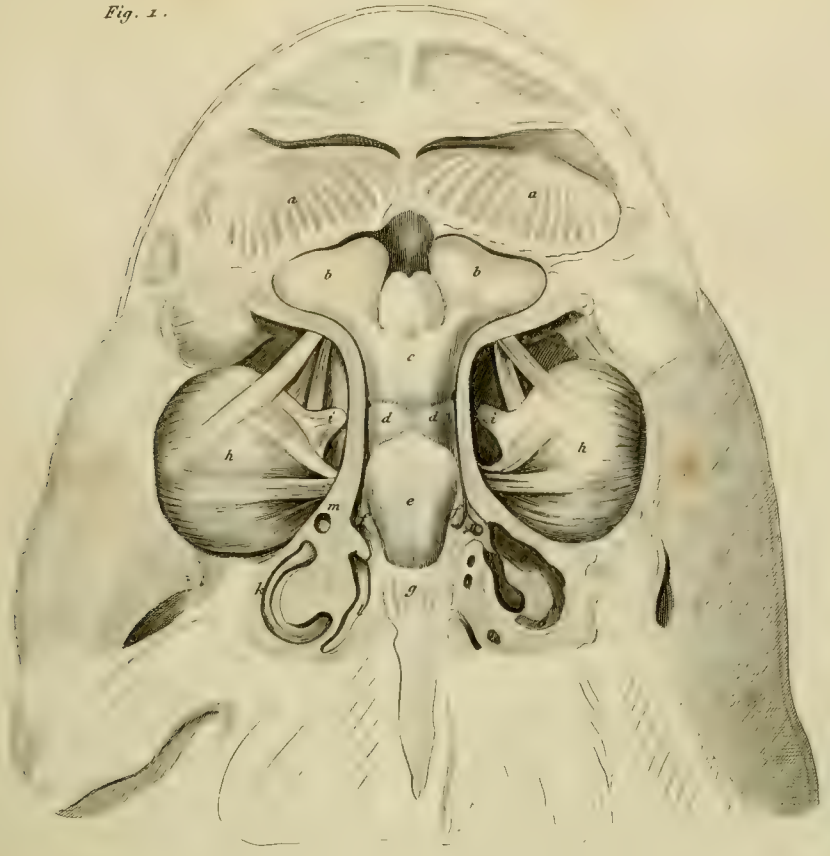


Fig. 2.

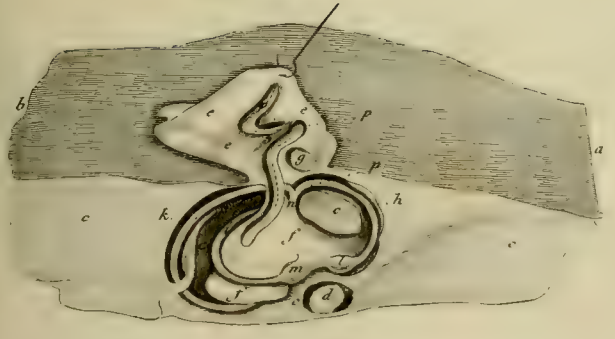


Fig. 3.

Fig. 1. ORGANE DE L'AUDITION ET ENCEPHALE DE LA RAIE, Raia Batis.L. Fig. 2. RAIE, Raia Batis.L. Fig. 3. LABYRINTHE MEMBRANEUX DE LA RAIE RONCE, Raia rubus.L.

Fig. 1.

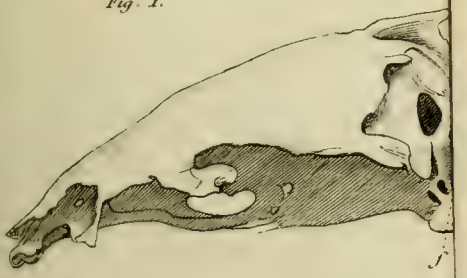


Fig. 5.

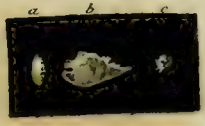


Fig. 6

Fig. 6 b

Fig. 4.

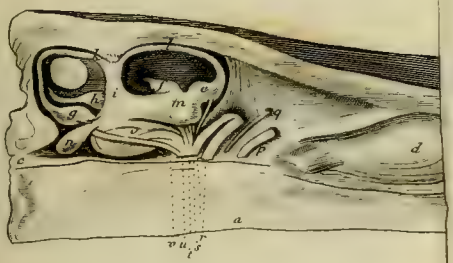


Fig. 1. CARPE Cyprinus Carpio. Fig. 2.
Fig. 4. ORGANE AUDITIF DU BROCHET. Es
mêmes lapilli ou otolithes du Brochet, grossis.

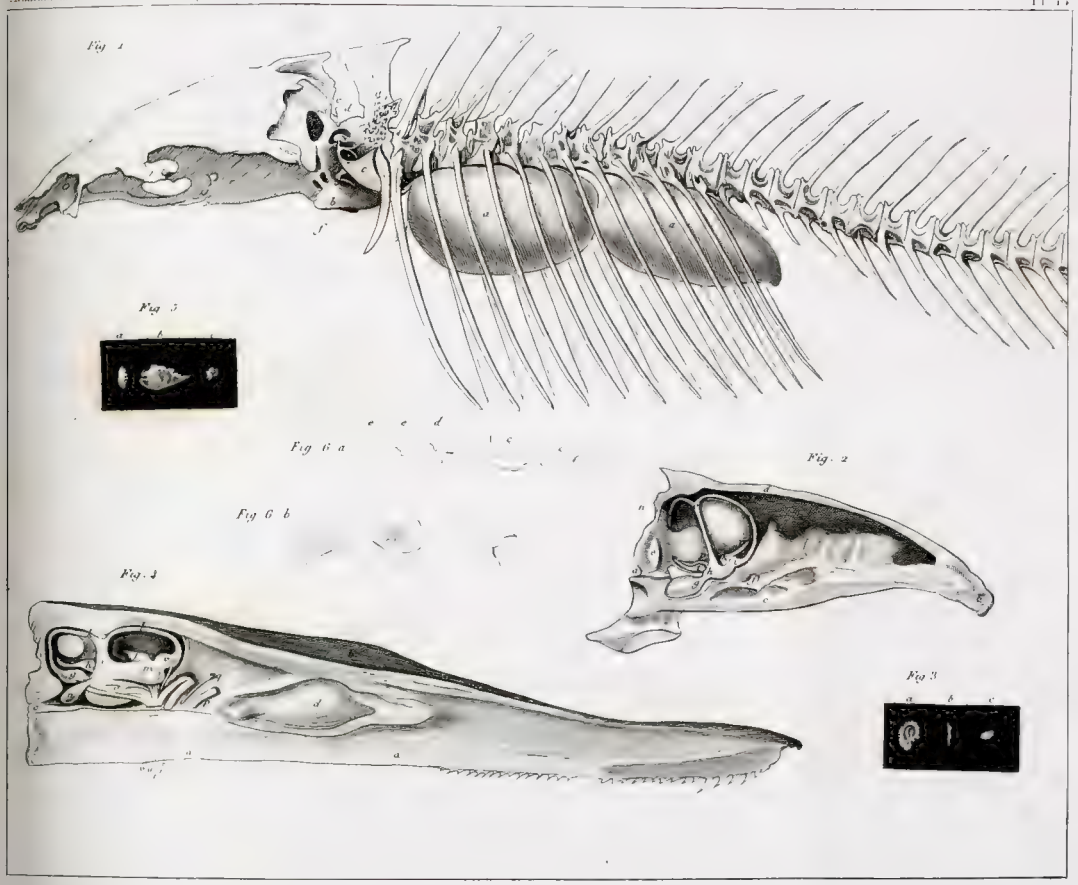


Fig. 1. **CARPE** Cyprinus Carpio L. Fig. 2. **ORGANE AUDITIF DE LA CARPE.** */moitié gauche du crâne/.* Fig. 3. *les trois pierres ou lapilli* Fig. 4. **ORGANE AUDITIF DU BROCHET.** Esox lucius L. */Coté gauche/.* Fig. 5. *les trois lapilli du Brochet* Fig. 6 a. *les lapilli de la Carpe.* Fig. 6 b. *les mêmes lapilli ou otolithes du Brochet, grossis.*

Fig. 1.

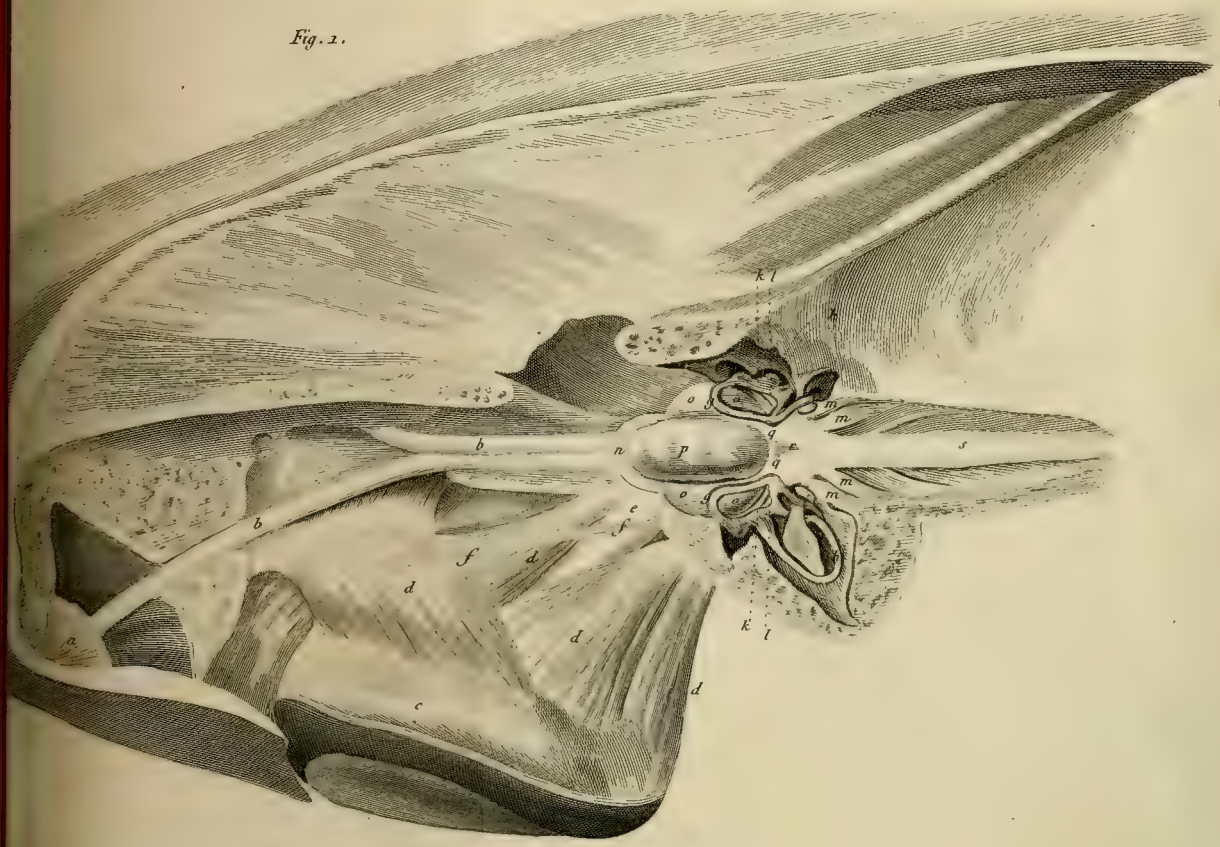
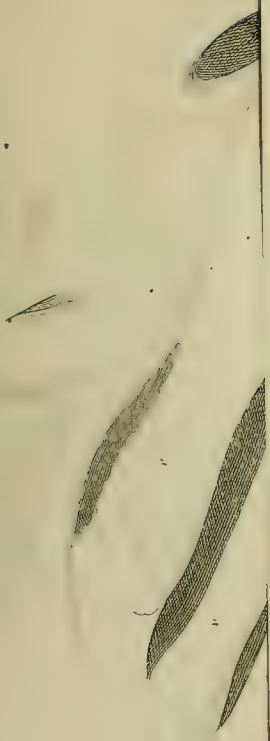
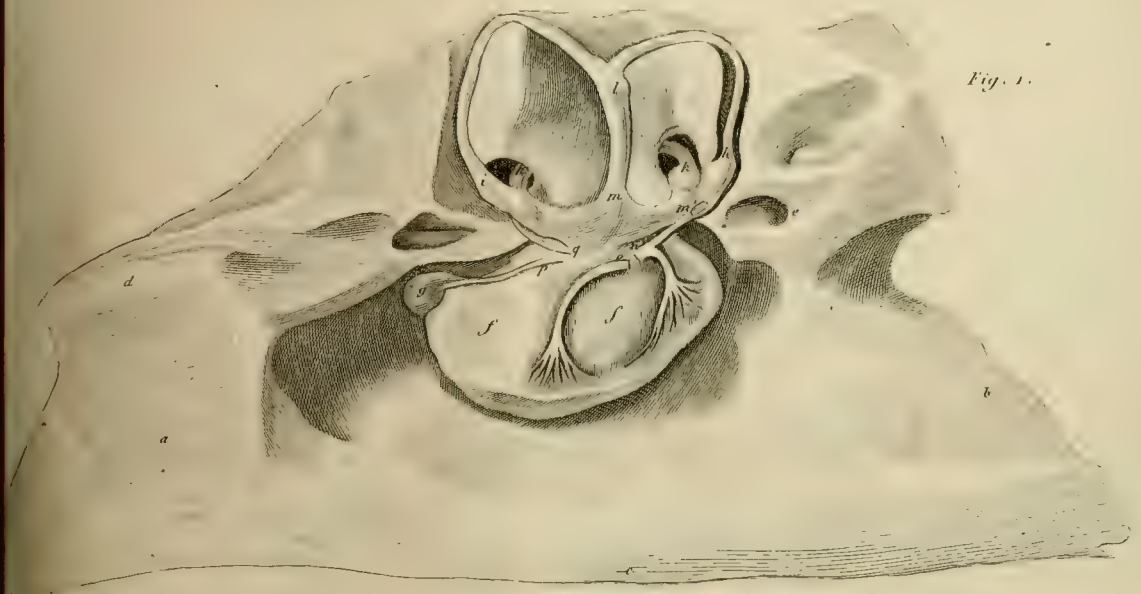


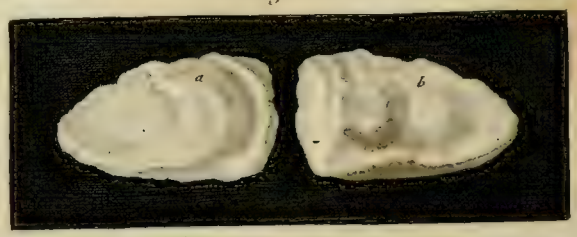
Fig. 2.

Fig. 1. THON, Scomber Thinnus L. *vu d'en haut.* Fig. 2. ORGANE AUDITIF DU THON Scomber Thynnus L. *moitié gauche de la tête.*



ANGE. Squalus Squatina *vue de la tête*





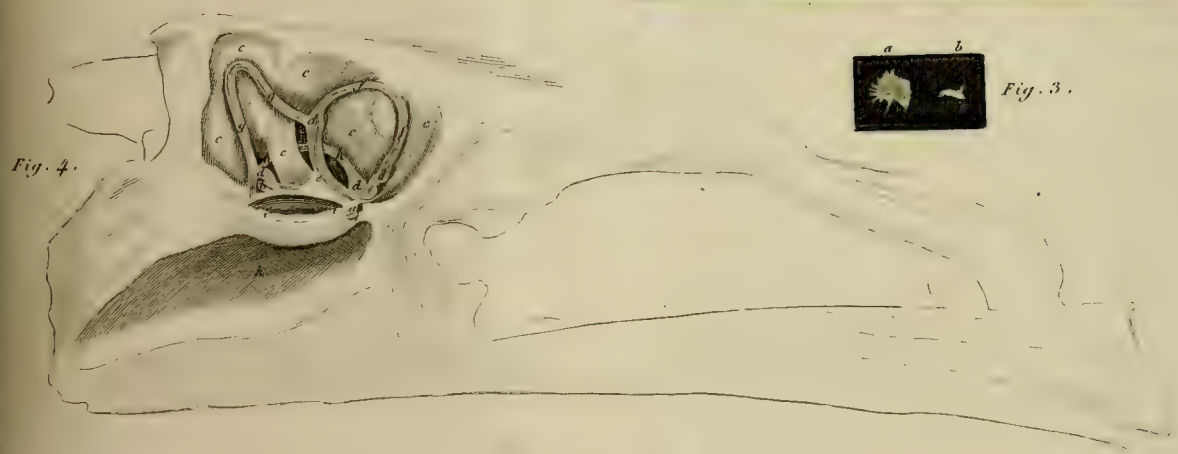
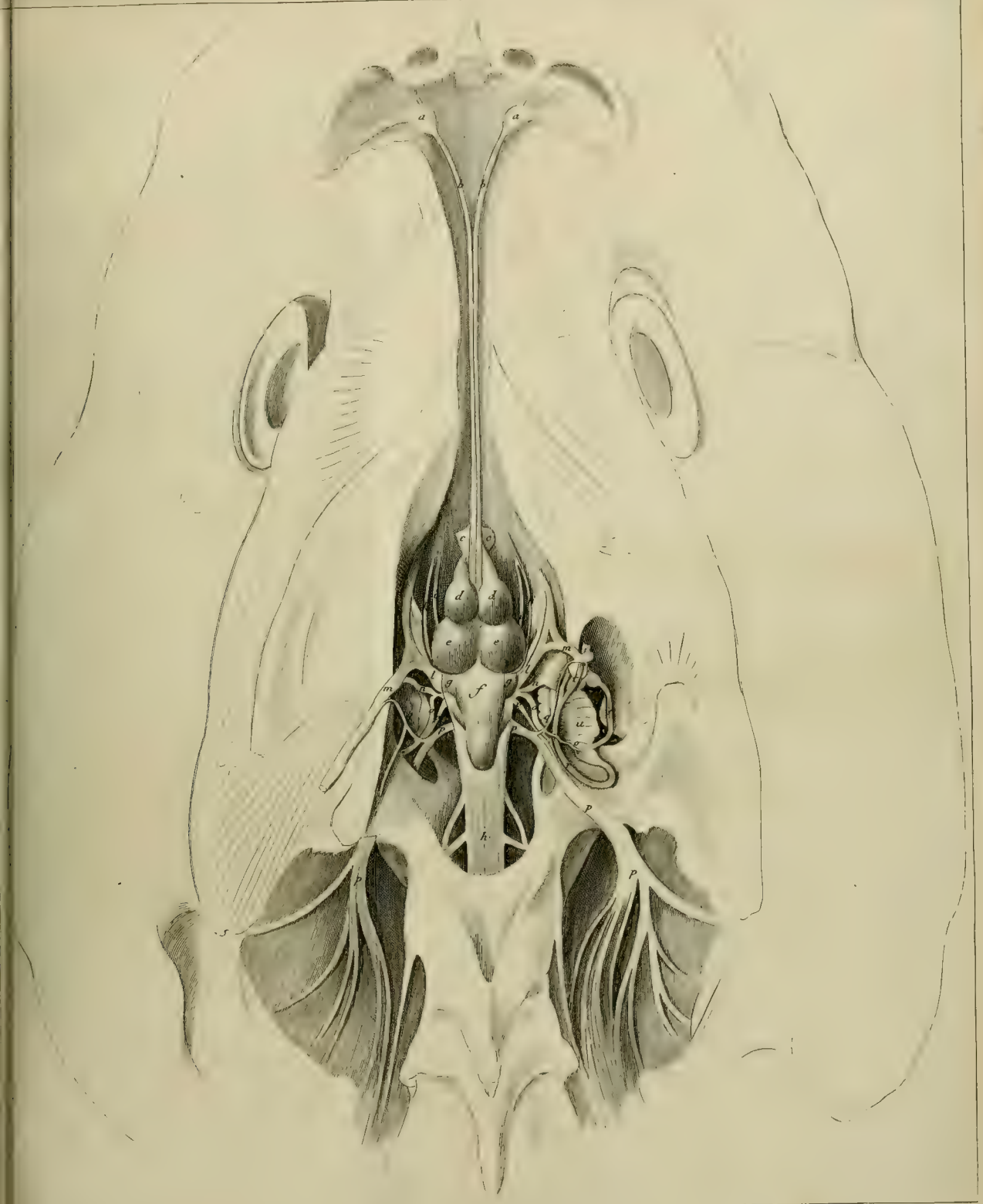


Fig. 1. **OREILLE DU LOUP** (Perca Labrax. L. Sciœna Diacantha. BL. *Coté gauche grandeur naturelle.* Fig. 2. et 3. *les Lapilli ou otolithes* Fig. 4 **OREILLE GAUCHE DE LA MORUE** Gadus Morrhua. L. Fig. 5. *les Lapilli ou otolithes*

MUSEUM



MORUE, Gadus Morrhua L.
(vue d'en haut)